国家自然科学基金资助课题

最优停止理论及其应用

金治明 著

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书系统地叙述了随机序列、随机过程、马氏过程以及多指标随机过程的最优停止理论，并对若干应用模型，如统计中的序贯方法、股票与投资、战争问题中的最优决策作了介绍。

本书可作为概率论专业的研究生教材，也可供大学高年级学生及应用研究者参考。

最优停止理论及其应用

金治明 著

责任编辑 何 晋

责任校对 曹 红

国防科技大学出版社出版发行

（地址：长沙市砚瓦街47号 邮编：410073）

新华书店总店科技发行所经销

湖 南 大 学 印 刷 厂 印 装

*

开本：850×1168 1/32 印张：14 字数：351千

1995年8月第1版 1996年1月第2次印刷 印数：1201—2200册

ISBN 7-81024-332-2

O·42 定价：17.00元

序

最优停止理论是概率论中一个具有很强应用背景的领域，它的产生可溯源很久，但60年代以来的发展是主要的。Chou Yuan-shih，H. Robbins，D. Sigmund 合著的"Great Expectation：The Theory of optimal stopping"与前苏联学者 A. N. Shirayayev 的"Optimal stopping rules"是该领域的两本专著。前者主要讲离散时间的最优停止，后者主要讨论马氏过程的最优停止。十几年来，我们一直以这两本著作为主要的材料为硕士研究生开设了这一方向的课程，同时开展了最优停止理论及其应用的研究工作。本书包括了我们的一部分研究成果，也概括了前两本书的主要内容。

第一章讨论有限情形，特别是各类秘书问题。这节也可供大学本科生阅读，可以作为指导学士论文的参考。

第二章一般理论，主要讨论离散情形。与文献[1]相比，我们增加了最大、最小最优停时，最优停时的唯一性，Rasche 方法，约束最优停时与多目标最优停止等内容。

第三、五章是关于马尔可夫序列与马尔可夫过程的最优停止。

第四章讨论连续时间的最优停止，特别是停时类的紧性与 BC 拓扑。

第六章讨论多指标最优停止，研究了两指标最优停点的存在性与构造。

最优停止理论这一领域的丰富内容决非一本书所能包容的，如果它能对有兴趣的研究者有所帮助，那就达到了我们的愿望。

本书的编写与我们的讨论班及硕士点的工作是紧密相联的，所以我要感谢参加讨论班与硕士点工作的同志，特别要感谢罗建书、易东云两位同志为第六章提供了初稿，感谢国防科技大学研究

生院及系统工程与数学系为本书的出版给予的支持。

本书的出版得到了国家自然科学基金的资助，特此鸣谢！

由于水平与学识所限，错误及不妥之处，敬请读者批评指正。

作　者

1993.6月于长沙

符号说明表

$\mathscr{R}$——实数集

$\mathscr{R}_+$——非负实数集

$\mathscr{N}$——自然数集

$\mathscr{N}_+$——非负整数集

$\mathscr{R}_+^2=\mathscr{R}_+\times\mathscr{R}_-$

$\mathscr{R}^2=\mathscr{R}\times\mathscr{R}$

$\mathscr{N}_+^2=\mathscr{N}_+\times\mathscr{N}_+$

$\overline{\mathscr{R}},\overline{\mathscr{R}}_+,\overline{\mathscr{N}}_+$——分别为 $\mathscr{R},\mathscr{R}_-,\mathscr{N}_+$ 与 $\{\infty\}$ 之并

$\overline{\mathscr{R}}_+^2,\overline{\mathscr{N}}_+^2$——分别为 $\mathscr{R}_+^2,\mathscr{N}_+^2$ 与 $\{\infty,\infty\}$ 之并

$\mathscr{B}$ 或 $\mathscr{B}(\mathscr{R})$——$\mathscr{R}$ 上 Borel 集

$(\Omega,\mathscr{F},P)$——完备的概率空间

$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$ 或 $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathscr{N}}$——$\mathscr{F}$ 的子 σ 代数族，满足通常条件

E——对 $\mathrm{d}P$ 的数学期望

$\int_A X_n$——表示 $\int_A X_n\mathrm{d}P$

$\mathbf{E}$——对 $\mathrm{d}P\times\mathrm{d}\lambda$ 的数学期望

$E(\cdot|\mathscr{F}_n)$ 或 $E_{\mathscr{F}_n}(\cdot)$——对 $\mathscr{F}_n$ 的条件期望

$L^p(\mathscr{F})$ 或 $L^p(\Omega)$——Ω 上 P 方可积的随机变量全体

x^+,x^-——x 的正部，x 的负部

a.s.——几乎处处

$\xrightarrow{P}$ 依概率收敛

$\xrightarrow{L^p}$ P 方平均收敛

$C([0,\infty])$——$[0,\infty]$ 上连续函数全体

$C_B([0,\infty])$——$[0,\infty]$ 上有界连续函数全体

$\mathscr{B}_b([0,\infty])$——$[0,\infty]$ 上有界 Borel 可测函数全体

$C(B\times B)$——$B\times B$ 上有界连续函数全体

supp——函数的支撑

sup——上确界

inf——下确界

esssup——本质上确界

[ ]——取整运算

$\mathscr{T}$ ($\overline{\mathscr{T}}$)——($\mathscr{F}_t$)或($\mathscr{F}_n$)停止规则(停时)全体

$\mathscr{T}_t(\overline{\mathscr{T}}_t)$——$\{\tau\in\mathscr{T}(\overline{\mathscr{T}}):\tau\geqslant t\}$

C ($\overline{C}$)——如所论报酬为(Z_t)，C、$\overline{C}=\{\tau\in\mathscr{T}(\overline{\mathscr{T}}):EX_\tau^-<\infty\}$

$\overline{C}(g)$——如所论马氏过程为(X_t)，报酬函数为 g，则 $C(g)=\{\tau\in\mathscr{T}:E_tg(X_\tau)^-<\infty\}$

$C(g)=C\cap\overline{C}(g)$

$C_t=C\cap T_t$

$\overline{C}_t=\overline{C}\cap\mathscr{T}_t$

$\mathscr{T}_B$——有界停时全体

$\vee$——取大运算

$\wedge$——取小运算

$\uparrow$——单调不减

$\gamma_t,\gamma_n,\overline{\gamma_t},\overline{\gamma_n},\gamma_n(x),\overline{\gamma_n}(x)$——Snell 包或 Snell 包函数

Γ——随机化停时全体

Σ——a.s 有限停点全体

$\Sigma_t=\{\sigma\in\Sigma:\sigma\geqslant t\}$

$\mathscr{Q}$——策略集

$\mathscr{Q}_z$——从 z 出发的策略全体

$\mathscr{Q}_z^*$——$\{T\in\mathscr{Q}_z:T=((V_t),\tau),\tau<\infty\quad a.s.\}$

$\mathscr{Q}_z^N$——有限步停止的策略

Θ——全体随机化策略

$\mathscr{S}$——全体随机化可选增道路

$D(z)$——z之后继

目　　录

引论

第一章　有限情形与秘书问题

第二章　一般理论

第三章　马尔可夫序列的最优停止

第七章 各种应用模型

参考文献

附录

索引

引　论

我们常常面临各种各样的决策，决策理论的主要任务是告诉决策人，采取什么样的策略将会得到最大的利益。有许多决策都可以简单地归结为是继续(做某件事)或是停止？所谓最优停止理论就是研究何时停止最为有利的数学理论。当然一件事的停止往往是另一件事情的开始。比如战争的停止就是和平的开始，对甲工程投资的停止就可能是对某乙工程投资的开始。在这个意义上，最优停止理论也就是最优开始理论。

赌博是生活中的丑恶现象，但我们却常常以此为例，因为它确是一个很直观的随机现象的模型，许多经济活动也都带有“机会”的色彩。

一个赌徒在进行了若干次赌博之后(他总是有输有赢)，很关心如何决定他的策略，是继续赌下去有利还是停止赌博为好？

一个统计试验工作者常常要问：虽然继续试验可以获得更多的信息，但每做一次试验总要耗费人力与物力，因此在做了若干次试验之后是继续做试验还是停止呢？

甲、乙两个军事集团进行了若干战斗之后(此时可能各有胜负)，从某方利益而言，自然要提出是停战还是继续打下去的问题。

一个投资者在向甲企业投资了若干年之后，观察企业的效益与整个经济形势自然也会提出是停止投资(即转变投资对象)还是继续投资更为有利的问题。

如此等等，我们可以举出更多的实例。本书并不是直接来解决

上述种种现实的问题，但它们的数学抽象却为人们指出了解决这些问题的途径。

让我们从几个简单的例子开始，说明什么是最优停止理论。

例 1（加倍或输光） 重复掷一均匀的硬币。每掷一次我们都可以停止或再掷一次，每一步所做的决断取决于迄今为止所掷出的结果。假定我们考虑的是有限次总要结束的游戏。若掷 n 次后停止，假设所得的报酬是

$$X_n = \frac{2n}{(n+1)}\prod_{i=1}^{n}(y_i+1) \tag{1}$$

其中，$y_i=1$ 表示第 i 次掷出正面，否则 $y_i=-1$. 于是当前 n 次都掷出正面的报酬是 $2^{n+1}\cdot n/(n+1)$，否则（即只要在前 n 次中有一次出现反面），$X_n=0$. 一般说来，停止在第 n 步的报酬 $X_n=f(y_1,\cdots,y_n)$，其中 f 是某一函数。

一个停时 t 是一个随机变量。在例 1 的情形 $t<\infty$. 一般地，t 取值于 $\{1,2,3,\cdots,+\infty\}$，并且 $\{t=n\}\in\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 这表明何时停止取决于迄今为止的观察结果（或称为信息）。称

$$\overline{V} = \sup EX_t$$

为报酬序列 $\{X_n\}$ 的值，这里上确界是对一切使得 EX_t 有意义的停时 t 来取的。而 E 表示数学期望，对于随机现象来说，$X_t(\omega)$ 最大是没有实际意义的，我们只能讨论在概率平均的意义上（即数学期望）的最大值问题，并且总假定 $\forall\ n, EX_n$ 有限。

记 $\overline{C}=\{t$ 为停时 $:EX_t^-<+\infty\}$，容易证明

$$\overline{V} = \sup_{t\in\overline{C}} EX_t$$

事实上，$\overline{V}\geqslant\sup\limits_{t\in\overline{C}} EX_t$ 是显然的，设 t 是一个停时，且 EX_t 存在。如果 $EX_t^-=+\infty$，则 $EX_t=-\infty$，而 $EX_1>-\infty$. 于是 $\sup\limits_{t\in\overline{C}} EX_t\geqslant EX_1>EX_t$. 因此，$\overline{V}=\sup\limits_{t\in\overline{C}} EX_t$.

如果存在 $\sigma\in\overline{C}$，使得 $EX_\sigma=\overline{V}$，则称 σ 为最优停时。

记 $C=\bar{C}\cap\{t$ 为停时，且 $t<\infty\quad a.s.\}$，称 C 中的停时为停止规则（简称为规则），并记

$$V=\sup_{t\in C}EX_t$$

如果存在 $\sigma\in C$，使 $EX_\sigma=V$，则称 σ 为最优停止规则（简称为最优规则）。

现在继续讨论例 1，令 $C^k=\{t\in C: t\leqslant k\}$，则 $C^k\uparrow C$，显然

$$V\geqslant\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in C^k}EX_t$$

又因为 $t<\infty\quad a.s, \lim\limits_{k\to\infty}X_{t\wedge k}=X_t$. 由 Fatou 引理易知

$$EX_t=E\lim_{k\to\infty}X_{t\wedge k}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}EX_{t\wedge k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in C^k}EX_t$$

所以，$V=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{t\in C^k}EX_t$. 我们还可证明：$\forall\ t\in C^k, EX_t\leqslant EX_k$. 事实上，在 $\mathscr{F}\triangleq\sigma(y_1,\cdots,y_n)$ 的原子 $A=\{\omega: y_1(\omega)=\cdots=y_n(\omega)=1\}$ 上，$X_n=n\cdot 2^{n+1}/(n+1)$，因此当 $w\in A$ 时

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)(\omega)=\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot 2^{n+2}/(n+2)>X_n(\omega)\quad(2)$$

而在 $\{y_j(\omega)=-1\}$ 上，$X_j=X_{j+1}=\cdots=X_{n+1}=0$，于是总有 $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n$. 这样对一切 $t\in c^k$

$$EX_t=\sum_{i=1}^k\int_{[t=i]}X_i\leqslant\sum_{i=1}^k\int_{[t=i]}X_{i+1}=EX_{t+1}\cdots\leqslant EX_k$$

（$\int_{[t=i]}X_i$ 表示 $\int_{[t=i]}X_i\mathrm{d}p$，省掉 d$p$ 的记号，余同。）从而

$$\begin{aligned}V&=\sup_{t\in C}EX_t\\&=\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in C^k}EX_t\\&=\lim_{k\to\infty}EX_k\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{k2^{k+1}}{k+1}+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\cdot 0\\&=2\end{aligned}$$

但是本例并不存在最优规则。事实上，$\forall\ t\in C$，由于 $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\geqslant$

X_n,不难知道

$$EX_t = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[t=k]} X_k = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[t=k,y_1=\cdots=y_k=1]} X_k + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[t=k,\exists\ i\leqslant k,\text{使}y_i=-1]} X_k$$
$$< \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[t=k,y_1=\cdots=y_k=1]} X_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[t=k,\exists\ i\leqslant k\text{使}y_i=-1]} X_{k+1}$$
$$= EX_{t+1}$$

所以任何 $t\in C$ 都不是最优的。

顺便指出,(2)式表明在任何时刻 n,如一直只有正面出现,那么再掷一次一定会获得更大的期望报酬。所以在全是正面时停止总是“愚蠢”的。但是如果我们不在某一步“愚蠢”地停下来,也即在一直出现正面时一直赌下去,那就必然会出现一次反面,而最后的报酬永远是零。所以每一步似乎是“聪明”的策略将导致最坏的结局。这是一个富有启发性的例子。由例 1 可见:

(1) 最优规则可能不存在,何时存在呢? 如果存在,怎么表达呢?

(2) 既然每一步的“聪明”策略都可能是拙劣的,但一列好的策略的极限形式也可能是拙劣的,那么在什么条件下不会发生这种情形呢?

显然,最优规则是否存在与所给定问题的概率结构有关,也与报酬函数的给定有关。

例 2(报酬等于平均数) 诸 y_n 同例 1,设报酬序列为

$$X_n = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \tag{3}$$

先考虑特殊的停止规则

$$t=\begin{cases}1, y_1=1\\ n, y_1=-1\text{ 且 }n\text{ 是第一个整数,使 }y_1+\cdots+y_n=0\end{cases} \tag{4}$$

为了证明 t 是停止规则,即 $P(t<\infty)=1$,我们有

命题 1 设诸 y_n 如例 1,$S_n=\sum_{i=1}^{n} y_i$,$S_0=1$,则

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$$

$$P(S_n\text{ 取到每个整数值无穷次}) = 1$$

证明 记 $q_j = P(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j)$，对 $j\geq 1$

$$q_j = P\left(y_1 = 1, \sup_{n\geq 1}\sum_{i=2}^{n} y_i \geq j-1\right)$$

$$+ P\left(y_1 = -1, \sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n} y_i \geq j+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}P(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j-1) + \frac{1}{2}P(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j+1)$$

$$= \frac{1}{2}(q_{j-1} + q_{j+1})$$

所以 $q_j = Cj + q_0$，因为 $q_j \leqslant 1$，所以 $C=0$. 于是 $q_j = q_0 = 1$，即 $P(\sup_{n\geq 1} S_n \geq j) = 1$，对任何 $j\geq 1$ 成立。因而

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty)$$

$$= P(\operatorname{Sup}_{n\geq 1} S_n = +\infty)$$

$$= P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{\sup_{n\geq 1} S_n \geq j\}\right) = 1$$

由对称性

$$P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$$

从而 $P(S_n$ 取到每个整数值无穷次$)=1$.

由命题 1，对几乎所有的 ω，总存在 (S_n) 的子列趋于 $\pm\infty$. 因此不论 $y_1=1$ 或 -1，总存在有限的 n，使 $S_n=0$. 于是 $P(t<\infty)=1$.

对(4)式定义的 t，$EX_t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$. 从而 $V\geqslant\frac{1}{2}$，但 $X_n\leqslant 1$，故 $V\leqslant 1$. 但是我们却找不到一个使 $EX_t > 0.9$ 的例子，也难以证明 $V\leqslant 0.9$，更不用说去找到 V 的精确值和决定最优规则了。对这个问题的研究已有一系列论文，读者可参考文献[5,6]。

如果限于在 $\{1,2,\cdots,N\}$ 中考虑最优规则，情形就不同了。因

为对于有限向量$(y_1,y_2,\cdots,y_N)$，$y_i=\pm1$，Ω 可以划分为 2^N 个原子。在每个原子上 t 至多取 N 个不同的值，所以一切可能的停止规则至多有 $N\cdot 2^N$ 种不同的取值，从理论上来说最优规则一定可以找到。但其实这是办不到的。比如取 $N=100$，则 $N\cdot 2^N\approx 10^{32}$. 如用亿次机进行计算，即使把算每个 EX_t 算做一次运算，也得花 3000 亿年！虽然如此，但先限于 N 的思想是可取的。如果限于 N，求出最优规则 σ_N 及 V^N，再令 $N\to\infty$，考虑其极限。因为

$$V^N=\sup_{t\in c^N} EX_t$$

是 N 的单调非降函数，所以 $V'=\lim\limits_{N\to\infty}V^N$ 是存在的，但是 $V=V'$ 吗？即使 $V=V'$，那么最优规则 σ 是否存在，且 $\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_N$ 吗？如果 $V\neq V'$，能否找到有效的方法把 V 介于两个彼此接近的可计算的上下界之间呢？

下面的例子说明了 $V\neq V'$.

例 3 诸 y_i 如例 1，设

$$X_n=\min(1,y_1+\cdots+y_n)-\frac{n}{n+1},\quad n=1,3,\cdots$$

考虑特殊的停止规则

$$t=\inf\{n\geqslant 1,:y_1+\cdots+y_n=1\}\tag{5}$$

由命题 1 可证 $P(t<\infty)=1$. 且

$$EX_t=1-E\left(\frac{t}{t+1}\right)>0$$

因此 $V>0$. 为了计算 V 的值，我们先求 $P(t=n)$。设想有一质点在 $(-\infty,0]$ 上作随机游动，其中 0 为吸收壁，质点每次移动 1 个单位，且向左或向右移动的概率都是$\frac{1}{2}$. 于是一个处在 -1 处的质点在第 n 步被 0 点吸收的概率恰为 $P(t=n)$。记

$u_{z,n}=P$(处于 z 处的质点在第 n 步被吸收的概率)

则当 $z\leqslant -1$，$n\geqslant 1$ 时，有

$$u_{z,n+1} = \frac{1}{2}(u_{z+1,n} - u_{z-1,n}) \tag{6}$$

显然有边界条件

$$u_{0,0} = 1, \quad u_{0,n} = u_{z,0} = 0 \tag{7}$$

引入分布$(u_{z,n})$的母函数

$$U_Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{z,n} s^n$$

由(6)及(7),可得

$$U_Z(s) = \frac{s}{2}(U_{Z+1}(s) + U_{Z-1}(s) \tag{8}$$

上述(8)是差分方程,它的两个特解

$$\lambda_1(s) = (1 + \sqrt{1 - s^2})/s, \quad \lambda_2(s) = (1 - \sqrt{1 - s^2})/s$$

于是

$$U_z(s) = A(s)(\lambda_1(s))^z + B(s)(\lambda_2(s))^z.$$

由(7)式,$1 = U_0(s) = A(s) + B(s)$. 母函数在$|s| \leqslant 1$上一致且绝对收敛,因为$\lambda_2(s) < 1$,当 $Z \to -\infty$时,$\lambda_2^Z(s) \to +\infty$,可见必须$B(s) = 0, A(s) = 1$. 所以

$$U_Z(s) = [(1 + \sqrt{1 - s^2})/s]^Z \tag{9}$$

取 $Z = -1$,则

$$U_{-1}(s) = (1 - \sqrt{1 - s^2})/s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} s^{2n+1} \tag{10}$$

式中约定$(-1)!! = 1$,从而

$$P(t = 2n) = 0$$

$$P(t = 2n + 1) = \frac{(2n - 1)!!}{(2n + 2)!!}$$

而 $E\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} P(t = 2n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$. 比较(10)式,可见

$$E\frac{1}{1+t}=\int_0^1\frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}ds=2\ln 2-1$$

下面说明(5)式所给出的 t 是最优规则。设 S 是任一个停止规则，由于 $\{\omega: i\leqslant S\}\in\mathscr{F}_{i-1}$ 与 y_i 是独立的，故

$$E\left(\sum_{i=1}^{S}y_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}Ey_iI_{(i\leqslant s)}=\sum_{i=1}^{\infty}Ey_iP(i\leqslant s)=0$$

注意到在 $\sum_{i=1}^{S}y_i\geqslant 1$ 上，$t\leqslant S$. 于是

$$\begin{aligned}EX_S&=EX_SI_{(\sum_{i=1}^{S}y_i\geqslant 1)}+EX_SI_{(\sum_{i=1}^{S}y_i<1)}\\&\leqslant E\frac{1}{S+1}I_{(\sum_{i=1}^{S}y_i\geqslant 1)}+E\left(\sum_{i=1}^{S}y_i-\frac{S}{S+1}\right)I_{(\sum_{i=1}^{S}y_i<1)}\\&\leqslant E\frac{1}{t+1}I_{(\sum_{i=1}^{S}y_i\geqslant 1)}-P\left(\sum_{i=1}^{S}y_i\geqslant 1\right)-E\left(\frac{s}{s+1}\right)I_{(\sum_{i=1}^{s}y_i<1)}\\&\leqslant E\frac{1}{t+1}\\&=EX_t\end{aligned}$$

这表明 t 是最优规则，因此 $V=EX_t=2\ln 2-1$.

但是对于仅在 $\{1,2,\cdots,N\}$ 取值的停止规则 S，由 wald 方程 $E(y_1+\cdots+y_s)=Ey_1\cdot Es=0$，从而

$$EX_S\leqslant E(y_1+\cdots+y_S)-E\left(\frac{S}{S+1}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$$

于是

$$V'=\lim_{N\to\infty}V^N\leqslant-\frac{1}{2}$$

$$V\neq V'$$

把例 3 修改一下，得出一个 $V=+\infty$ 的例子。

例 4　设 $y_1,y_2,\cdots$ 是独立的随机变量

$$P(y_j=1-a_j)=P(y_j=-1-a_j)=\frac{1}{2}$$

$$a_j=\frac{1}{j(j+1)},\qquad j=1,2,\cdots$$

令 $X_n=y_1+\cdots+y_n(n\geqslant 1)$ 为第 n 步停止的报酬。因为 $Ey_j=-a_j<0$，看来似乎不论用什么样的停止规则，停止后的平均报酬总要小于0，其实不然，如令

$$t=\inf\{n\geqslant 1:\sum_{i=1}^{n}(y_i+a_j)=k\}$$

这里 k 是任意给定的正整数，由命题1，可知 t 是一个停止规则，而

$$\begin{aligned}EX_t&=E\Big(\sum_{i=1}^{t}y_i\Big)\\&=k-E\Big(\sum_{i=1}^{t}\Big(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\Big)\Big)\\&=k-E\Big(\frac{t}{t+1}\Big)>k-1\end{aligned}$$

由于 k 是任意给定的，可见 $V=+\infty$.

上面的例子使我们初步了解到什么是最优停止的问题，也使我们看到了最优停止问题中各种不同的情形。现在来正式叙述最优停止问题的数学定义。

今后我们假设

i) $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个完备的概率空间；

ii) $(\mathscr{F}_n)_1^\infty$ 是一列递增的 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，即 $\forall n,\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}_{n+1}$；

iii) 一列随机变量 $(X_n)_{n=1}^\infty$，称之为报酬函数序列。对于每个 n，X_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，简记为 $X_n\in\mathscr{F}_n$，且称 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_{n=1}^\infty$ 为随机序列。

称取值于 $\{1,2,\cdots,+\infty\}$ 的随机变量 t 为停时，如果有 $i)\forall n$，$\{\omega:t=n\}\in\mathscr{F}_n$ 成立。如果还有 $ii)P(t<\infty)=1$，则称 t 为停止规则，全体停时记为 $\overline{\mathscr{T}}$，全体停止规则记为 $\mathscr{T}$.

通常我们总是序贯地观察到随机变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，而报酬函数 X_n 是 $y_1,\cdots,y_n$ 的已知函数，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

记 $\overline{C}=\{t\in\overline{\mathscr{T}}:EX_t^-<\infty\}$，$C=\{t\in\mathscr{T}:EX_t^-<\infty\}$，称

$$V = \sup_{t \in C} EX_t, \quad \bar{V} = \sup_{t \in \bar{C}} EX_t$$

为随机序列$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$的值。在§2.5中，将证明$V=\bar{V}$. 我们感兴趣的主要问题是：

1）如何计算V或$\bar{V}$?

2）是否存在最优停时或最优规则，即是否存在$t \in \mathscr{T}$(或$\bar{\mathscr{T}}$)，使得$EX_t = V$(或$\bar{V}$).

3)若存在最优停时(或规则)，如何表达，有什么性质，是否唯一?

最优停时不存在的简单例子可如下构造：

设$\Omega = \{\omega\}$为单点集，$X_n = 1 - \frac{1}{n}$，此时$\mathscr{F}_n = \mathscr{F} = \{\Omega, \phi\}$，$\forall\ t \in \bar{\mathscr{T}}$，$\{t=n\} \in \mathscr{F}_n = \mathscr{F}$，因此$t$必须等于某一个常数$n_0$，于是$EX_t = 1 - \frac{1}{n_0}$，$V=1$. 但没有一个$t \in \mathscr{T}$，能使$EX_t = V$.

如果$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$是一个上鞅序列，且一致可积，则由 Doob 停止定理可知，$\forall\ t \in \bar{\mathscr{T}}$，$EX_t \leqslant EX_1$，于是$t \equiv 1$便是最优规则。

如果$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$是一个一致可积的鞅序列，则由 Doob 停止定理，对$\forall\ t \in \bar{\mathscr{T}}$，$EX_t = EX_1$，所以任何$t \in \bar{\mathscr{T}}$都是最优的，最优停时不唯一。

下面给出在最优停止理论中三个著名的例子。暂时我们只给出它们的数学模型，今后将逐步解这些问题。

例5(秘书问题) 设想一个经理要从N个姑娘中雇用一名秘书。按照某种标准，我们可用$1, 2, \cdots, N$分别表示这些姑娘优劣的(绝对)名次。1表示最优者，N表示最劣者。我们假设这些姑娘是逐个到来接受经理面试的，并且姑娘到来的优劣次序是随机的。经理每次会见一名姑娘，面试后决定录用与否。如果录用到当时面试的姑娘，则停止下面的会见，否则面试下一位。我们还假定，每个当时不被录用的姑娘是不能事后再招回录用的。在经理每一次面试

后，他只知道当时的姑娘与先前已面试姑娘比较的相对名次，而并不知道当时姑娘的绝对名次。现在要问经理应怎样决定他的录用策略，或者说经理在何时停止他的会见（录用当时的姑娘）是最优的，当然这里最优要有一个标准，通常采用下面两种标准。

1）第一标准：使录用到最好姑娘的概率最大；

2）第二标准：使录用到姑娘的绝对名次的平均值最小。

现在建立数学模型。令

$\Omega=\{(a_1,a_2,\cdots,a_N)$：其中$(a_1,\cdots,a_N)$是$(1,2,\cdots,N)$的一个排列$\}$

$\mathscr{F}=\mathscr{P}(\Omega)$，即$\Omega$的一切子集的全体，

对每个样本点，赋概率$1/N!$，也就是认为Ω是一个由$N!$个具有同样概率的样本点所组成。

$y_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中小于等于a_n的个数，也即a_n的相对名次。

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

对于第一标准，我们自然取报酬序列

$$\tilde{X}_n=\begin{cases}1, & a_n=1\\ 0, & a_n\neq 1\end{cases}$$

但它不满足$\mathscr{F}_n$可测的要求，为此令

$$X_n=P(a_n=1|\mathscr{F}_n),\quad n=1,2,\cdots,N$$

$\forall$ 停止规则 t

$$\begin{aligned}EX_t&=\sum_{n=1}^{N}\int_{[t=n]}X_n\\ &=\sum_{n=1}^{N}\int_{[t=n]}P(a_n=1|\mathscr{F}_n)\\ &=\sum_{n=1}^{N}\int_{[t=n]}I_{[a_n=1]}\\ &=P(a_t=1)\end{aligned}$$

这里$P(a_t=1)$就是按停止规则t停下来，录用到的a_t恰为第一名

的概率，于是按第一标准的问题就是要解$\{X_n,\mathscr{F}_n\}$的最优停止问题。

对于第二标准，取报酬序列

$$X_n = -E(a_n|\mathscr{F}_n),\quad n=1,2,\cdots,N$$

$\forall$ 停止规则 t

$$EX_t = \sum_{k=1}^{N}\int_{[t=k]} X_k = -\sum_{k=1}^{N}\int_{[t=k]} a_k = -Ea_t$$

因此选取 t，使 Ea_t（平均名次）最小，即选取 t 使 EX_t 最大，所以按第二标准，我们要解$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^N$ 的最优停止问题。

例 6（窃贼问题） 假设有一小偷，每天偷一户人家，他每天所获赃物的价值是随机的，构成一列独立同分布且期望有限的随机变量，再假定他每天被抓获而被迫退出全部赃物的概率是 p，并且认为小偷在第 n 次行窃被抓获这一事件与过去已发生的事件是独立的。现在要问小偷如何"明智"地选择一个洗手不干的时间。值得一提的是这只是一个模型，那些符合一旦失效便前功尽弃的事例大都可归为这个模型。

用数学的语言，令 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 是一列独立同分布且期望有限的随机变量，$\delta_1,\delta_2,\cdots$ 是一列独立变量 $P(\delta_n=0)=1-P(\delta_n=1)=p$，并设$\{y_n\}\{\delta_n\}$是独立的，令 $\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n;\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$，并设

$$X_n = \delta_1\cdots\delta_n\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i,\quad n=1,2,\cdots$$

窃贼问题就是要解$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 的最优停止问题。

例 7（停车问题） 设有 $n=Q,Q+1,\cdots,-1,0,1,\cdots$等位置可以停车，$Q<0$，设想我们从位置 Q 开始顺序地选择停车点，如果在某处不停，那么只能向前走，不能再返回，设第 n 个位置是空着的概率为 p，且与其它位置是否被占用是独立的，当然我们只是到了第 n 个位置才知道它是否被占用，如果停在第 n 个位置，则有一定

损失，假设其损失与它离开位置 0 的距离成正比，我们的目的是尽可能停在离 0 较近的地方，从而使损失最小，下面建立数学模型。令

$$y_n=\begin{cases}0, & \text{第 } n \text{ 个位置被占用}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

则 $\{y_n\}_{n=Q}^{+\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量，且

$$P(y_n=1)=p=1-P(y_n=0)$$

令

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_Q,y_{Q+1},\cdots,y_n)$$

$$\widetilde{X}_n=\begin{cases}-\infty, & y_n=0\\ -|n|, & y_n=1\end{cases}$$

于是 $-\widetilde{X}_n$ 表示停在第 n 个位置时的损失，找一个停车规则 t 使损失最小，即使 $E\widetilde{X}_t$ 最大，但 $\widetilde{X}_n$ 并不可积，先将问题进一步简化。

很明显，如果我们处在 0 位置之后，就应该停在第一个空的位置上，因此只须考虑从 $n=Q$ 到 $n=1$ 的最优停止问题。事实上，令

$$t_1=\inf\{n\geqslant 1;y_n=1\}$$

那么对 $\forall\ t\in\mathscr{T}$，若令

$$t'=tI_{[t\leqslant 0]}+t_1I_{[t>0]}$$

则 $\widetilde{X}_{t'}\geqslant\widetilde{X}_t$ 所以只须讨论如 t' 这样的规则，因为

$$E\widetilde{X}_{t_1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[t_1=n]}\widetilde{X}_n=-\sum_{n=1}^{\infty}nP(t_1=n)=-\sum_{n=1}^{\infty}npq^{n-1}=-\frac{1}{p}$$

所以若令

$$X_1=-\frac{1}{p},\quad X_n=\begin{cases}n, & y_n=1\\ -\dfrac{1}{p}, & y_n=0\end{cases}\qquad Q\leqslant n\leqslant 0$$

则 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_{n=Q}^{1}$ 也刻划了停车问题。

第一章　有限情形与秘书问题

遵循从简单到复杂的原则，我们先从一种特殊情形即有限情形开始。

§1.1　有限情形

所谓有限情形，即所考虑的报酬函数是一个有限序列$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^N$，其中 N 是一固定的已知数。

假设$\forall\ n\leqslant N, E|X_n|<\infty$，令

$$C^N=\{t\in\mathscr{T}: 1\leqslant t\leqslant N\} \tag{1.1}$$

$$V^N=\sup_{t\in C^N} EX_t \tag{1.2}$$

显然对任何 $t\in C^N, E|X_t|\leqslant\sum_{n=1}^N E|X_n|<\infty$. 令

$$C_n^N=\{t\in C^N: n\leqslant t\leqslant N\} \tag{1.3}$$

$$\gamma_n^N=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n^N} E(X_t|\mathscr{F}_n) \tag{1.4}$$

$$V_n^N=\sup_{t\in C_n^N} EX_t (n=1,2,\cdots,N) \tag{1.5}$$

我们来说明一下 γ_n^N 的意义，它的数学定义是清楚的，它是随机变量族$\{E(X_t|\mathscr{F}_n): t\in C_n^N\}$的本质上确界。一般地，若 $\mathscr{H}$ 为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中一个可测函数的非空族，称可测函数 η 为 $\mathscr{F}$ 的本质上确界是指它满足

1) $\forall\ \xi\in\mathscr{H},\xi\leqslant\eta$ a. s.

2) 若 η' 是任一可测函数，$\forall\ \xi\in\mathscr{H}$ 有 $\xi\leqslant\eta'$ a. s，则必 $\eta\leqslant\eta'$ a. s.

容易看出若 $\mathscr{F}$ 的本质上确界存在，则在 a. s. 意义上必唯一，我们有下面的基本定理：

设 $\mathscr{H}$ 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上可测函数的非空族，则 $\mathscr{H}$ 的本质上确界存在，且存在 $\mathscr{H}$ 中至多可列个元素 $\xi_1,\xi_2,\cdots$，使得

$$\operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathscr{H}}\xi=\sup_{n\geqslant1}\xi_n$$

这个定理的证明见附录。

条件期望的概念是读者所熟悉的，这里只做一点直观的解释，如果有一可数分割：

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j),\quad \mathscr{F}_n=\sigma(B_1,B_2,\cdots,B_n),$$

那么

$$E(X_t\,|\,\mathscr{F})=\frac{1}{P(B_n)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n}X_tdP\cdot I_{B_n}$$

也就是说随机变量 $E(x\,|\,\mathscr{F}_n)$在每个原子 B_n 上取值为常数 $\frac{1}{P(B_n)}\cdot\int_{B_n}X_t\mathrm{d}P$，它表示可在 t 处停下来所得的平均报酬，因此 γ_n^N 表示在 n 后停止所可能得到的最大报酬。

现在用倒退的方法给出我们的分析，如果我们已经进行到第 $N-1$ 步，如果

$$X_{N-1}<E(X_N\,|\,\mathscr{F}_{N-1})$$

这表明再考察一步，可能会得到更大的报酬，因此应该令最优规则 $t=N$，反之，若 $X_{N-1}\geqslant E(X_N\,|\,\mathscr{F}_{N-1})$时就应该在第 $N-1$ 步停下来，当然我们还要问是否有必要进行到第 $N-1$ 步？于是我们来看处于第 $N-2$ 步应做的选择：当 $X_{N-2}<E(\gamma_{N-1}^N\,|\,\mathscr{F}_{N-2})$时取 $t=N-1$，否则就应该停在第 $N-2$ 步，依次下去，就导致下面的“动态规

划"的定理，我们称之为后退归纳法原则，先给出一个引理。

引理 1.1 对于(1.4)定义的 γ_n^N，有

$$\gamma_N^N = X_N,\ \gamma_n^N = \max\{X_n, E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n)\}, \tag{1.6}$$

其中 $n=N-1, N-2, \cdots, 1$.

证明 $\forall\ n$，有 $\gamma_n^N \geqslant E(X_n \mid \mathscr{F}_n) = X_n$，$E(\gamma_n^N)^- \leqslant E\ X_n^- < \infty$，条件期望 $E(\gamma_n^N \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 有意义。

设 $t \in C_n^N$，令 $t' = \max(t, n+1)$，则 $t' \in C_{n+1}^N$

$$\begin{aligned} E(X_t \mid \mathscr{F}_n) &= E(X_n I_{[t=n]} + X_{t'} I_{[t>n]} \mid \mathscr{F}_n) \\ &= X_n I_{[t=n]} + I_{[t>n]} E[E(X_{t'} \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] \\ &\leqslant X_n I_{[t=n]} + I_{[t>n]} E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n) \end{aligned}$$

由 $t \in C_n^N$ 及任意性得

$$\gamma_n^N \leqslant \max(X_n, E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n)), \qquad n = N-1, \cdots, 1 \tag{1.7}$$

反之，只要证 $\gamma_n^N \geqslant E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n)$。我们采用后退归纳法，当 $n=N-1$ 时，因为 $\gamma_N^N = X_N$，所以 $\gamma_{N-1}^N \geqslant E(X_N \mid \mathscr{F}_{N-1})$，假设对 $N-1, N-2, \cdots, n$ 结论成立，即

$$\gamma_n^N = \max(X_n, E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n))$$

往证 $n-1$ 的情形，记 $A_i = \{X_i \geqslant E(\gamma_{i+1}^N \mid \mathscr{F}_i)\}$，则 $A_i \in \mathscr{F}_i$，$i = n, n+1, \cdots, N-1$，由于

$$\begin{aligned} t = nI_{A_n} &+ (n+1) I_{A_n^c} I_{A_{n+1}} + \cdots \\ &+ (N-1) I_{A_n^c} \cdots I_{A_{N-2}^c} I_{A_{N-1}} + N \cdot I_{A_n^c \cdots A_{N-1}^c} \end{aligned}$$

是一个停止规则，且 $t \in C_n^N \subsetneqq C_{n-1}^N$，，于是

$$\begin{aligned} E(\gamma_n^N \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= E[\max(X_n, E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= E[X_n I_{A_n} + E(\gamma_{n+1}^N \mid \mathscr{F}_n) I_{A_n^c} \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= E[X_n I_{A_n} + X_{n+1} I_{A_n^c A_{n+1}} + \gamma_{n+2}^N I_{A_n^c} I_{A_{n+1}}^c \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \cdots \\ &= E(X_n I_{A_n} + X_{n+1} I_{A_n^c A_{n+1}} + \cdots + X_N I_{A_N^c \cdots A_{N-1}^c} \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= E(X_t \mid \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant \gamma_{n-1}^N \end{aligned}$$

结合已证得的(1.7)式，则

$$\gamma_{n-1}^N=\max(X_{n-1},E(\gamma_n^N|\mathscr{F}_{n-1}))$$

定理 1.2 对每个 $n=1,2,\cdots,N$，令

$$\sigma_n^N=\inf\{i\geqslant n:X_i\geqslant\gamma_i^N\} \tag{1.8}$$

其中规定若$\{i\geqslant n:X_i\geqslant\gamma_i^N\}=\Phi$，则 $\inf\Phi=N$，那么 $\sigma_n^N\in C_n^N$，且

$$E(X_{\sigma_n^N}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n^N\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n),t\in C_n^N \tag{1.9}$$

$$V_n^N=E\gamma_n^N,\sigma_n^N \text{ 在 } C_n^N \text{ 中最优}$$

证明 采用后退归纳法。显然当 $n=N$ 时，$C_N^N=\{N\}$，$\sigma_N^N\equiv N$，$\gamma_N^N=X_N$，结论显然成立。现假设结论对某个 $n=2,3,\cdots,N$ 成立，往证 $n-1$ 的情形，因为 $\sigma_{n-1}^N\in C_{n-1}^N$，令 $t'=\max(\sigma_{n-1}^N,n)$，则 $t'\in C_n^N$，且在 $[\sigma_{n-1}^N\geqslant n]$上，$t'=\sigma_{n-1}^N=\sigma_n^N$，由归纳假设 $E(X_{\sigma_n^N}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n^N$，所以$\forall A\in\mathscr{F}_{n-1}$

$$\begin{aligned}\int_A X_{\sigma_{n-1}^N} &= \int_{A\cap(\sigma_{n-1}^N=n-1)} X_{n-1}+\int_{A\cap(\sigma_{n-1}^N\geqslant n)} X_{t'} \\ &= \int_{A\cap(\sigma_{n-1}^N=n-1)} X_{n-1}+\int_{A\cap(\sigma_{n-1}^N\geqslant n)} E(E(X_{t'}|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \int_{A\cap(X_{n-1}\geqslant E(\gamma_n^N|\mathscr{F}_{n-1}))} X_{n-1} \\ &\quad +\int_{A\cap(X_{n-1}<E(\gamma_n^N|\mathscr{F}_{n-1}))} E(\gamma_n^N|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \int_A \gamma_{n-1}^N\end{aligned}$$

于是，$E(X_{\sigma_{n-1}^N}|\gamma_{n-1}^N)=\gamma_{n-1}^N\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_{n-1})$，这里 $t\in C_{n-1}^N$，从而 $EX_{\sigma_{n-1}^N}=E\gamma_{n-1}^N=V_{n-1}^N$，定理得证。

§1.2 古典秘书问题

现在讨论引论中给出的第一标准的秘书问题，并且假定当经理录用一位姑娘，她是不会拒聘的，我们称为古典秘书问题。

引理 1.3 i) 相对名次序列 $y_1,y_2,\cdots,y_N$ 相互独立，事件$\{a_n=1\}$与 $y_1,\cdots,y_{n-1}$独立，且

$$P(y_n=j)=\frac{1}{n},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.10}$$

ii) 报酬序列 $X_n=\begin{cases}\frac{n}{N}, & 若\ y_n=1\\ 0, & 若\ y_n\neq 1\end{cases}$ (1.11)

证明 首先计算古典概率 $P(a_n=1,y_{i_1}=j_1,\cdots,y_{i_k}=j_k)$，其中我们把每个时刻想象为一个位置，$N$ 个姑娘的一切可能排列有 $N!$ 种，为了实现 $a_n=1$，必须让最好的姑娘排在第 n 个位置上，欲求的概率与 n 后到来姑娘的次序无关，所以可从 $N-1$(去掉最好姑娘)中任取 $N-n$ 名随机地排在 n 后的位置，这有$(N-n)!$ 种可能的排列，前 $n-1$ 名姑娘如何排列呢？为了实现 $y_{i_k}=j_k$，我们可从 $n-1$ 个人中任取 i_k 名，把取出的 i_k 名姑娘中相对名次为 j_k 者放在第 i_k 位置上，$n-1-i_k$ 名姑娘可随机排列，于是有 $C_{n-1}^{i_k}(n-1-i_k)!$ 种可能的排列，取出的 i_k 名姑娘除第 j_k 者外还有 i_k-1 名，为了实现 $y_{i_{k-1}}=j_{k-1}$，我们又从 i_k-1 名中任取 i_{k-1}名，把其中第 j_{k-1}好者放在第 i_{k-1}位置上，余者可随机排列。如此一直把全部姑娘都排列好，这样

$$\begin{aligned}&P(a_n=1,y_{i_1}=j_1,\cdots,y_{i_k}=j_k)\\&=\frac{1}{N!}(C_{N-1}^{n-1}(N-n)!\,C_{n-1}^{i_k}(n-1-i_k)!\,C_{i_k-1}^{i_{k-1}}(i_k-1-i_{k-1})!\\&\quad\cdots C_{i_2-1}^{i_1}(i_2-i_1-1)!\ (i_1-1)!)\\&=\frac{1}{N}\frac{1}{i_k}\frac{1}{i_{k-1}}\cdots\frac{1}{i_1}\end{aligned}$$

显然，$P(a_n=1)=\frac{1}{N}$，$P(y_l=j)=\frac{1}{N!}C_N^l(N-l)!\ (l-1)!\ =\frac{1}{l}$。所以事件$\{a_n=1\}$与 $y_{i_1},\cdots,y_{i_k}(i_k<n)$独立，且 $y_1,\cdots,y_n$ 相互独立，于是 i) 得证。且

$$\begin{aligned}X_n&=P(a_n=1|\mathscr{F}_n)\\&=P(a_n=1|y_n)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P(y_n = k)} \int_{[y_n = k]} I_{[a_n = 1, y_n = k]}$$

因为$[a_n=1]\subset[y_n=1]$，$[a_n=1]\cap[y_n=k]=\varnothing$，$k=2,3,\cdots$，所以

$$\begin{aligned} X_n &= P(a_n = 1 \mid y_n) \\ &= \frac{1}{P(y_n = 1)} P(a_n = 1) \cdot I(y_n = 1) \\ &= \frac{n}{N} I(y_n = 1) \end{aligned}$$

引理得证。

定理 1.4　第一标准的古典秘书问题的最优规则是

$$S = \inf\{n \geqslant r^* : y_n = 1\} \tag{1.12}$$

其中

$$r^* = \inf\left\{r \geqslant 1 : \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} \leqslant 1\right\} \tag{1.13}$$

并且

$$\lim_{N\to\infty} V^N = \lim_{N\to\infty} \frac{r^*}{N} = \frac{1}{e} \tag{1.14}$$

证明　由定理 1.2 可知，最优规则为

$$\sigma_1^N = \inf\{n \geqslant 1, X_n \geqslant \gamma_n\}$$

这里我们简记 γ_n^N 为 γ_n，因为 $\gamma_N = x_N = P(a_N = 1 \mid y_N)$它是 y_N 的函数与 $y_1, \cdots, y_{N-1}$独立，故

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} &= \max(X_{N-1}, E(\gamma_N \mid \mathscr{F}_{n-1})) \\ &= \max(X_{n-1}, E\gamma_N) \\ &= \max(X_{n-1}, V_N) \end{aligned}$$

这里我们简记 V_n^N 为 V_n，γ_{N-1}是 y_{N-1}的函数，与 $y_1, \cdots, y_{N-2}$独立，从而，依次可得$\forall\ n \leqslant N$，$\gamma_n = \max(X_n, V_{n-1})$，于是

$$\sigma_1^N = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = \gamma_n\} = \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant V_{n+1}\}$$

为方便计令 $V_{N+1}=0$，注意到 $\gamma_{n-1} \geqslant V_N$，故 $V_{N-1} = E\gamma_{N-1} \geqslant V_N$，因此 $V_1 \geqslant V_2 \geqslant \cdots \geqslant V_N = EX_N = \dfrac{1}{N}$，由(1.11)式以及数列$\dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \cdots$是递增的，因此必有正整数 γ^*，使当 $n \geqslant r^*$ 时，$\dfrac{n}{N} \geqslant V_{n+1}$，而当 $n < r^*$ 时，$\dfrac{n}{N}$

$<V_{r+1}$. 这样的 r^* 是唯一的，故

$$\sigma_1^N = \inf\{n\geqslant 1: X_n \geqslant V_{n+1}\}$$

$$= \inf\{n\geqslant 1: \frac{n}{N} I_{[y_n=1]} \geqslant V_{n+1}\}$$

$$= \inf\{n\geqslant r^*: y_n = 1\} \triangleq S.$$

而

$$EX_S = \sum_{k=r^*}^{N} \int_{[S=k]} \frac{k}{N} I_{[y_k=1]}$$

$$= \sum_{k=r^*}^{N} \frac{k}{N} P(y_k = 1, y_{r^*} \neq 1, \cdots, y_{k-1} \neq 1)$$

$$= \sum_{k=r^*}^{N} \frac{k}{N} \frac{1}{k} (1-\frac{1}{r^*}) \cdots (1-\frac{1}{k-1})$$

$$= \frac{r^*-1}{N} \sum_{K=r^*}^{N} \frac{1}{k-1} \tag{1.15}$$

既然 $EX_S = V$，如将(1.15)式中 r^* 换为 r，可将 EX_S 可看成是 r 的函数 $\varphi(r)$，那么 $\varphi(r)$ 必须在 r^* 处取到最大值，由于

$$\varphi(r) - \varphi(r+1) = \frac{1}{N}(1 - \sum_{k=r+1}^{N} \frac{1}{k-1})$$

它在大的 r 为正数，即 $\varphi(r) > \varphi(r+1)$，因此极大点

$$r^* = \inf\{r\geqslant 1: \varphi(r) - \varphi(r+1) \geqslant 0\}$$

$$= \inf\{r\geqslant 1: \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} \leqslant 1\}$$

下面讨论 $r^*(N)$ 的极限性质，由 r^* 的定义

$$\sum_{k=r^*}^{N-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 < \sum_{k=r^*-1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

于是

$$\int_{r^*}^{N} \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \sum_{k=r^*}^{N-1} \int_{k}^{k+1} \mathrm{d}y \leqslant 1 < \int_{r^*-1}^{N-1} \frac{1}{y} \mathrm{d}y$$

从而

$$\lim_{N\to\infty} \ln \frac{N}{r^*} = 1$$

即

$$\lim_{N\to\infty} \frac{r^*}{N} = \frac{1}{e}$$

同理

$$\int_{r^*-1}^{N} \frac{1}{y}\mathrm{d}y \leqslant \sum_{k=r^*}^{N} \frac{1}{k-1} \leqslant \int_{r^*}^{N} \frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

于是

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=r^*}^{N} \frac{1}{k-1} = 1$$

$$\lim_{N\to\infty} V^N = \frac{1}{e}$$

定理证毕。

现在设 $N=100$,则 $r^*\approx 36.8$. 于是根据定理 1.4,经理只面试前 36 位到来的姑娘而不录用,直到从第 37 位开始录用第一个到来的(与前面比较)最好姑娘。采用这样的策略,经理可望以 0.368 的概率录用到最好的秘书。

下面讨论平均名次最小的秘书问题,即第二标准古典秘书问题。

引理 1.5 i) 对每个 $1\leqslant k\leqslant N$,

$$P(a_n=k\mid\mathscr{F}_n)=P(a_n=k\mid y_n)=\sum_{j=1}^{n} \frac{C_{k-1}^{j-1}\cdot C_{N-k}^{n-j}}{C_N^n} I_{(y_n=j)} \tag{1.15}$$

ii) $$E(a_n\mid y_n=j)=\frac{N+1}{n+1}\cdot j,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.16}$$

证明 i) 如引理 1.3 的证明,通过计算概率 $P(a_n=k, y_{i1}=j_1, \cdots, y_{ik}=j_k)$可以证明$\{a_n=k\}$与 $\sigma(y_1,\cdots,y_{n-1})$独立,因此

$$P(a_n=k\mid\mathscr{F}_n)=P(a_n=k\mid y_n)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} \frac{P(a_n=k, y_n=j)}{P(y_n=j)} I_{(y_n=j)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}(n-1)!\ (N-n)!}{N!\ /n}I_{[y_n=j]}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}}{C_N^n}I_{[y_n=j]}$$

ii) $$E(a_n|y_n=j)=\sum_{k=1}^{N}k\cdot P(a_n=k|y_n=j)$$

$$=\sum_{k=j}^{N}k\cdot\frac{C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}}{C_N^n}$$

$$=\sum_{k=j}^{N-n+j}(j/C_N^n)C_k^jC_{N-k}^{n-j}$$

$$=(j/C_N^n)\cdot C_{N+1}^{n+1}$$

$$=\frac{N+1}{n+1}j.$$

这样，$E(a_n|\mathscr{F}_n))=E(a_n|y_n)=\dfrac{N+1}{n+1}y_n$. 证毕。

由引理 1.5 可知，第二标准的秘书问题的报酬序列

$$X_n=-\frac{N+1}{n+1}y_n. \tag{1.17}$$

定理 1.6 第二标准秘书问题的最优规则是

$$S=\inf\{n\geqslant 1;y_n\leqslant S_n\} \tag{1.18}$$

其中 $s_n=[-\dfrac{n+1}{N+1}\cdot V_{n+1}]$， $n=N-1,N-2,\cdots,1,S_N=0$

$[\cdot]$表示取整运算。

$$V_N=-\frac{N+1}{2} \tag{1.19}$$

$$V_n=-E(\frac{N+1}{N+1}y_n\wedge(-V_{n+1})],\quad 1\leqslant n\leqslant N-1 \tag{1.20}$$

这里及今后，$a\wedge b$ 表示 $\min(a,b)$，$a\vee b$ 表示 $\max(a,b)$。

证明 由于 $V_N=EX_N=-E(\dfrac{N+1}{n+1}y_N)=-Ey_N=-\dfrac{N+1}{2}$ 且 y_1，$\cdots$，y_N 相互独立，用后退归纳法可证

$$\gamma_n=X_n\wedge E\gamma_{n+1},\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

令

$$S_n = -\left[\frac{n+1}{N+1}V_{n+1}\right], \quad n = N-1, N-2, \cdots, 1$$

$$S_N = 0$$

则

$$V_n = -\left[E\left(\frac{N+1}{n+1}y_n \wedge (-V_{n+1})\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{N+1}{n+1}j \wedge (-V_{n+1})\right\}$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{N+1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} j \wedge \left[-\frac{n+1}{N+1}\cdot V_{n+1}\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\left\{\frac{N+1}{n+1}(1+2+\cdots+S_n) + (n-S_n)(-V_{n+1})\right\}$$

因此,最优规则

$$\sigma_1^Y = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = y_n\}$$

$$= \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant E r_{n+1}\}$$

$$= \inf\left\{n \geqslant 1 : \frac{N+1}{n+1}y_n \leqslant -V_{n+1}\right\}$$

$$= \inf\{n \geqslant 1 : y_n \leqslant S_n\} = S$$

得证

顺便还可知

$$V_1 \geqslant V_2 \geqslant \cdots \geqslant V_N = -\frac{N+1}{2}, S_n \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant n$$

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_{N-1} = \left[\frac{N}{2}\right]$$

在文献[7]中还证明了

$$\lim_{N\to\infty} V^N = -\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \approx 3.8695 \tag{1.21}$$

§1.3 一般报酬函数下的可拒绝秘书问题

秘书问题是一个富有趣味和实用意义的模型,因此许多从事

最优停止理论研究的学者都从各种不同的角度出发，推广与深化了秘书问题的数学模型，1975 年 Smith[8]研究了第一标准下，每位姑娘都以固定的概率拒聘的情形，1986 年本书作者[9,10]研究了在第一和第二标准下，每位姑娘以仅与其绝对名次有关的概率拒聘的情形，1987 年李晓杰在其硕士论文中研究了模糊目标的最优选择，实质上就是一般报酬函数下的可拒绝与可招回秘书问题，1988 年周健伟、周晓文[11]进一步研究了一般报酬函数下的可拒绝秘书问题。

沿用 § 1.2 的记号，再记

$$z_n=\begin{cases}1, & \text{若 } a_n \text{ 接受录用}\\ 0, & \text{否则}, 1\leqslant n\leqslant N\end{cases} \tag{1.22}$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,z_1,y_2,z_2,\cdots,y_n,z_n),$$

假定 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 相互独立且与 $y_1,\cdots,y_n$ 独立，令

$$P(z_n=1\,|\,a_n=k)=p_{n,k},\ 1\leqslant k,n\leqslant N \tag{1.23}$$

设 $f(\cdot)$是一个单调不增函数，假定经理录用到绝对名次为 k 的姑娘，将得到报酬为 $f(k)$，若经理没有录用秘书，则报酬为 $f(\infty)$。用 U_n 表示经理在第 n 次会见后停止时所得到的报酬，即

$$U_n=f(a_n)I_{[z_n=1]}+f(\infty)I_{[z_n=0]} \tag{1.24}$$

令报酬函数为

$$X_n=E(U_n\,|\,\mathscr{F}_n),\ 1\leqslant n\leqslant N \tag{1.25}$$

易证$\forall\ t\in\mathscr{T}$

$$EX_t=E(f(a_t)I_{[z_t=1]}+f(\infty)I_{[z_t=0]}) \tag{1.26}$$

因此我们要解$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^N$ 的最优停止问题。

先做一些必要的准备。

设 $\mathscr{G}$ 是一个事件 σ 代数，$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 是两个事件类，如果$\forall\ A_i\in\mathscr{G}_i,A\in\mathscr{G}$，有

$$P(A_1A_2\,|\,\mathscr{G})=P(A_1\,|\,\mathscr{G})\cdot P(A_2\,|\,\mathscr{G})$$

则称 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，并记为$(\mathscr{G}\,|\,\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2)$.

引理 1.7 设 $\mathscr{G}_i, i=1,2,3,4$ 是 4 个事件 σ 代数，若 $(\mathscr{G}_2 | \mathscr{G}_1, \mathscr{G}_3)$，且 $(\mathscr{G}_3 | \mathscr{G}_1 \vee \mathscr{G}_2, \mathscr{G}_4)$，则 $(\mathscr{G}_2 | \mathscr{G}_1, \mathscr{G}_3 \vee \mathscr{G}_4)$，这里 $\mathscr{G}_i \vee \mathscr{G}_j = \sigma(\mathscr{G}_i \cup \mathscr{G}_j)$。

本引理的证明可参考[12]504 页。

记

$$A_{i_1 \cdots i_n} = \{y_1 = i_1, y_2 = i_2, \cdots, y_n = i_n\}$$

$$B_{j_1 \cdots j_n} = \{Z_1 = j_1, \cdots, Z_n = j_n\}$$

其中，$j_k = 0$ 或 1，$1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_n \leqslant n$. 本节还假定

a) $P(z_n = i | a_n = k, y_n = j) = P(z_n = i | a_n = k)$

其中，$i=0$ 或 1，$1 \leqslant k, j \leqslant n$. 这表明 a_n 接受录用与否与其相对名次无关。

b) $P(z_n = i, a_n = k | A_{i_1 \cdots i_{n-1}}, B_{j_1 \cdots j_n}, y_n = i_n) = P(z_n = i, a_n = k | y_n = i_n)$

式中，$i=0$ 或 1，$1 \leqslant k \leqslant n$. 这表明如果已知 a_n 的相对名次，则先前的信息 $\mathscr{F}_{n-1}$ 对于预测她的绝对名次及拒聘与否不起任何作用。

引理 1.8

$$P(z_n = 1 | a_n = k, A_{i_1 \cdots i_{n-1}} B_{j_1 \cdots j_{n-1}} y_n = j) = P(z_n = 1 | a_n = k) \overset{\triangle}{=} p_{n,k} \tag{1.27}$$

$$P(a_n = k | A_{i_1 \cdots i_{n-1}}, B_{j_1 \cdots j_{n-1}}, y_n = j) = P(a_n = k | y_n = j) \tag{1.28}$$

证明 由假定 2)可知 $(\sigma(a_n) | \sigma(z_n), \sigma(y_n))$，由假定 β)，$(\sigma(y_n) | \sigma(Z_1) \vee \sigma(a_n), \mathscr{F}_{n-1})$，因此由引理 1.7，$(\sigma(a_n) | \sigma(z_n), \mathscr{F}_{n-1} \vee \sigma(y_n))$，此即(1.27)，由 β)，则(1.28)成立。

引理 1.9 设 $R_n = \sum_{k=1}^{N} P_{n,k} > 0$，则

$$P(a_n = k, z_n = 1 | \mathscr{F}n)$$

$$= P(a_n = k, z_n = 1 | y_n, z_n)$$

$$= \frac{NP_{nk}}{R_n} \sum_{j=1}^{n} P(a_n = k | y_n = j) I_{(y_n = j, z_n = 1)} \tag{1.29}$$

证明 计算概率 $P(a_n = k, z_n = 1 | y_1 = i_1, \cdots, y_n = i_n; z_1 = j_1, \cdots z_n$

$=j_n)$，当 $j_n=0$ 时，它为 0；当 $j_n=1$ 时，它等于

$$\frac{P(z_n=1|a_n=k,A_{i_1\cdots i_n},B_{j_1\cdots j_{n-1}})\cdot P(a_n=k,A_{i_1\cdots i_n},B\,j_1\cdots j_n)}{P(A_{i_1\cdots i_n},B_{j_1\cdots j_{n-1}})P(z_n=1)}$$

$$=p_{n,k}\cdot P(a_n=k|A_{i_1\cdots i_n},B_{j_1\cdots j_{n-1}})/P(z_n=1)$$

$$=p_{n,k}\cdot P(a_n=k|y_n=i_n)/P(z_n=1)$$

$$=\frac{Np_{n,k}}{R_n}P(a_n=k|y_n=i_n)$$

(1.29)式得证。

今后约定当 $m>n$ 时，$C_n^m=0$

引理 1.10 一般报酬函数下可拒绝秘书问题的报酬函数

$$X_n=\sum_{j=1}^{N}x_n(j)I_{[y_n=j,z_n=1]}+f(\infty)I_{[z_n=0]},\quad 1\leqslant n\leqslant N \tag{1.30}$$

式中

$$x_n(j)=\frac{N}{C_N^nR_n}\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k)p_{n,k}C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j},\quad 1\leqslant n\leqslant N,1\leqslant j\leqslant n \tag{1.31}$$

证明 由(1.25)，(1.24)式及引理 1.9 与(1.15)式

$$\begin{aligned}X_n&=E(U_n|\mathscr{F}_n)\\&=\sum_{k=1}^{N}f(k)P(a_n=k,z_n=1|\mathscr{F}_n)+f(\infty)I_{[z_n=0]}\\&=\frac{N}{R_n}\sum_{k=1}^{N}f(k)p_{nk}\sum_{j=1}^{N}P(a_n=k|y_n=j)I_{(y_n=j,z_n=1)}-f(\infty)I_{[z_n=0]}\\&=\frac{N}{C_N^nR_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k)p_{n,k}C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}I_{(y_n=j,z_n=1)}+f(\infty)I_{[z_n=0]}\end{aligned}$$

引理获证。

引理 1.11 若$\forall\ 1\leqslant k\leqslant N$

$$p_{1,k}=p_{2,k}=\cdots=p_{N,k}=p_k \tag{1.32}$$

则

$$x_n(j)=\frac{j}{n+1}x_{n+1}(j+1)+(1-\frac{j}{n+1})x_{n+1}(j)$$

证明 记 $\rho(\kappa)=Np_k/\sum_{k=1}^{N}p_k$，则

$$x_n(j)=\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k)\rho(k)C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}/C_N^n$$

$$=\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k)\rho(k)C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}/C_N^n(\frac{k-j}{N-n}$$

$$+\frac{N-n-k+j}{N-n})$$

$$=\frac{j}{n+1}x_{n+1}(j+1)+(1-\frac{j}{n+1})x_{n+1}(j)$$

引理 1.12 1)若

$$f(1)p_{n,1}\geqslant f(2)p_{n,2}\geqslant\cdots\geqslant f(N)p_{n,N},\quad 1\leqslant n\leqslant N \tag{1.33}$$

则

$$x_n(j+1)\leqslant x_n(j),\quad 1\leqslant n\leqslant N,1\leqslant j\leqslant n-1 \tag{1.34}$$

2)若(1.32)(1.33)成立，则

$$x_n(j)\leqslant x_{n+1}(j),\quad 1\leqslant n\leqslant N,1\leqslant j\leqslant n-1 \tag{1.35}$$

证明

1) $x_n(j+1)$

$$=\frac{N}{C_N^nR_n}\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k+1)p_{n,k+1}C_k^jC_{N-k-1}^{n-j-1}$$

$$=\frac{N}{C_N^nR_n}\cdot\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k+1)p_{n,k+1}(C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}+C_{k-1}^{j}C_{N-k}^{n-j}-C_k^jC_{N-k-1}^{n-j})$$

由(1.33)，易知上式第一项小于等于

$$\frac{N}{C_N^nR_n}\sum_{k=j}^{N-n+j)}f(k)p_{n,k}C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}=x_n(j)$$

剩下的部分小于等于

$$\sum_{k=j}^{N-n+j} f(k)p_{n,k}(C_{k-1}^{j}C_{N-k}^{n-j}-f(k+1)p_{n,k+1}C_{k}^{j}C_{N-k-1}^{n-j})=0$$

从而 $x_n(j+1)\leqslant x_n(j),1\leqslant n\leqslant N,1\leqslant j\leqslant n-1$.

2)由引理 1.11 及(1.34)式,$\forall\ 1\leqslant j\leqslant n-1,1\leqslant n\leqslant N$,有

$$x_n(j)\leqslant\frac{j}{n+1}x_{n+1}(j)+(1-\frac{j}{n+1})x_{n+1}(j)=x_{n+1}(j)$$

引理证毕。

注 1 如果用

$$\frac{p_{n,k}}{R_n}\leqslant\frac{p_{n+1,k}}{R_{n+1}},\quad 1\leqslant k\leqslant N \tag{1.32$'$}$$

代替(1.32)式,则可得

$$x_n(j)\leqslant\frac{j}{n+1}x_{n+1}(j+1)+(1-\frac{j}{n+1})x_{n+1}(j)$$

并且若(1.32)′与(1.33)成立同样可推出(1.35)式。

注 2 如果(1.32)式成立,则(1.33),(1.34),(1.35)三式相互等价。

事实上,当(1.32)式成立时,由(3.12)可得

$$x_N(j+1)=f(j+1)Np_{N,j+1}/\sum_{k=1}^{N}p_{N,k}$$

$$\leqslant f(j)p_{N,j}\cdot N/\sum_{k=1}^{N}p_{N,k}=x_N(j)$$

再由后退归纳法,若对某 $n,x_n(j+1)\leqslant x_n(j)$,则由引理 1.11,

$$x_{n-1}(j+1)=\frac{j+1}{n}x_n(j+2)+(1-\frac{j+1}{n})x_n(j+1)$$

$$\leqslant\frac{j}{n}x_n(j+1)+(1-\frac{j}{n})x_n(j)=x_{n-1}(j)$$

(1.34)⇒(1.35)的证明如前,往证(1.35)⇒(1.33)。因

$$x_N(j)=f(j)p(j)$$

$$x_{N-1}(j)=\frac{j}{N}x_N(j+1)+(1-\frac{j}{N})x_N(j)$$

$$=\frac{j}{N}f(j+1)p(j+1)+(1-\frac{j}{N})f(j)p(j)$$

$$\leqslant f(j)p(j)$$

所以

$$f(j+1)p(j+1)\leqslant f(j)p(j)$$

从而对一切 $1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant n\leqslant N$

$$f(j+1)p_{n,j+1}\leqslant f(j)p_{n,j}$$

现在来求一般报酬函数的可拒绝秘书问题的最优规则。

定理 1.13 设(1.33)式成立,则最优规则是

$$S_C=\inf\{1\leqslant n\leqslant N-1: y_n\leqslant s_n, z_n=1 \text{ 或 } V_{n+1}\leqslant f(\infty), z_n=0\} \tag{1.36}$$

式中

$$s_n=\sup\{1\leqslant j\leqslant n: x_n(j)\geqslant V_{n+1}\},\quad n=N-1, N-2,\cdots,1 \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}V_n=&\frac{1}{nC_N^n}\sum_{j=1}^{S_n}\sum_{k=j}^{N-n+j}f(k)p_{n,k}C_{k-1}^{j-1}C_{N-k}^{n-j}\\&+V_{n+1}(n-S_n)\frac{R_n}{nN}+(f(\infty)\vee V_{n+1}(1-\frac{R_n}{N})\\&\qquad 1\leqslant n\leqslant N-1\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$V_N=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f(j)P_{N,j}+f(\infty)(1-\frac{R_N}{N}) \tag{1.39}$$

这里约定 $\inf \Phi=N$, $\sup \Phi=0$,关于空指标集求和为 0.

证明 由引理 1.10 及后退归纳法

$$y_N=X_N=\sum_{j=1}^{N}\frac{N}{R_N}f(j)p_{N,j}I_{(y_N=j,z_N=1)}+f(\infty)I_{(z_N=1)}$$

注意到

$$\begin{aligned}&P(y_n=j,z_n=1)\\&=P(z_n=1)\cdot P(y_n=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}P(a_n=k)\cdot P(Z_N=1|a_n=k)\\&=\frac{R_n}{Nn}\end{aligned}$$

故

$$V_N = E\gamma_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(j) p_{N,j} + f(\infty)(1-\frac{R_N}{N})$$

令 s_n 如(1.37)，则由引理 1.12，对固定的 n，当 $j \leqslant n$，$x_n(j)$ 关于 j 不增，因而当 $1 \leqslant j \leqslant s_n$ 时，$x_n(j) \geqslant V_{n+1}$，而当 $s_n < j \leqslant n$ 时，$x_n(j) < V_{n+1}$

由后退归纳法可证 γ_n 与 $\mathscr{F}_{n-1}$ 独立，于是

$$\begin{aligned}\gamma_n &= X_n \vee E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n) \\ &= X_n \vee \gamma_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{S_n} x_n(j) I_{(y_n=j, z_n=1)} + V_{n+1} \sum_{j=S_n+1}^{n} I_{(y_n=j, z_n=1)} \\ &\quad + (f(\infty) \vee V_{n+1}) I(z_n=0)\end{aligned}$$

因此

$$V_n = \sum_{j=1}^{S_n} X_n(j)\frac{R_n}{nN} + V_{n+1}(n-S_n)\frac{R_n}{nN} + (f(\infty) \vee V_{n+1})(1-\frac{R_n}{N}) \tag{1.40}$$

于是最优规则

$$\begin{aligned}\sigma_1^Y &= \inf\{1 \leqslant n \leqslant N-1 ; x_n \geqslant V_{n+1}\} \\ &= \inf\{1 \leqslant n \leqslant N-1 ; y_n \leqslant S_n, z_n = 1 \text{ 或 } V_{n+1} \leqslant f(\infty), z_n = 0\} \\ &= S_C\end{aligned}$$

注 3 现在讨论带有费用的可拒绝秘书问题，也就是假定经理会面 n 次的费用为 $h(n)$，这里 $h(n)$ 为 n 的增函数，于是(1.24)式中 U_n 应为

$$\tilde{U}_n = f(Q_n) I_{(z_n=1)} + f(\infty) I_{(z_n=0)} - h(n)$$

(1.30)中 x_n 应改为

$$\tilde{x}_n = \sum_{j=1}^{n} (x_n(j) - h(n)) I_{(y_n=j, z_n=1)} + (f(\infty) - h(n)) I_{(z_n=0)}$$

记 $\tilde{x}_n(j) = x_n(j) - h(n)$，$\tilde{f}(\infty) = f(\infty) - h(n)$，于是在(1.33)成立的条件下，仍然有 $\tilde{x}_n(j+1) \leqslant \tilde{x}_n(j)$，$1 \leqslant n \leqslant N$，$1 \leqslant j \leqslant n-1$，于是

只要在(1.40)式中将 $x_n(j)$,$f(\infty)$分别换为 $\tilde{x}_n(j)$与 $\tilde{f}(\infty)$,将 s_n 换为相应的 $\tilde{s}_n$,则由定理 1.13 可知带费用问题的最优规则是

$$\tilde{S}_c = \inf\{1 \leqslant n \leqslant N-1 : y_n \leqslant \tilde{s}_n, z_n = 1 \text{ 或 } \tilde{V}_{n+1} \leqslant \tilde{f}(\infty), Z_n = 0\}$$

从(1.34)式出发,我们得到了最优规则 S_c,现在我们从(1.35)式出发,便可得到另一个最优规则 S_L.

定理 1.14 如(1.32)式成立,且 $f(1) \geqslant f(2) \geqslant \cdots \geqslant f(\infty)$,则最优规则为

$$S_L = \inf\{n \geqslant r_j^* : y_n \leqslant j, z_n = 1, 1 \leqslant j \leqslant d \text{ 或 } V_{n+1} \leqslant f(\infty), Z_n = 0\} \tag{1.41}$$

其中

$$r_j^* = \inf\{n \geqslant 1 : x_n(j) \geqslant V_{n+1}\} \tag{1.42}$$

$$d = \sup\{i \geqslant 1 : f(i) p_i N/R \geqslant V_N\} \tag{1.43}$$

V_N 同(1.39)。

$$V_n = \prod_{k=n}^{N-1} p(k) V_N + \sum_{u=k}^{N-1} q(u) \sum_{k=n}^{u-1} p(k) \tag{1.44}$$

$$p(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{dR}{N_n}, & n \geqslant r_d^* \\ 1 - \dfrac{lR}{N_n}, & r_l^* \leqslant n \leqslant r_{l+1}^* \\ 1, & n < r_1^* \end{cases} \tag{1.45}$$

$$q(n) = \begin{cases} \dfrac{R}{Nn} \sum_{j=1}^{d} x_n(j), & n \geqslant r_d^* \\ \dfrac{R}{Nn} \sum_{j=1}^{l} x_n(j), & r_l^* \leqslant n < r_{l+1}^* \\ 0, & n < r_1^* \end{cases} \tag{1.46}$$

证明 由(1.32)式,$R_1 = R_2 = \cdots = R_N \stackrel{\triangle}{=} R$,且由 $f(1) \geqslant f(2) \geqslant \cdots \geqslant f(N) \geqslant f(\infty)$,可知

$$V_{n+1} \geqslant V_N \geqslant \frac{1}{N} f(N) R + f(\infty)\left(1 - \frac{R}{N}\right) \geqslant f(\infty) \tag{1.47}$$

由后退归纳法

$$V_n=E(X_n\vee V_{n+1})$$

$$=E(\sum_{j=1}^{n}x_n(j)I_{(y_n=j,z_n=1)}+f(\infty)I_{(z_n=0)}\vee V_{n+1})$$

$$=V_{n+1}+\sum_{j=1}^{n}(x_n(j)-V_{n+1})^+\frac{R}{Nn}+(f(\infty)-V_{n+1})^+(1-\frac{R}{N})$$

$$=V_{n+1}+\sum_{j=1}^{d}(x_n(j)-V_{n+1})^+\frac{R}{Nn} \qquad (1.48)$$

这最后的等式是由于当 $j>d$ 时

$$x_n(j)\leqslant x_N(j)=\frac{N}{R}f(j)P(j)<V_N\leqslant V_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant V_1$$

以及(1.47)式. 令 r_j^* 如(1.42)式,则当 $n\geqslant r_d^*$ 时

$$V_n=(1-\frac{dR}{Nn})V_{n-1}+\sum_{j=1}^{d}x_n(j)\frac{R}{Nn};$$

当 $r_l^*\leqslant n\leqslant r_{l+1}^*$时

$$V_n=(1-\frac{lR}{Nn})V_{n-1}+\sum_{j=1}^{l}x_n(j)\frac{R}{Nn}$$

当 $n<r_1^*$ 时

$$V_n=V_{n+1}$$

引入 $P(n)$,$q(n)$如(1.45),(1.46)所给定,则

$$V_n=p(n)V_{n+1}+q(n),1\leqslant n\leqslant N-1$$

由此可解得 V_n 如(1.44)式所示,于是最优规则

$$\sigma_1^N=\inf\{n\geqslant 1:\sum_{j=1}^{n}x_n(j)I(y_n=j,z_n=1)+f(\infty)I_{(z_n=0)}\geqslant V_{n+1}\}$$

$$=\inf\{n\geqslant 1:\sum_{j=1}^{d}x_n(j)I(y_n=j,z_n=1)+f(\infty)I_{(z_n=0)}\geqslant V_{n+1}\}$$

$$=\inf\{n\geqslant r_j^*:y_n\leqslant j,z_n=1,1\leqslant j\leqslant d \text{ 或 } z_n=0 \text{ 且 } f(\infty)\geqslant V_{n+1}\}$$

$$=S_L$$

最后一个等式是由于从(1.34),(1.35)式知,当 $y_n\leqslant j$ 时

$$x_n(y_n)\geqslant x_n(j)\geqslant x_{r_j^*}(j)\geqslant V_{n-1}$$ 证毕

S_L 规则的具体实现就是：在 r_1^* 个人前只面试而不录取，当面试到 $r_1^*\leqslant n\leqslant r_2^*$ 时录用第一个相对最好者，如果录取不成功，则继续观察当 $r_l^*\leqslant n<r_{l+1}^*$时，遇到第一个相对名次者$\leqslant l$ 就录取；如此直到最后。

下面证明在定理 1.14 假设的条件下，它们是一致的。

定理 1.15　假设 $f(1)\geqslant f(2)\geqslant f(N)\geqslant\cdots\geqslant f(\infty)$，且(1.32)式成立，则 $S_c=S_L$。

证明　两个最优规则的表达中都有 $Z_n=0$，且 $f(\infty)\geqslant V_{n+1}$的部分，所以只要证明前一部分表达的一致性。

如 $S_c(\omega)=n$，则有某 $j\leqslant n$，使 $y_n(\omega)\leqslant j\leqslant S_n$，$Z_n=1$，$S_i$ 是使 $x_i(j)\geqslant V_{i+1}$成立的最大的 i，由 $S_n\geqslant j$，故 $x_n(j)\geqslant x_n(S_n)\geqslant V_{n+1}$，于是 $x_N(j)\geqslant X_n(j)\geqslant V_{n+1}\geqslant V_N$，所以 $1\leqslant j\leqslant d$，再由 r_j^* 的定义，$x_n(j)\geqslant V_{n-1}$ 可见 $n\geqslant r_j^*$，且 $y_n=j$，所以 $S_L(\omega)\leqslant n=S_c(\omega)$.

反之，如 $S_L(\omega)=n$，则 $n\geqslant r_j^*$，$y_n(\omega)\leqslant j\leqslant d$。由 r_j^* 的定义，$x_{r_j^*}(j)\geqslant V_{n-1}$，故 $x_n(j)\geqslant x_{r_j^*}(j)\geqslant V_{n+1}$，由 S_n 的定义知 $S_n\geqslant j$，于是 $y_n\leqslant j\leqslant S_n$，从而 $S_c(\omega)\leqslant n=S_L(\omega)$。$S_c=S_L$ 得证。

注 4　设 $f(1)=1$，$f(k)=0$，$2\leqslant k\leqslant\infty$，则

$$x_n(1)=\frac{np_1}{R}$$

$$x_n(2)=\cdots\quad=x_n(n)=0$$

$$x_n=P(a_n=1,z_n=1\,|\,\mathscr{F}_n)$$

这就是[9]所讨论的可拒绝的第一标准秘书问题，由(1.48)式

$$V_n=V_{n+1}+\frac{R}{Nn}\left(\frac{np_1}{R}-V_{n+1}\right)^+$$

令 $r_1^*=\inf\{n\geqslant 1:\frac{np_1}{R}\geqslant V_{n+1}\}$，则

$$V_n=\begin{cases}V_{n+1}+\dfrac{p_1}{N}-\dfrac{R}{Nn}V_{n+1}, & n\geqslant r\\ V_{n+1}, & n<r_1^*\end{cases}$$

解此差分方程便得

$$V_{n+1}=\begin{cases}\frac{p_1 n}{N-R}\{\prod_{k=n}^{N-1}(1+\frac{N-R}{Nk})-1\}, & r_1^*\leqslant n\leqslant N-1\\ Vr_1^*, & \end{cases} \tag{1.49}$$

$$r_1^*=\inf\{n\geqslant 1:\prod_{k=n}^{N-1}(1+\frac{N-R}{Nk})\leqslant\frac{N}{k}\} \tag{1.50}$$

利用初等不等式

$$(\frac{k+1}{k})^{1-R/N}<1+\frac{1-R/N}{k}<(\frac{k+1-R/N}{k-R/N})^{1-R/N}$$

及 r_1^* 的定义,可得

$$(\frac{N-R/N}{r_1^*-1-R/N})^{1-R/N}>\frac{N}{R}>(\frac{N}{r_1^*})^{1-R/N}$$

从而 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{r_1^*}{N}=\lim\limits_{N\to\infty}(R/N)^{\frac{1}{1-R/N}}$,只要右方极限存在。如果再假定 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$,则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{r_1^*}{N}=p^{\frac{1}{1-p}}$$

回忆(1.2)式

$$\lim_{N\to\infty}V^N=\lim_{N\to\infty}V_1=\lim_{N\to\infty}V_{r_1^*}$$

且

$$V_{r_1^*}=\frac{p_1}{N}+(1-\frac{R}{Nr_1^*})V_{r_1^*+1}$$

由(1.49),(1.50)式

$$\frac{p_1r_1^*}{N-R}\left[\frac{N/R}{1+\frac{N-R}{N(r_1^*-1)}}-1\right]\leqslant V_{r_1^*+1}\leqslant\frac{p_1r_1^*}{N-R}(\frac{N}{R}-1)$$

注意到 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{R}{N}=p$,所以

$$\lim_{N\to\infty}V^N=p_1p^{\frac{1}{1-p}}$$

注 5 设 $f(k)=-k, f(\infty)<-N, 1\leqslant k\leqslant N$，则得到第二标准下的可拒绝秘书问题，参见[10]。

注 6 在应用中“最好”的标准事实上是难以掌握的，所以提出选取一个较好的姑娘是合适的，然而“较好”是一个模糊集，比如第一名当然是“较好”的，第二名也是“较好”的，不过满意程度只是 0.9，第 3 名的满意程度是 0.6 等等，于是可以把“较好的姑娘”看成为一个模糊集，记为 $\tilde{A}=\{f(1)/1, f(2)/2, \cdots, f(N)/N\}$；这里 $f(\cdot)$ 是单调下降函数，取正值，称为隶属度或满意度函数，现在要找一个停止规则 t，使 $P(a_t\in\tilde{A})$ 最大。根据模糊集的概率计算，有

$$
\begin{aligned}
&P(a_t\in\tilde{A})\\
&=f(1)P(a_t=1)+f(2)P(a_t=2)+\cdots+f(N)P(a_t=N)
\end{aligned}
$$

如果我们要考虑可拒绝的模糊标准下的秘书问题且假定当录用不成功时的报酬为 $f(\infty)$，则应求 t，使得

$$\sum_{i=1}^{N} f(i)P(a_t=i, z_t=1)+f(\infty)P(z_t=0)$$

取极大值，这其实就是一般报酬函数下的秘书问题的模型。

§1.4 可招回的秘书问题

所谓可招回秘书问题就是指经理在第 n 步停止面试时，他可以不录用当前的姑娘而录用 n 前的姑娘，如果用 $q(r)$ 表示招回 n 前 r 个人的概率，显然 $q(r)=1$ 的问题是不值得研究的。

有关的最早文献是[14,15]，在那儿假定前 1 步或前 1 步至前 k 步的招回概率为 1，其它为 0。

YANG[16]在 1974 年研究了当前人不拒聘，且假定每位姑娘一经拒聘就再也不能招回，$q(r)$ 是不增函数的情形，特别讨论了 $q(r)=q$ 及 $q(r)=q^r(0<q<1, r>1)$ 的情形。

文献[17],[18]推广了 YANG 的研究,讨论了 $q(0)<1$ 及更为一般的招回概率系统 $(q(r))_{r=0}^{n-1}$ 的情形。

沿用前几节的记号,并引入相对最好者的位置函数:

$w_n=n-(a_1,\cdots,a_n)$ 中相对最好者的序号,如 $w_n=n-i$,表示 a_i 为 n 前相对最好者。

用 $Z_n=1$,表示 n 前相对最好者受聘;$Z_n=0$,表示 n 前相对最好者拒聘,假定:

1) $P(z_n=1|w_n=n-i)=q(n-i)$,$q(r)$ 单调不增,

2) 对 $\forall\ j>n$,$P(z_j=1|w_j=w_n+j-n,z_n=0)=0$,这表明每个拒聘的人,不能再受聘。

3) 除非 2)的情形,$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 相互独立,且 Z_n 与 $w_j(j\neq n)$,相互独立,$\mathscr{F}_n=\sigma(w_1,w_2,\cdots,w_n)$

引理 1.16 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是马氏链,且

$$P(w_{n+1}=0|w_n=n-i)=\frac{1}{n+1},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N-1 \tag{1.51}$$

$$P(w_{n+1}=n+1-i|w_n=n-i)=\frac{n}{n+1},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N-1 \tag{1.52}$$

$$P(w_n=n-i)=\frac{1}{n},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N \tag{1.53}$$

证明是初等的,留给读者。

下面称在第 n 步采用招回技术是指:在第 n 步录用当前及 n 前的相对最好者,如果招回不成功,则继续观察并采用某种不招回 n 前的最优规则 δ,令 $X_N=\sum_{i=1}^{n}P(a_i=1,z_n=1|\mathscr{F}_n)+P(z_n=0$,由 δ 得最好姑娘$|\mathscr{F}_n)$。

记

$\tilde{X}_k^n=P(n$ 步后继续到 k,不招回 n 及 n 前的人而得最好者$|\mathscr{F}_n)$

$$\tilde{\gamma}_n = \underset{t \in C_{n+1}}{\text{esssup}}\, E(\tilde{X}_t | \mathscr{F}_n)$$

因为这仍是有限问题，因此必存在不招回 n 前的最优规则 δ，使 $E(\tilde{X}_\delta^* | \mathscr{F}_n) = \tilde{\gamma}_n$，于是

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{N} q(n-j) + (1 - q(n-j))\tilde{\gamma}_{n,i}\right] I_{(w_n = n-j)} \tag{1.54}$$

式中，$\tilde{\gamma}_{n,j} = \tilde{\gamma}_n |_{w_n = n-j}$. X_n 有一个 Markov 表示，因此

$$\gamma_n \triangleq \underset{t \in C_n}{\text{esssup}}\, E(X_t | \mathscr{F}_n) = \underset{t \in C_n}{\text{esssup}}\, E(X_T | w_n)$$

显然 $\tilde{\gamma}_{n,j} \equiv 0$，记

$$x_{n,j} = X_n |_{w_n = n-j}$$

$$\gamma_{n,j} = \gamma_n |_{w_n = n-j}$$

$$x_n^0 = x_{n,n}$$

$$\gamma_n^0 = = \gamma_{n,n}$$

引理 1.17 $\forall\, i \leqslant n \leqslant N-1$

$$E(\gamma_{n+1} | w_n = n-j) = \frac{1}{n+1}\gamma_{n-1}^0 + \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1,j} \tag{1.55}$$

$$\tilde{\gamma}_{n,j} = \frac{1}{n+1}\gamma_{n+1}^0 + \frac{n}{n+1}\tilde{\gamma}_{n+1,j} \tag{1.56}$$

$$\tilde{\gamma}_n \triangleq \tilde{\gamma}_{n,j} = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{n}{j(j-1)}\gamma_j^0 \tag{1.57}$$

证明 $E(\gamma_{n+1} | w_n = n-j)$

$$= \frac{1}{P(w_n = n-j)}\left(\int_{[w_n = n-i, w_{n+1} = 0]} \gamma_{n+1} + \int_{[w_n = n-j, w_{n+1} = n+1-j]} \gamma_{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\gamma_{n+1}^0 + \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1,j}$$

由于

$$\tilde{\gamma}_{n,j} = E(\tilde{X}_\delta^* | w_n = n-j)$$

$$= \frac{1}{P(w_n = n-j)}\left(\int_{[w_n = n-j, w_{n+1} = 0]} \tilde{X}_\delta^* + \int_{[w_n = n-j, w_{n+1} = n+1-j]} \tilde{X}_\delta^*\right)$$

注意到，当 $w_{n+1}=0$ 时，招回 n 前也不会得到最好的姑娘，因此 $\widetilde{X}_k^n$ 与 $X_k(k\geqslant n+1)$是一致的，δ 是 $\widetilde{X}_k^n$ 中最优的，也是 $X_k(k\geqslant n+1)$ 中的最优规则，故 $E(\widetilde{X}_\delta^n\,|\,w_{n+1}=0)=E(X_\delta\,|\,w_{n+1}=0)=\gamma_{n+1}^0$；而当 $w_{n+1}=n+1-j$ 时，表明 δ 肯定不会取值 $n+1$，因之 $\widetilde{X}_k^n\equiv\widetilde{X}_k^{n-1}(k\geqslant n+2)$，故

$$E(\widetilde{X}_\delta^n\,|\,w_{n+1}=n+1-j)=E(\widetilde{X}_\delta^{n+1}\,|\,w_{n+1}=n+1-j)=\tilde{\gamma}_{n+1,j}$$

从而(1.56)可证，递推之便得(1.57)式。

下面认定，当 $n<m$ 时，$\sum_{i=m}^{n}=0$，$\prod_{i=m}^{n}=1$。

引理 1.18 记 $\pi_N^i=q(n-i)$，且记

$$\pi_n^i=\left(\frac{n-q(0)}{N}-\sum_{k=n+1}^{n-1}\frac{\pi_k}{k}\right)q(n-i)\vee\frac{n}{n+1}\pi_{n+1}^i \tag{1.58}$$

其中 $\pi_k=\pi_k^i$，则对任意的 $n\leqslant N-1$，有

$$\tilde{\gamma}_n=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\pi_k}{k} \tag{1.59}$$

$$E(\gamma_{n+1}\,|\,w_n=n-i)=\tilde{\gamma}_n+\frac{n}{n+1}\pi_{n+1}^i \tag{1.60}$$

$$x_{n,i}=\tilde{\gamma}_n+\left(\frac{n}{N}-\tilde{\gamma}_n\right)q(n-i) \tag{1.61}$$

$$\gamma_{n,i}=\tilde{\gamma}_n+\pi_n^i \tag{1.62}$$

$$\gamma_N^0=X_N^0=q(0) \tag{1.63}$$

证明 只须证明(1.59)(1.60)两式，由后退归纳法，因为

$$\gamma_N=X_N=\sum_{j=1}^{N}q(N-j)I_{(w_N=N-j)}$$

$$E(\gamma_N\,|\,w_{N-1}=N-1-j)=\frac{N-1}{N}q(N-j)+\frac{1}{N}q(0)$$

则

$$\gamma_{N-1,j}=x_{n-1,j}\vee E(\gamma_N\,|\,w_{N-1}=N-1-j)$$

$$=\frac{q(0)}{N}+\pi_{N-1}^{i}$$

而

$$\tilde{\gamma}_{N-1,j}=E(\tilde{x}_N^{N-1}|w_{N-1}=N-I-j)=\frac{q(0)}{N}$$

所以(1.59),(1.60)对 $n=N-1$ 成立,假定此两式对 $N-1,N-2,\cdots,n+1$ 成立,往证 n 之情形,由(1.57)

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_n&=\sum_{j=n+1}^{N}\frac{n}{j(j-1)}\gamma_j^0=\sum_{j=n+1}^{N}\frac{n}{j(j-1)}(\tilde{\gamma}_j+\pi_j)\\&=\sum_{j=n+1}^{N}\frac{n}{j(j-1)}\pi_j+n\cdot\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\pi_k}{k}\cdot\sum_{j=n+1}^{k-1}\frac{1}{j(j-1)}\\&=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\pi_k}{k}\end{aligned}$$

从 $\tilde{\gamma}_n=\tilde{\gamma}_{n+1}+\frac{\pi_{n+1}}{n+1}$ 及(1.55)式

$$\begin{aligned}E(\tilde{\gamma}_{n+1}|w_n=n-i)&=\frac{1}{n+1}\gamma_{n+1}^0+\frac{n}{n+1}\gamma_{n+1,i}\\&=\frac{1}{n+1}(\tilde{\gamma}_{n+1}+\pi_{n+1})+\frac{n}{n+1}(\tilde{\gamma}_{n+1}+\pi_{n+1}^{i})\\&=\tilde{\gamma}_n+\frac{n}{n+1}\pi_{n-q}^{i}\end{aligned}$$

所以

$$\gamma_{n,i}=X_{n,i}\vee E(\gamma_{n+1}|w_n=n-i)=\tilde{\gamma}_n+\pi_n^{i}$$

现在讨论在不同的招回概率系统 $\{q(r)\}$ 下的最优停止规则。

定理 1.19 设 $q(0)=q\leqslant1$,而对 $r\geqslant1,q(r)=p<q$ 则

1) 对一切 $i<n\leqslant N-1$

$$E(\gamma_{n+1}|w_n=n-j)>X_{n,j}\qquad(1.64)$$

这表明最优规则必须是停止在相对最好的位置上。

2) 存在一个整数 $s=s(N,P,q)$,最优规则一定不停在前 $s-1$ 步。

3) 当 $q<1$ 时,s 是满足下式的最小正整数 n

$$\prod_{k=s}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right) \leqslant [q-p(1-q)]/q^2 \qquad (1.65)$$

当 $q=1$ 时

$$s=\inf\{n \geqslant r^*: 1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1} \geqslant p\} \qquad (1.66)$$

其中

$$r^*=\inf\{n\geqslant 0: 1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\geqslant 0\} \qquad (1.67)$$

4）最优规则是

$$\sigma=\inf\{k\geqslant S: w_k=0\}$$

5）当 $q<1, s=1$ 时，选到最好姑娘的概率

$$V=\frac{q}{N}\prod_{k=1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right) \qquad (1.68)$$

当 $q<1, s\geqslant 2$ 时

$$V=\frac{(s-1)p}{N}+\frac{s-1}{N}q(1-q)^{-1}\left[\prod_{k=s-1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right)-1\right] \qquad (1.69)$$

当 $q=1, s\geqslant 2$ 时

$$V=\frac{s-1}{N}\cdot\sum_{k=s}^{N}\frac{1}{k-1}+\frac{(s-1)p}{N} \qquad (1.70)$$

当 $q=1, s=1$ 时

$$V=\frac{1}{N} \qquad (1.71)$$

证明 1）用后退归纳法来证明，当 $n=N-1, i<N-1$ 时

$$\pi_{N-1}^{i}=\frac{N-1-q}{N}p \vee \frac{N-1}{N}p=\frac{N-1}{N}p$$

所以，$E(y_N|w_{N-1}=N-1-i)>x_{N-1,i}$，如果(1.64)对 $N-1, N-2,$ $\cdots n+1$ 成立，即$\forall\ i<n+1, \pi_{n+1}^{i}=\frac{n+1}{N}p$，则

$$\pi_N^{i}=\left(\frac{n-q}{N}-\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{\pi_k}{k}\right)p \vee \frac{n}{N}p=\frac{n}{N}p$$

从而 $\qquad E(y_{n-1}|w_n=n-i)>x_{n,i}, i<n$

(1.64)式得证；

2) 由 $q(r)=p(r>1)$，有 $\pi_j^1=\pi_j^2=\cdots=\pi_j^{r-1}=\frac{jp}{N}$. 另一方面

$$x_j^0\geqslant\gamma_j^0 \Leftrightarrow (\frac{j}{N}-\tilde{\gamma}_j)q\geqslant\frac{j}{n}p \Leftrightarrow \frac{j}{N}(q-p)\geqslant q\cdot\tilde{\gamma}_j$$

上述不等式左边随 j 单调增加，右边随 j 单调减少，因此必有唯一的 s，使当 $j\geqslant s$ 时，$x_j^0\geqslant\gamma_j^0$，由于对一切 $i<n$，$E(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)>X_{n,i}$，故最优规则必须停在相对最好者的位置上，从而最优规则

$$\begin{aligned}\sigma&=\inf\{k\geqslant1:X_k\geqslant\gamma_k\}=\inf\{k\geqslant1:x_k^0\geqslant\gamma_k^0\}\\&=\inf\{k\geqslant s:w_k=0\}\end{aligned}\tag{1.72}$$

2)，4)得证。

3) 设 $q<1$，由 s 的定义，可见对 $n\geqslant s$

$$\pi_n=(\frac{n-q}{N}-\sum_{k=n+1}^{n-1}\frac{\pi_K}{k})q\tag{1.73}$$

所以

$$\pi_n=\pi_{n+1}(1-\frac{q}{n+1})-\frac{q}{N},\quad n\geqslant S$$

解此差分方程，得

$$\pi_n=\frac{nq}{N(1-q)}[1-\prod_{k=n}^{N-1}(1+\frac{1-q}{k})q]\tag{1.74}$$

于是

$$\begin{aligned}s&=\inf\{n\geqslant1:\pi_n\geqslant\frac{n}{N}\ p\}\\&=\inf\{n\geqslant1:\prod_{k=n}^{n-1}(1+\frac{1-q}{k})\leqslant\frac{q-p(1-q)}{q^2}\}\end{aligned}$$

(1.66)式获证。

设 $q=1$，由(1.73)式

$$\pi_n=\frac{n}{N}(1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1})$$

于是

$$S=\inf\{n\geqslant1:\pi_n\geqslant\frac{n}{N}\ p\}$$

$$=\inf\{n\geqslant r^*:1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\geqslant p\}$$

其中

$$r^*=\inf\{n\geqslant 0:1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\geqslant 0\}$$

5）由(1.72)式，最优规则是跳过前面 $s-1$ 个人，停在此后的第一个相对最好者的位置上，招回并录用相对最好者，实际上就是录用当前的人。如果录用受拒，则继续观察，并采用 δ 来挑选秘书，而且从上面的证明可知，δ 规则就是录用每一个新的相对最好者。

如果 $q<1$ 且对一切 $k\geqslant s, w_k\neq 0$ 表明最好的姑娘在前面 $s-1$ 个人去，此时如 $s\geqslant 2$，则

$$\begin{aligned}
V&=EX_\sigma\\
&=\sum_{k=s}^{N}\int_{\sigma=k}X_k+p\cdot P(w_k\neq 0,k\geqslant s)\\
&=\sum_{k=s}^{N}\int_{(w_1\neq 0,\cdots,w_{k-1}\neq 0,x_k=0)}x_k^0+\frac{p(s-1)}{N}\\
&=\sum_{k=s}^{N}x_k^0\frac{s-1}{k(k-1)}+\frac{p(s-1)}{N}
\end{aligned}$$

记 $H_k=\prod_{l=k}^{N-1}(1+\frac{1-q}{l})$，由(1.73)，(1.61)，(1.59)，(1.74)

$$x_k^0=\frac{kq}{N}+\tilde{\gamma}_k(1-q)=\frac{k}{N}-\frac{\pi_k(1-q)}{q}=\frac{k}{N}\cdot H_kq$$

又

$$\begin{aligned}
H_k-1&=\frac{k+1-q}{k}H_{k-1}-1\\
&=\cdots=(1-q)\cdot(\sum_{j=k+1}^{N-1}\frac{H_j}{j-1}+\frac{1}{N-1})
\end{aligned}$$

因此

$$EX_\sigma=\sum_{k=s}^{N-1}\frac{s-1}{n}\cdot\frac{H_kq}{k-1}+\frac{(s-1)q}{N(N-1)}+\frac{p(s-1)}{N}$$

$$=\frac{(s-1)q}{N}\left\{\frac{H_{k-1}-1}{1-q}-\frac{1}{N-1}\right\}+\frac{(s-1)q}{N(N-1)}+\frac{(s-1)p}{N}$$

$$=\frac{(s-1)p}{N}+\frac{(s-1)q}{N}\cdot\frac{H_k-1}{1-q}$$

(1.69)式获证。

设 $s=1$，则因为 $w_1=0$，故 $\sigma\equiv1$，此时

$$V=EX_\sigma=X_1^0P(w_1=0)=\frac{1}{N}H_1q$$

此即(1.68)式。

设 $q=1,s=1$，则

$$V=EX_0=X_1^0P(w_1=0)=\frac{1}{N}$$

设 $q=1,s\geqslant2$，则

$$V=EX_v=\sum_{i=s}^{N}x_i^0\frac{s-1}{k(k-1)}+\frac{(s-1)p}{N}$$

$$=\frac{s-1}{N}\cdot\sum_{K=s}^{N}\frac{1}{k-1}+\frac{(s-1)p}{N}$$

定理证毕。

定理 1.20 对于一般的招回概率系统 $(q(r))_{r=0}^{N-1}$，最优规则是直到全部候选人考察完再录用的充要条件是

$\forall\ r\leqslant N-1$

$$\frac{q(r+1)}{q(r)}>\frac{N-1-q(0)}{N-1}\tag{1.75}$$

证明 必要性。由于此时 $E(y_N|w_{N-1}=N-1-i)>X_{N-1},i$，由(1.60)及(1.61)式可见

$$\frac{N-1}{N}q(N-i)>\frac{N-1-q(0)}{N}q(N-1-i),\quad i\leqslant N-1$$

此即(1.75)式。

充分性。用后退归纳法，如果(1.75)成立，取 $r=N-1$，则它表明 $E(y_N|w_{N-1}=N-1-i)>X_{N-1,i},i\leqslant N-1$，如果由对 $k=N-1,N-2,\cdots,n+1$ 成立(1.75)式可推出 $E(y_{k+1}|W_k=k-j)>X_k$，由(1.

57),(1.60)及(1.61)式可知$\forall\ k=N-1,N-2,\cdots,n+1$有

$$\sum_{j=k}^{N-1}\frac{1}{j(j+1)}\gamma_{j+1}^{0}>\frac{1}{N}(1-\frac{q(N-i)}{q(k-i)})$$

为证它对$k=n$成立,只须证

$$\frac{1}{n(n+1)}\gamma_{n+1}^{0}\geqslant\frac{1}{N}(\frac{q(N-i)}{q(n+1-i)}-\frac{q(N-i)}{q(n-i)})$$

由归纳假设可知$\pi_k=\frac{k}{N}q(N-k)$,于是

$$\gamma_{n+1}^{0}=\frac{q(0)}{N}+\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{\pi_k}{k}+\pi_{n+1}$$

$$=\frac{q(0)}{N}+\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{q(N-k)}{N}+\frac{n+1}{N}q(N-n-1)$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n+1)}\gamma_{n+1}^{0}\\ &\geqslant\frac{1}{n(n+1)}q(N-n-1)\\ &\geqslant\frac{q(0)}{n(n+1)}\cdot(1-\frac{q(0)}{N-1})^{N-n-1}\\ &\geqslant\frac{q(0)}{n(n+1)}\cdot\frac{n}{N-1}\\ &\geqslant\frac{q(0)}{N(N+1)}\\ &\geqslant\frac{1}{N}\frac{q(N-i)}{q(N+1-i)}\cdot(1-\frac{q(n+1-i)}{q(n-i)})\\ &\geqslant\frac{q(N-i)}{N}\{\frac{1}{q(n+1-i)}-\frac{1}{q(n-i)}\}\end{aligned}$$

证毕

定理 1.21 对于一般的招回概率系统$(q(r))_{r=0}^{N-1}$,$q=q(0)\leqslant 1$,存在常数$S=S(N,q,0)$,最优规则是s前不停止,如果

$$\frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{N-1-q(0)}{N-1},\quad r\leqslant N-1 \tag{1.76}$$

令

$$\tau=\inf\{n\geqslant s;\frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}\} \tag{1.77}$$

这里

$$b(n)=\begin{cases} q\cdot\prod_{k=\tau}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right), & q<1 \\ \sum_{j=n-1}^{N}\frac{1}{j-1}, & q=1 \end{cases} \tag{1.78}$$

如果在 τ 前没有录取到，最优规则是从 τ 时开始录用每个新的相对最好者。

证明 由于

$$E(\gamma_{n+1}\mid w_n=n-i)-x_{n,i}=\frac{n}{n+1}\pi_{n+1}^{i}-\left(\frac{n}{N}-\bar{\gamma}_n\right)q(n-i)$$

令 $S=\inf\{n\geqslant1:\frac{n}{N}-\bar{\gamma}_n\geqslant0\}$，它是常数，在 S 前 $E(\gamma_{n+1}\mid w_n=n-i)>X_{n,i}$，所以不应该停止，往证第二个结论：

1）$0<q<1$ 时，将证明对一切 $\tau\leqslant k\leqslant N-1,i\leqslant k$ 有 $x_{k,i}\geqslant\gamma_{k,i}$，由(1.76)式，对 $k=n-1$，上式是成立的，如果对一切 $\tau<k=n+1,n+2\cdots N-1,i\leqslant k$，有 $x_{k,i}\geqslant\gamma_{k,i}$且 $\bar{\gamma}_k=\frac{k(b(k)-q)}{N(1-q)}$，则 $\pi_k^i=(\frac{K}{N}-\bar{\gamma}_k)q(k-i)$，$\gamma_k^0=x_k^0=\frac{kb(k)}{N}$. 所以由(1.56)式

$$\bar{\gamma}_{k-1}=\frac{1}{k}(\gamma_k^i+(k-1)\ \bar{\gamma}_k)=\frac{(k-1)(b(k-1)-q)}{N(1-q)}$$

因而

$$\begin{aligned}
&x_{k-1,i}\geqslant\gamma_{k-1,i}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{k-1}{N}-\bar{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geqslant\frac{k-1}{k}\pi_k^i\\
\Leftrightarrow\ &\frac{q(k-i)}{q(k-1-i)}\leqslant\frac{1-b(k-1)}{1-b(k)}
\end{aligned}$$

易知$\frac{1-b(k)}{1-b(k+1)}$对于 $k>\tau$ 是单调增的，所以对一切 $n\geqslant\tau$

$$\frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}$$

从而对一切 k

$$x_{k,i}\geqslant\gamma_{k,i}$$

2) $q=1$ 时，若 $n\geqslant\tau$，则

$$\pi_n=\frac{n}{N}-\bar{\gamma}_n$$

$$\gamma_n^0=\bar{\gamma}_n+\pi_n=\frac{n}{N}$$

$$\bar{\gamma}_n=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{n}{k(k-1)}\cdot\frac{k}{N}=\frac{n}{k}\sum_{K=n+1}^{N}\frac{1}{k-1}$$

而当 $x_{k,i}-y_{k,i}\geqslant 0$，则

$$x_{k-1,i}-y_{k-1,i}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{k-1}{N}-\bar{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geqslant\frac{k-1}{k}\pi_k^i$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{k-1}{N}-\bar{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geqslant\left(\frac{k-1}{N}-\frac{k-1}{k}\bar{\gamma}_k\right)q(k-i)$$

$$\Leftrightarrow\frac{q(k-i)}{q(k-1-i)}\leqslant\frac{(1-b(k-1)}{(1-b(k))}$$

易见 $S\leqslant\tau$，所以

$$\tau=\inf\{n\geqslant s:\frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}\}$$

由于对一切 $n\geqslant\tau$，$x_{n,i}\geqslant y_{n,i}$，因此 $\pi_n=(\frac{n}{N}-\bar{\gamma}_n)q$. 由 S 的定义

$$S=\inf\{n\geqslant 1:\frac{n}{N}-\bar{\gamma}_n\geqslant 0\}=\inf\{n\geqslant 1:\pi_n\geqslant 0\}=s(N,q,0)$$

由于 $x_i^0\geqslant x_{n,i}$，当停在 τ 而录用受拒时，应该继续观察并录用每个相对最好者，这是因为由一般理论，最优规则

$$\sigma_1=\inf\{n\geqslant 1:X_n\geqslant\gamma_n\}=\inf\{n\geqslant s:X_n\geqslant\gamma_n\}=\inf\{\tau>n\geqslant s:X_n\geqslant\gamma_n\}$$

上述规定，$\inf\Phi=\tau$，证毕。

读者可应用我们的定理，对 $q(0)=1$[16]以及 $q(r)=qp^r$，$0<p<q<1$ 的情形做具体的讨论[18]。

第二章 一般理论

第一章讨论了有限情形，证明了

$$\gamma_n^N = X_n \vee E(\gamma_{n+1}^N | \mathscr{F}_n) \tag{1.6}$$

$$\sigma_n^N = \inf\{i \geqslant n; x_i \geqslant \gamma_i^N\} \tag{1.8}$$

是 C_n^N 中最优规则，且

$$E(X_{\sigma_n^N} | \mathscr{F}_n) = \gamma_n^N \tag{1.9}$$

这里(1.6)式称为别尔曼方程，它是动态规划一般理论中的重要结果，(1.6)式还是选择形如(1.8)最优规则的根据，而(1.9)式表明了最优停止规则的特征，这些对于一般情形的研究提供了重要的提示。

今后我们采用下面的记号。

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个完备的概率空间，$(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一列递增的子 σ 代数，其中 $\mathscr{F}_0=(\Omega,\Phi)$，有时还需考虑 $\mathscr{F}_\infty$，此时 $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}_\infty \subseteq \mathscr{F}$. 设 $\{X_n\}$ 是报酬函数序列，它是可测的随机变量，$n=1,2,\cdots$. 如果 X_∞ 有定义，则假定为 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的，称 $\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 或 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_{n\leqslant\infty}$ 为随机序列，一个取值于 $\{1,2\cdots,+\infty\}$ 的随机变量 t. 如果对一切自然 n，$\{t=n\}\in\mathscr{F}_n$(它等价于 $\{t\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n$). 则称它为广义停止规则(简称为广义规则)；如果它还满足 $P(t<\infty)=1$，则称为停止规则(简称为规则)，两者统称为停时，全体规则记为 $\mathscr{F}$，全体广义规则记为 $\overline{\mathscr{F}}$，记

$$\overline{C}_n = \{t \in \overline{\mathscr{F}} \text{ 且 } t \geqslant n.\ EX_t^- < \infty\}$$

$$C_n = \overline{C}_n \cap \mathscr{F}$$

$\overline{C}=C_1, C=C_1$；称

$$\bar{\gamma}_n = \underset{t\in \overline{C}_n}{\text{esssup}} E(X_t|\mathscr{F}_n), \gamma_n = \underset{t\in C_n}{\text{esssup}} E(X_t|\mathscr{F}_n)$$

为报酬函数 X_n 的 Snell 包，且 $\gamma_\infty \triangleq \overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma_n$，称

$$\overline{V}_n = \sup_{t\in \mathscr{F}} EX_t$$

$$V_n = \sup_{t\in C_n} EX_t$$

为报酬序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}$在$\overline{C}_n(C_n)$上的值。记

条件 A_1：$E\sup_{t\in C_n} X<\infty$

条件 A_2：$X_\infty \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$

§2.1 广义最优规则的性质[20]

定义2.1 称 $\tau\in\overline{\mathscr{F}}$ 为 n 可取的，如果

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_j) \geqslant X_j, \quad \tau > j \geqslant n \tag{2.1}$$

成立；如果

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_j) > X_j, \quad \tau > j \geqslant n \tag{2.2}$$

则称 τ 为严格 n 可取的，特别简称1可取（严格1可取）为可取（相应地，严格可取）。

引理2.1 $\forall\ t\in\overline{C}$ 存在严格可取的 $t'\in\overline{C}$ 使 $t'\leqslant t$，且

$$EX_{t'} \geqslant EX_t \tag{2.3}$$

如果 t 不是可取的，则(2.3)式可取严格不等号。

证明 令 $t_1 = t \wedge \inf\{k\geqslant 1; E(X_t|\mathscr{F}_k) < X_k\}$

$$t' = t_1 \wedge \inf\{k\geqslant 1; E(X_{t_1}|\mathscr{F}_k) \leqslant X_k\}$$

则易知 t_1, t'，都是广义规则，且 $t'\leqslant t_1\leqslant t$，且

$$(t_1 = n)$$
$$= (t = n) \bigcap \{E(X_t|\mathscr{F}_k) \geqslant X_k, k = 1,2,\cdots,n-1\}$$

$$\bigcup (t > n) \cap \{E(X_t|\mathscr{F}_k) \geqslant X_k, k = 1,2,\cdots,n-1\}$$
$$\cap (E(X_t|\mathscr{F}_n) < X_n)$$
$$\triangleq (t = n) \cap B \bigcup (t > n) \cap C \tag{2.4}$$

$$(t' = n)$$
$$= (t_1 = n) \cap \{E(X_{t1}|\mathscr{F}_k) > X_k, k = 1,2,\cdots,n-1\}$$
$$\bigcup (t_1 > n) \cap \{E(X_{t1}|\mathscr{F}_k) > X_k, k = 1,2,\cdots,n-1\}$$
$$\cap (E(X_{t1}|\mathscr{F}_n) \leqslant X_n)$$
$$\triangleq (t_1 = n) \cap D \bigcup (t_1 > n) \cap E \tag{2.5}$$

对某个 $k \geqslant 0$，设 A 是 $\mathscr{F}_k$ 可测的，$P(A) > 0$，$A \subset (t' > k)$，则

$$\int_A X t' = \sum_{k < n \leqslant \infty} \int_{A \cap (t' = n)} X_n$$
$$\geqslant \sum_{k < n \leqslant \infty} \int_{A \cap (t_1 = n) \cap D} X_{t_1} + \int_{A \cap (t_1 > n) \cap E} X_{t_1}$$
$$= \sum_{k < n \leqslant \infty} \int_{A \cap (t' = n)} X_{t_1}$$
$$= \int_A X_{t_1} \tag{2.6}$$

而由 t' 的定义可见

$$(t' > k) \subset (t_1 > k) \cap \{E(X_{t_1}|\mathscr{F}_k) > X_k\}$$

于是
$$\int_A X_{t_1} > \int_A X_k \tag{2.7}$$

联合(2.6)及(2.7)式，则 $\forall A \subset (t' > k)$，$P(A) > 0$，有

$$\int_A X_{t'} > \int_A X_k$$

此即 $\int_A E(X_{t'}|\mathscr{F}_k) > \int_A X_k$，这表明 t' 是严格可取的，类似于(2.6)，我们可证 $\forall A \subset (t_1 > k)$，$P(A) > 0$ 有

$$\int_A X_{t_1} \geqslant \int_A X_t \tag{2.8}$$

取 $k=0$，在(2.6)及(2.8)式分别取 $A=\Omega$，则 $EX_{t'} \geqslant EX_{t_1} \geqslant EX_t >$

$-\infty$,(2.3)式获证，且 $t'\in\bar{C}$

如果 t 不是可取的，则存在集合 E, $P(E)>0$，及最小的 k，使得在 E 上 $E(X_t|\mathscr{F}_k)<X_k$，于是在 E 上 $t>k=t_1$，从而

$$\int\limits_{(t_1=k)} X_{t_1}=\int\limits_{(t=k)\cap B} X_t+\int\limits_{(t>k)\cap C} X_k>\int\limits_{(t=k)\cap B} X_t+\int\limits_{(t>k)\cap C} X_t=\int\limits_{(t_1=k)} X_t$$

因此，$EX_{t'}\geqslant EX_{t_1}>EX_t$.

注1　如果 $t\in\bar{C}_n$，则稍加修改便可证明：存在严格 n 可取的 $t'\in\bar{C}_n$, $t'\leqslant t$，且

$$E(X_{t'}|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n)$$

如果 t 不是 n 可取的，上式取严格的不等号。

注2　如果 $t\in C_n$，则引理2.1中的 $t'\in C_n$.

引理2.2　如果 τ 是最优的广义规则，则 τ 必是可取的。

证明　如果 τ 最优但非可取，则由引理 2.1，必存在严格可取的 $t'\in\bar{\mathscr{T}}$. 使 $EX_{t'}>EX_\tau$，矛盾。

上述引理给出了 τ 为最优广义规则的必要条件，下面的引理指出比可取的广义规则为小的广义规则是不好的。

引理2.3　设 t 是可取的广义规则，如果 $t'\in\bar{\mathscr{T}}$, $P(t'\leqslant t)=1$ 则 $EX_t\geqslant EX_{t'}$；如果 t 是严格可取的广义规则，$P(t'\leqslant t)=1$ 且 $P(t'<t)>0$，则 $EX_t>EX_{t'}$.

证明

$$\begin{aligned}EX_t&=\sum_{1\leqslant n\leqslant\infty}\Big(\int\limits_{(t'=n,t=t')}X_t+\int\limits_{(t'=n,t'<t)}X_t\Big)\\&\geqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant\infty}\Big(\int\limits_{(t'=n,t=t')}X_{t'}+\int\limits_{(t'=n,t'<t)}X_n\Big)\\&=\sum_{1\leqslant n\leqslant\infty}\int\limits_{(t'=n)}X_{t'}=EX_{t'}\end{aligned}$$

如果 t 是严格可取的，且 $P(t'<t)>0$，则上述不等号必在某一 n 处取严格的形式，从而 $EX_t>EX_{t'}$.

由此可见，比严格可取为小的广义规则肯定不是最优的。

引理2.4　设 t_1, t_2 都是(严格)可取的广义规则,则 $t=t_1 \vee t_2$ 也是(严格)可取的广义规则,且 $EX_t \geqslant EX_{t_1} \vee EX_{t_2}$.

证明　首先 $(t=n)=(t_1=n)\cap(t_2\leqslant n)\cup(t_1\leqslant n)\cap(t_2=n)\in\mathscr{F}_n$,可见 t 是停时。设 $A\in\mathscr{F}_n$, $A\subseteq(t>n)\cap(t_1\leqslant n)$ 且 $P(A)>0$,则

$$\int_A X_t=\int_A X_{t_2}(>)\geqslant\int_A X_n \tag{2.9}$$

类似地,如 $A\in\mathscr{F}_n$, $A\subseteq(t>n)\cap(t_2\leqslant n)$, $P(A)>0$,则

$$\int_A X_t=\int_A X_{t_1}(>)\geqslant\int_A X_n \tag{2.10}$$

设 $A\in\mathscr{F}_n$, $P(A)>0$, $A\subset(t_1>n)\cap(t_2>n)$,则

$$\int_{A\cap(t_2>t_1)} X_t=\sum_{n<k\leqslant\infty}\int_{A\cap(t_2>k=t_1)} X_{t_2}$$

$$(>)\geqslant\sum_{n<k\leqslant\infty}\int_{A\cap(t_2>k=t_1)} X_k=\int_{A\cap(t_1>t_1)} X_{t_1}$$

而

$$\int_A X_t=\int_{A\cap(t_1=t)} X_t+\int_{A\cap(t_2<t_1)} X_t$$

$$(>)\geqslant\int_{A\cap(t_1=t)} X_{t_1}+\int_{A\cap(t_1>t_1)} X_{t_1}(>1)\geqslant\int_A X_t \tag{2.11}$$

因为 $(t>n)=(t>n.\ t_1\leqslant n)\cup(t>n.\ t_2\leqslant n)\cup(t_1>n.\ t_2>n)$,由(2.9)～(2.11)式可知 t 是(严格)可取的。显然,$P(t_1\leqslant t)=P(t_2\leqslant t)=1$,由引理2.3便知 $EX_t\geqslant EX_{t_1}\vee EX_{t_2}$.

定义2.2　称 $S\in\overline{\mathscr{T}}$ 为半最优的,如果 $\forall\ t\in\overline{\mathscr{T}}$, $1\leqslant\infty<n$,在 $[S=n, t>n]$ 上有

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n \tag{2.12}$$

如果(2.12)式中不等号是严格的,则称 S 是严格半最优的。

引理2.5　设 A_1 条件成立,则若 τ 最优,τ 必为半最优。

证明　如果上述 τ 不是半最优的,则必存在 $t\in\overline{\mathscr{T}}$, $0<n<\infty$ 以及 $\mathscr{F}_n$ 可测集 $A\subseteq(\tau=n, t>n)$,使 $\int_A X_n<\int_A X_t$. 令

$$t' = \tau I_{A^c} + t I_A$$

则 $t' \in \overline{\mathscr{T}}$，而

$$EX_{t'} = \int_{A^c} X_\tau + \int_A X_t > \int_{A^c} X_\tau + \int_A X_n = EX_\tau$$

矛盾。

引理2.6 设 $S \in \overline{\mathscr{T}}$ 半最优，而 $t \in \overline{\mathscr{T}}$ 是严格可取的，则 $P(t \leqslant s) = 1$。

证明 记 $A_n = \{s = n, t > n\}$. 如对某个 $n \geqslant 1$，$P(A_n) > 0$，则由 S 是半最优的

$$\int_{A_n} X_s \geqslant \int_{A_n} X_t$$

又因为 t 是严格可取的

$$\int_{A_n} X_t > \int_{A_n} X_n$$

矛盾。所以对一切 $n \geqslant 1$，$P(A_n) = 0$，于是

$$P(t > s) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(t > n = s)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

下面是关于最优广义规则存在性的定理。

定理2.7 在 A_1, A_2 下，存在最优的广义规则。

证明 由 A_1 可知 $\overline{V} = \sup\limits_{t \in \overline{\mathscr{T}}} EX_\tau < \infty$，如果 $\overline{V} = -\infty$，则令 $\tau = 1$ 便是最优规则。不妨设 $\overline{V}$ 有限，由引理2.1及 $\overline{V}$ 的定义，对任何 $n \geqslant 1$，存在严格可取的 $t_n \in \overline{\mathscr{T}}$，使 $EX_{t_n} \geqslant \overline{V} - \dfrac{1}{n}$，令

$$\tau_1 = t_1, \tau_n = \tau_{n-1} \vee t_n, \cdots, \tau = \sup_n \tau_n$$

由引理2.4，每个 τ_n 都是严格可取的，且

$$EX_{\tau_n} \geqslant EX_{t_n} \geqslant \overline{V} - \frac{1}{n}$$

$\{\tau_n\}$ 是单调增加的

$$(\tau = k) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (\tau_n = k) \in \mathscr{F}_k$$

所以 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$，于是 $EX_\tau \leqslant \overline{V}$. 而由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= \lim_{n\to\infty} EX_{\tau_n} \leqslant E \varlimsup_{n\to\infty} X_{\tau_n} \\
&= E \varlimsup_{n\to\infty} X_{\tau_n} 1_{(\tau<\infty)} + E \varlimsup_{n\to\infty} X_{\tau_n} 1_{(\tau=\infty)} \\
&\leqslant EX_\tau 1_{(\tau<\infty)} + EX_\infty 1_{(\tau=\infty)} = EX_\tau = \overline{V}
\end{aligned}$$

所以 $EX_\tau = \overline{V}$，τ 便是最优的广义规则。

引理2.2及2.5给出了一个 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$ 为最优的必要条件，其实它还是充分的。

定理2.8 广义规则为最优的充要条件是 τ 为可取且半最优。

证明 只证充分性。设 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$ 是可取且半最优的，若 τ 不是最优的，则表明存在 $t' \in \overline{C}$，使 $EX_{t'} > EX_\tau$. 由引理2.1存在严格可取的 $t \in \overline{C}$，使 $EX_t \geqslant EX_{t'} > EX_\tau$，$\tau$ 是半最优的，而 t 是严格可取的，则由引理2.6，$P(t \leqslant \tau) = 1$. 另一方面，因为 τ 是可取的，故由引理2.3，知 $EX_\tau \geqslant EX_t > EX_t$，矛盾。所以 τ 最优。

下面提出最小半最优与最大可取广义规则的概念。

定义2.3 一个(严格)半最优的规则 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$，称为是最小(严格)半最优的，是指对任何(严格)半最优的规则 $t \in \overline{\mathscr{T}}$，有 $P(\tau \leqslant t) = 1$.

显然，如果最小(严格)半最优规则存在，那么在 a.s 相等的意义下是唯一的。

定理2.9 在 A_1、A_2 条件下，存在唯一的最小半最优广义规则 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$，且 τ 是最小半最优当且仅当 τ 最优且严格可取。

证明 由定理2.7及引理2.1可知存在严格可取的 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$ 为最优的，因而它是半最优的。由引理2.6对每个半最优的 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$，有 $P(t \geqslant \tau) = 1$，于是 τ 是最小半最优的。由于最小半最优的广义规则是唯一的，因此由上述所证可见，最小半最优性蕴含着最优性与严格可取性；反之，如果 τ 是最优且严格可取的，则 τ 是半最优，因而

如果 t 是最小半最优，就有 $P(t\geq\tau)=1$. 另一方面，由于 τ 是严格可取的，由引理2.6，$P(t\geq\tau)=1$，$\tau=t$ 是最小半最优的。

定义2.4　一个可取的广义规则 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，称为是最大可取的，如果对任何可取的 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，有 $P(\tau\geq t)=1$。

显然，最大可取若存在，则在 $a.s.$ 意义下是唯一的。

定理2.10　在 A_1,A_2 下，存在唯一的最大可取的 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，且 τ 是最优的。

证明　由定理2.7及引理2.2可见，存在可取且最优的广义规则，而引理2.3则表明，如果存在最大的可取规则 τ，则 τ 必是最优的。

往证最大的可取规则 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$ 的存在性，记 $\mathscr{O}$ 为全体最优的广义规则，

$$\mathscr{O}_{n,r}=\{t\in\mathscr{O}:P(t>n)\geq r\}$$

$$r_n=\sup\{r:\mathscr{O}_{n,r}\neq\varnothing\}$$

显然 $\mathscr{O}_{n+1,r}\subseteq\mathscr{O}_{n,r}$，当 $r>s$ 时，$\mathscr{O}_{n,r}\subseteq\mathscr{O}_{n,s}$. $r_n\downarrow$ 对任意的 $n\geq1$，可证明

$$\bigcap_{j=1}^{n}\mathscr{O}_{j,r_j-\frac{1}{n}}\neq\varnothing$$

事实上，由 r_j 之定义，$\mathscr{O}_{j,r_j}\neq\varnothing$，因此 $\mathscr{O}_{j,r_j-\frac{1}{n}}\neq\varnothing$，其中 $j=1,2,\cdots,n$，取 $t_j\in\mathscr{O}_{j,r_j-\frac{1}{n}}$，并令

$$t=t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_n$$

则 t 仍是最优的，且 $P(t>j)\geq P(t_j>j)\geq r_j-\dfrac{1}{n}$，这表明 $\bigcap\limits_{j=1}^{n}\mathscr{O}_{j,r_j-\frac{1}{n}}\neq\varnothing$，于是 $\forall\ n$，存在 $t_n\in\bigcap\limits_{j=1}^{n}\mathscr{O}_{j,r_j-\frac{1}{n}}$.

令 $\tau_1=t_1,\tau_n=\tau_{n-1}\vee t_n,\tau=\sup\limits_{n}\tau_n$，易见 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，而由条件 A_2

$$EX_\tau=EX_\tau I_{(\tau<\infty)}+EX_\infty I_{(\tau=\infty)}=E\varlimsup_{n\to\infty}X_{\tau_n}I_{(\tau<\infty)}+EX_\infty I_{(\tau=\infty)}$$

$$\geq\varlimsup_{n\to\infty}EX_{\tau_n}I_{(\tau<\infty)}+E\varlimsup_{n\to\infty}X_{\tau_n}I_{(\tau=\infty)}\geq\varlimsup_{n\to\infty}EX_{\tau_n}$$

由引理2.4以及 $t_1\in\mathscr{O}$ 可见

$$EX_{\tau_n} \geqslant EX_{\tau_{n-1}} \geqslant EX_{t_j} = \sup_{\tau \in \mathscr{T}} EX_t$$

所以 $EX_\tau \geqslant \sup_{\tau \in \mathscr{T}} EX_{t'}$，因此 $\tau \in \mathscr{O}$.

固定 $k \geqslant 1$，选 $n > k$，使

$$P(\tau > k) \geqslant P(\tau_n > k) \geqslant P(t_n > k) \geqslant r_k - \frac{1}{n}$$

从而

$$P(\tau > k) \geqslant r_k$$

$\tau \in \mathscr{O}$ 蕴含着 τ 是可取的，如果 τ 不是最大可取的，则必存在可取的 $t' \in \overline{\mathscr{T}}$，使 $P(t' > \tau) > 0$，令 $t = \tau \vee t'$，则 $EX_t \geqslant EX_\tau$，$t \in \mathscr{O}$，并且存在$0 < k < \infty$，使 $P(t > \tau = k) > 0$，于是

$$\begin{aligned} P(t > k) &= P(\tau > k) + P(\tau = k, t > k) \\ &> P(\tau > k) \geqslant r_k \end{aligned} \tag{2.13}$$

但由 r_k 之构造可知，当 $r > r_k$ 时，$\mathscr{O}_{k,r} = \varnothing$，也即不存在 $t \in \mathscr{O}$，使 $P(t > k) > r$，或者说(2.13)式表明，$t \notin \mathscr{O}$，矛盾，所以 τ 是最大可取的广义规则，定理证毕。

下面的定理表明，在适当的条件下，最大的可取广义规则就是最小严格的半最优的广义规则。

定理2.11 在 A_1, A_2下，$\tau_1 \in \overline{\mathscr{T}}$ 是最小严格半最优当且仅当τ_1是最大可取的。

证明 由定理2.10，可见存在最大可取的 $\tau_1 \in \overline{\mathscr{T}}$ 且 τ_1是最优的，如果 τ_1不是严格半最优的，则存在 $t \in \overline{\mathscr{T}}$，$1 \leqslant k < \infty$，$A \in \mathscr{F}_k$，$A \subseteq (\tau_1 = k, t > k)$，$P(A) > 0$，使得 $EI_A X_k \leqslant EI_A X_t$，令 $t' = \tau_1 I_{A^c} + t I_A$，则 $t' \in \overline{\mathscr{T}}$，$P(t' > \tau_1) > 0$，于是

$$EX_{t'} = EI_{A^c} X_{\tau_1} + EI_A X_t \geqslant EX_{\tau_1}$$

从而 t'最优，因而可取，这与 τ_1为最大可取矛盾。

往证 τ_1是最小的严格半最优广义规则。设 $\tau_1 \in \overline{\mathscr{T}}$ 是严格半最优的，令 $A_k = \{t = k, \tau_1 > k\}$，如存在某 $k \geqslant 1$，使 $P(A_k) > 0$，由 t 半最优，$EI_{A_k} X_k > EI_{A_k} X_{\tau_1}$，于是 τ_1非可取，矛盾。所以

$$P(\tau_1>t)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=0$$

亦即 τ_1是最小严格的半最优广义规则。

反之,如果 τ_1是最小严格半最优的广义规则,而由定理2.10,必存在唯一的最大可取广义规则 τ,由上所证 τ 是严格半最优,因此 $\tau_1=\tau$,此即 τ_1是最大可取的广义规则。

定理2.12　在 A_1、A_2条件下,记 τ_0为最小半最优的广义规则,τ_1为最小严格半最优的规则,则最优广义规则集

$$\begin{aligned}\mathscr{O}&=\{t\in\overline{\mathscr{T}}: t\text{ 可取且 }P(t\geqslant\tau_0)=1\}\\&=\{t\in\overline{\mathscr{T}}: t\text{ 半最优且 }P(t\leqslant\tau_1)=1\}\end{aligned}\qquad(2.14)$$

证明　由 $t\in\mathscr{O}\Rightarrow t$ 半最优$\Rightarrow P(t\geqslant\tau_0)=1$,又由 $t\in\mathscr{O}\Rightarrow t$ 可取,因此,$\mathscr{O}\subseteq\{t\in\overline{\mathscr{T}}: t$ 可取,且 $P(t\geqslant\tau_0)=1\}$。反之由引理2.3,若 t 可取且 $P(t\geqslant\tau_0)=1$,则 $EX_t\geqslant EX_{\tau_0}=\overline{V}\Rightarrow t\in\mathscr{O}$.

往证第二式,若 $t\in\overline{\mathscr{T}}$,半最优且 $P(t\leqslant\tau_1)=1$则 $EX_{\tau_1}=\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}EX_{\tau_1}I_{(t=n)}\leqslant\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}EX_nI_{(t=n)}=EX_t$,可见 $t\in\mathscr{O}$,反之若 $t\in\mathscr{O}\Rightarrow t$ 可取$\Rightarrow\tau=t\vee\tau_1$可取,而 τ_1是最大可取$\Rightarrow P(t\geqslant\tau_1)=1$而 $t\in\mathscr{O}\Rightarrow t$ 半最优。

注3　定理2.11证明了最小严格半最优即最大可取,我们还可证明在 A_1、A_2条件下,最小半最优的广义规则即最大严格可取的广义规则。设 τ_0是最小半最优的广义规则,则它是最优的,因而可取。如果它不是严格可取,则必存在 $E\subset\{\tau_0>n, E(X_{\tau_0}|\mathscr{F})<X_n\}$,$P(E)>0$。令 $t'=I_En+I_{E'}\tau_0$,于是 $P(t'<\tau_0)>0$且 $EX_{t'}>EX_{\tau_0}$这与 τ_0为最小半最优矛盾。进一步还可证明 τ_0是最大严格可取的广义规则,否则必存在严格可取的规则 t,使得 $P(t>\tau_0)>0$。记 $B=(t>\tau_0)$,令 $t'=I_Bt+I_{B'}\tau_0$,则 $EX_{t'}>EX_t$ 矛盾。所以 τ_0是最大严格可取。由于最大严格可取与最小半最优的广义规则在 a.s. 意义下是唯一的,因此最小半最优的广义规则即最大严格可取的广义规则。

既然最优的广义规则与半最优且可取的广义规则是一致的,

因此我们首先要寻求一个广义规则为半最优与可取的条件。可取性的条件：$E(X_t|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n$ $(t>n)$. 相当于对一个下鞅序列的 Doob 停止定理的成立，这样看来下面引理的条件是很自然的。

引理2.13 设 $S\in\mathscr{T}$，$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可积序列，且

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n,\quad S>n; n=1,2,\cdots \tag{2.15}$$

则 $\{X_{S\wedge n},\mathscr{F}_n\}_1^{\infty}$ 为一个下鞅，若还有 EX_S 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[S>n]}X_n^+=0 \tag{2.16}$$

则 S 是可取的。

证明 由于 $X_{S\wedge n}=X_n 1_{(S>n)}+\sum\limits_{i=1}^{n}X_i I_{(S=i)}$ 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，$EX_{S\wedge n}^+\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i^+<\infty$. $\forall\ A\in\mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned}\int_A X_{S\wedge n}&=\int_{A\cap(S>n)}X_n+\int_{A\cap(S\leqslant n)}X_S\\&\leqslant\int_{A\cap(S>n)}X_{n+1}+\int_{A\cap(S\leqslant n)}X_S\\&=\int_A X_{S\wedge(n+1)}\end{aligned}$$

故 $\{X_{S\wedge n},\mathscr{F}_n\}_1^{\infty}$ 是下鞅。

设还有 EX_S 存在，且(2.16)成立，对每个 $A\in\mathscr{F}_n$，由下鞅的性质，当 $m>n$ 时

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(S>n)}X_n=\int_{A\cap(S>n)}X_{S\wedge n}&\leqslant\int_{A\cap(S\geqslant n)}X_{S\wedge m}\\&\leqslant\int_{A\cap(n<S\leqslant m)}X_S+\int_{A\cap(S>m)}X_m^+\end{aligned} \tag{2.17}$$

由(2.16)式，取一个子列$\{m\}$趋于 $+\infty$，且 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{A\cap(S>n)}X_m^+=0$，则

$$\int_{A\cap(S>n)} X_n \leqslant \int_{A\cap(S>n)} X_s$$

这表明 S 是可取的规则。

引理2.14　设 $\{X_n^+,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 是可积的随机序列，$S\in\overline{\mathscr{T}}$，$X_\infty\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 且

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n,\quad S>n,n=1,2,\cdots \qquad (2.18)$$

则 $\{X_{S\wedge n},\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 是一个下鞅，若还有 EX_S 存在且 $\{I_{(S>n)}X_n^+\}_{n=1}^\infty$ 一致可积，则 S 是可取的广义规则。

证明　前面部分的证明完全与引理2.13相同，我们得到当 $m>n$ 时

$$\int_{A\cap(S>n)} X_n \leqslant \int_{A\cap(n<S\leqslant m)} X_s + \int_{A\cap(S>m)} X_m$$

利用 Fatou 引理以及 $\{I_{(S>n)}X_n^+\}$ 的一致可积性

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(S>n)} X_n &\leqslant \varlimsup_{m\to\infty}\left(\int_{A\cap(n<S\leqslant m)} X_S + \int_{A\cap(S>m)} X_m\right)\\ &\leqslant \int_{A\cap(n<S<\infty)} X_S + \int_{A\cap(n<S<\infty)} X_\infty\\ &= \int_{A\cap(S>n)} X_S\end{aligned}$$

这表明 S 是可取的广义规则。

现在讨论半最优性，设 S 是半最优的，则 $\forall\ t\in\overline{\mathscr{T}}$，在 $(n=s<t)$ 上有 $E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$，它也可写成为 $E(X_t|\mathscr{F}_S)\leqslant X_S$，这恰是上鞅 Doob 停止定理的形式，所以下面引理的条件也是很自然的。

引理2.15　设 $s\in C$，则 $\forall\ t\in C$，每个 $n=1,2,\cdots$

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n,\quad S\leqslant n \qquad (2.19)$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)} X_n^- = 0 \qquad (2.20)$$

则 S 是半最优的。

证明 令 $Z_n=-E(X_{S\vee n}|\mathscr{F}_n)$，$n=1,2,\cdots$，则可证 $\{Z_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 是下鞅。事实上，$\forall\ A\in\mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned}\int_A E(Z_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=-\int_A X_{S\vee(n+1)}\\&=-\int_{A\cap(S>n)}X_S-\int_{A\cap(S\leqslant n)}X_{n+1}\\&\geqslant-\int_{A\cap(S>n)}X_S-\int_{A\cap(S\leqslant n)}X_n\\&=-\int_A X_{S\vee n}=\int_A Z_n\end{aligned}$$

而且

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}Z_n^+=\varliminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}(E(X_{S\vee n}|\mathscr{F}_n))^-\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}(X_{S\vee n})^-$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{S>n}X_S^-+\varliminf_{n\to\infty}\int_{t>n}X_n^-=0$$

因此 $\{Z_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 满足引理2.13的条件，于是

$$E(Z_t|\mathscr{F}_n)\geqslant Z_n,\quad t>n,n=1,2,\cdots$$

$\forall\ A\in\mathscr{F}_n$，有

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(S=n,t>n)}Z_t&=\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{A\cap(S=n,t=m)}Z_m\\&=\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{A\cap(S=n,t=m)}-X_{S\vee m}\\&=-\int_{A\cap(s=n<t)}X_t\end{aligned}$$

因此，$E(Z_t|\mathscr{F}_n)=-E(X_t|\mathscr{F}_n)$，$n=s<t$，而在 $S=n$ 上，$Z_n=-X_n$，所以在 $n=s<t$ 上

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$$

这表明 S 是半最优的停止规则。

注4 参照引理2.14的证明可知，如果 $S\in\overline{C}$，且 $\forall\ t\in\overline{C}$，$n=1,2,\cdots$

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n,\quad S\leqslant n$$

$\{I_{(t>n)}X_n^-\}_{n=1}^{\infty}$一致可积，则 S 是半最优的。

§2.2 最优停止规则的构造[23]

上节叙述了最优广义规则的性质，并且定性地描述了最优广义规则集，本节讨论优广义规则的具体构造。

引理2.16 $\forall n=1,2,\cdots$，在 C_n 中存在一列递增的 n 可取规则序列$\{t_k\}$，使得

$$X_n\leqslant E(X_{t_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow \gamma_n,\quad k\to\infty \tag{2.21}$$

证明 由 γ_n 的定义，首先可取 C_n 中一列$\{t'_k\}$使得$\sup\limits_k E(X_{t'_k}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n$. 不妨设 $t'_1\equiv n$，但$\{t'_k\}$不一定递增，不一定可取，$E(X_{t'_k}|\mathscr{F}_n)$也不一定递增。由引理2.1之注1可知在 C_n 中存在一列$\{t''_k\}t''_k\leqslant t'_k,k=1,2,\cdots,\{t''_k\}$是 n 可取的，且 $t''_1=t'_1\equiv n,E(X_{t''_k}|\mathscr{F}_n)\to\gamma_n(k\to\infty)$，再由引理2.4，令

$$t_1\equiv n,t_2=t_1\vee t_2'',\cdots,t_k=t_{k-1}\vee t''_k$$

则 $t_k\uparrow,E(X_{t_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma_n,t_k\in C_n$ 且 n 可取，引理得证。

引理2.17 若，$t\in C$，则$\forall n=1,2,\cdots$，在 $t\geqslant n$ 上

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n$$

$$E(X_t^-|\mathscr{F}_n)\geqslant\gamma_n^-$$

证明 令 $t'=t\vee n\in C_n$，则由 γ_n 的定义

$$E(X_{t'}|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n,E(X_{t'}^-|\mathscr{F}_n)\geqslant(E(X_{t'}|\mathscr{F}_n))^-\geqslant\gamma_n^-$$

而在$(t\geqslant n)$上 $t'=t$，于是引理得证。

下面记 $\sigma_n=\inf\{k\geqslant n:X_k\geqslant\gamma_k\}$，并记 $\sigma=\sigma_1$.

引理2.18 设 $t\in C_n$，则 $t'=t\wedge\sigma_n\in C_n$ 且 $E(X_{t'}|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n)$.

证明 $\forall A\in\mathscr{F}_n$，由 σ_n 的定义及引理2.17

$$\int_{A\cap(\sigma_n<t)} X_{\sigma_n}^- = \sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)} X_t^-$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)} \gamma_k^- \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)} X_t^-$$

$$= \int_{A\cap(\sigma_n<t)} X_t^- \qquad (2.22)$$

因此 $$EX_\tau^- = \int_{(t\leqslant\sigma_n)} X_t^- + \int_{(t>\sigma_n)} X_{\sigma_n}^- \leqslant EX_t^- < \infty$$

类似于(2.22)，有 $\int_{A\cap(\sigma_n<t)} X_{\sigma_n} \geqslant \int_{A\cap(\sigma_n<t)} X_t$，于是

$$\int_A X_\tau = \int_{A\cap(t\leqslant\sigma_n)} X_t + \int_{A\cap(t>\sigma_n)} X_{\sigma_n} \geqslant \int_A X_t$$

引理得证。

引理2.19 设 $V<\infty$，$\{t_k\}$ 为 C 中一列单调上升的规则，且 $EX_{t_k}\uparrow V$，则 $P(\lim\limits_{k\to\infty} t_k\geqslant\sigma)=1$.

证明 首先由 $V<\infty$ 可推得 $V_n=E\gamma_n<\infty$. 事实上由引理2.16，存在 C_n 中递增列 $\{S_k\}$，使得 $X_n\leqslant E(X_{t_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma_n$. 于是由 levy 定理，$EX_{t_k}\uparrow E\gamma_n$，因此 $E\gamma_n\leqslant V_n$. 而由 $\gamma_n\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n)$，$t\in C_n$，又可得 $E\gamma_n\geqslant\sup\limits_{t\in C_n}EX_t=V_n$，所以 $V_n=E\gamma_n\leqslant V<\infty$.

记 $t=\lim\limits_{k\to\infty}t_k$，假设引理的结论不真，即 $P(t>\sigma)>0$. 则存在 $A=[t=i<\sigma]$，$P(A)>0$. 由 σ 的定义，在 A 上 $X_i<\gamma_i$，故存在 $\varepsilon>0$，使

$$\int_A \gamma_i - 3\varepsilon \geqslant \int_A X_i$$

令 $B_k=\{t_k=i<\sigma\}$，则 $I_{B_k}\to I_A$，由控制收敛定理，$\int_{B_k}X_j\to\int_A X_j\leqslant\int_A\gamma_i-3\varepsilon$，于是存在 k_0，使当 $k\geqslant k_0$ 时

$$\int_{B_k} X_i \leqslant \int_{B_k} \gamma_i - 2\varepsilon \tag{2.23}$$

由引理 2.16，存在$\{t'_i\} \subset C_j$，使 $X_i \leqslant E(X_{t'_i}|\mathscr{F}_i) \uparrow \gamma_i$，由单调收敛定理，$\lim\limits_{i\to\infty}\int_{B_k} X_{t'_i} = \int_{B_k} \gamma_i$，从而对每个 $k \geqslant k_0$，存在 $t'_k \in C_i$，使得

$$\int_{B_k} X_{t'_k} \leqslant \int_{B_k} \gamma_i - \varepsilon \tag{2.24}$$

令 $\tau_k = t'_k I_{B_k} + t_k I_{B_k^c}$，易见 $\tau_k \in C$，由(2.23)式及(2.24)式，当 $k \geqslant k_0$时

$$EX_{\tau_k} = \int_{B_k} X_{t'_k} + \int_{B_k^c} X_{t_k} \geqslant \int_{B_k} \gamma_i - \varepsilon + \int_{B_k^c} X_{t_k}$$

$$\geqslant \int_{B_k} X_i + \varepsilon + \int_{B_k^c} X_{t_k} = EX_{t_k} + \varepsilon$$

令 $k \to \infty$，则得$\operatorname{Sup}\limits_k EX_{\tau_k} \geqslant V - \varepsilon$. 矛盾。

现在我们来讨论在一般情形下，关于 snell 包 γ_n 的别尔曼方程。

定理2.20　设$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$是随机序列，$C_n \neq \varnothing$，则对一切 $n=1, 2, \cdots$

i) $\gamma_n = X_n \vee E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ (2.25)

ii) $V_n = E\gamma_n$ (2.26)

证明　i) $\forall\, n$，及 $t \in C_n$，记 $B = \{t = n\}$，由引理2.17，在 B^c 上 $E(X_t|\mathscr{F}_{n+1}) \leqslant \gamma_{n+1}$，故在 B^c 上 $E(X_t|\mathscr{F}_n) \leqslant E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$，这样

$$\begin{aligned} E(X_t|\mathscr{F}_n) &= I_B X_n + I_{B^c} E(X_t|\mathscr{F}_n) \\ &\leqslant I_B X_n + I_{B^c} E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n) \\ &\leqslant X_n \vee E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n) \end{aligned}$$

$$\gamma_n = \operatorname*{esssup}_{t\in C_n} E(X_t|\mathscr{F}_n) \leqslant X_n \vee E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

往证相反的不等式，设$\{t_k\}$是 C_{n+1}中如引理2.16的序列，则 $\gamma_n \geqslant E(X_{t_k}|\mathscr{F}_n) = E[E(X_{t_k}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n] \uparrow E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$，从而 a)得证。

ii)已在引理2.19中证明。

注5 事实上，$E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\operatorname*{esssup}_{t\in C_{n+1}}E(X_t|\mathscr{F}_n)$。别尔曼方程(2.25)说明了，Snell 包 γ_n 是一个上鞅。下面的定理提供了最优规则的结构性的表述。

定理2.21 若 $\sigma\in C$ 且可取，则 σ 是最优的停止规则。

证明 由定理2.8，只需证明 σ 是半最优的。由 σ 的定义，在$(\sigma=n)$上，$X_n=\gamma_n$，而由引理2.17，$\forall\ t\in C$，$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n=X_n$，$(t>n=\sigma)$，因此 σ 是半最优的，从而 σ 是最优规则。

下面将给出最优广义规则的特征。

引理2.22 设 $t\in\overline{C}_n$，$EX_t=\overline{V}_n<\infty$，则

i) $\forall\ k\geqslant n$，有

$$I_{(t>k)}E(X_t|\mathscr{F}_k)=I_{(t>k)}E(\gamma_{k+1}|\mathscr{F}_k)=I_{(t>k)}\gamma_k \tag{2.27}$$

ii) $\gamma_t=X_t$ (2.28)

iii) $\sigma_n\leqslant t$

证明 i)因为$\{\gamma_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是上鞅，$\forall\ k\geqslant n$，

$$\begin{aligned}\overline{V}_n=EX_t&=\int_{(t>k)}E(X_{t\vee k}|\mathscr{F}_k)+\int_{(t\leqslant k)}X_t\\&\leqslant\int_{(t>k)}\gamma_k+\int_{(t\leqslant k)}\gamma_t=E\gamma_{t\wedge k}\leqslant E\gamma_{t\wedge n}\\&\leqslant E\gamma_n=V_n\leqslant\overline{V}_n<\infty\end{aligned} \tag{2.29}$$

于是
$$\int_{(t>k)}(\gamma_k-E(X_t|\mathscr{F}_k))+\int_{(t\leqslant k)}(\gamma_t-X_t)=0$$

注意到上述被积函数非负，故

$$I_{(t>k)}E(X_t|\mathscr{F}_k)=I_{(t>k)}\gamma_k$$

又
$$\begin{aligned}I_{(t>k)}\gamma_k=I_{(t>k)}E(X_t|\mathscr{F}_k)&=E[I_{(t>k)}E(X_t|\mathscr{F}_{k+1})|\mathscr{F}_k]\\&\leqslant I_{(t>k)}E(\gamma_{k+1}|\mathscr{F}_k)\leqslant I_{(t>k)}\gamma_k\end{aligned}$$

由此 i)得证。

从(2.29)式，又可得 $I_{(t<\infty)}\gamma_t=I_{(t<\infty)}X_t$. 由于 $EX_t=\overline{V}_n<\infty$，由鞅收敛的定理(即如 $E|X|<\infty$，则 $E(X|\mathscr{F}_n)\to E(X|\mathscr{F}_\infty)$)得

$$I_{(t=\infty)}\gamma_\infty = I_{(t=\infty)} \overline{\lim_{k\to\infty}}\gamma_k = I_{(t=\infty)} \overline{\lim_{k\to\infty}} E(X_t|\mathscr{F}_k)$$
$$= I_{(t=\infty)}E(X_t|\mathscr{F}_\infty) = I_{(t=\infty)}X_\infty$$

故 ii)成立。

iii)由 σ_n 的定义及 ii)可得。

定理2.23　若 $V<\infty$, $t\in\overline{C}_n$，则下列命题等价

i) t 是 $\overline{C}_n$ 中广义最优规则，即 $EX_t=\overline{V}_n$；

ii) $X_t=\gamma_t$，且$\{\gamma_{t\wedge k}\}_{k=n}^{\infty}$是正则鞅；

iii) $X_t=\gamma_t$ 且$\{\gamma_{t\wedge k}\}_{k=n}^{\infty}$是正则下鞅；

iv) σ_n 在 $\overline{C}_n$ 中最优，且 $\sigma_n\leqslant t$.

$$I_{(t>\sigma_n)}E(X_t|\mathscr{F}_{\sigma_n}) = I_{(t>\sigma_n)}\gamma_{\sigma_n} = I_{(t>\sigma_n)}E(\gamma_{\sigma_n+1}|\mathscr{F}_{\sigma_n})$$

证明　i)⇒ii)。由 t 在 $\overline{C}_n$ 中最优及引理2.22，知 $X_t=\gamma_t$，而对 $\forall\ k\geqslant n$，

$$E(\gamma_t|\mathscr{F}_k) = E(X_t|\mathscr{F}_k) = I_{(t>k)}\gamma_k + I_{(t\leqslant k)}E(X_t|\mathscr{F}_k)$$
$$= I_{(t>k)}\gamma_k + I_{(t\leqslant k)}\gamma_t = \gamma_{t\wedge k} \tag{2.30}$$

由于$|E\gamma_t|=|EX_t|<\infty$，故上式说明$\{\gamma_{t\wedge k}\}_{k=n}^{\infty}$是正则鞅。

ii)⇒iii)。显然。

iii)⇒i)。因为$\{\gamma_{t\wedge k}\}_{k=n}^{\infty}$是正则下鞅，$E\gamma_t\geqslant E\gamma_{t\wedge n}$，所以 $\overline{V}_n\geqslant EX_t=E\gamma_t\geqslant E\gamma_{t\wedge n}=E\gamma_n=V_n$，所以 t 是 $\overline{C}_n$ 中最优的广义规则。

ii)⇒iv)。由 $X_t=\gamma_t$，得 $\sigma_n\leqslant t$，ii)与 i)等价，因此 $EX_t=\overline{V}_n<\infty$，且由引理2.22

$$I_{(t>\sigma_n=k)}E(X_t|\mathscr{F}_{\sigma_n}) = I_{(t>\sigma_n=k)}E(X_t|\mathscr{F}_k)$$
$$= I_{(t>\sigma_n=k)}\gamma_{\sigma_n} = I_{(t>\sigma_n=k)}E(\gamma_{\sigma_n+1}|\mathscr{F}_{\sigma_n})$$

而
$$EX_{\sigma_n} = E(I_{t>\sigma_n}X_{\sigma_n}) + E(I_{t=\sigma_n}X_t)$$
$$= E[I_{t>\sigma_n}E(X_t|\mathscr{F}_{\sigma_n})] + E(I_{t=\sigma_n}X_t)$$
$$= EX_t = \overline{V}_n$$

因此 σ_n 是 $\overline{C}_n$ 中最小的最优规则。

iv)⇒i)。如果 iv)成立，则

$$\begin{aligned}EX_t &= E[I_{t>\sigma_n}E(X_t|\mathscr{F}_{\sigma_n})] + E(I_{t=\sigma_n}X_t)\\&= E(I_{t>\sigma_n}\gamma_{\sigma_n}) + E(I_{t=\sigma_n}X_t)\\&= E(I_{t>\sigma_n}X_{\sigma_n}) + E(I_{t=\sigma_n}X_t)\\&= EX_{\sigma_n} = \overline{V}_n\end{aligned}$$

所以 t 在 $\overline{C}_n$ 中最优，定理得证。

由定理2.23，我们特别地有：若 $V<\infty$，且存在最优规则 t，则 $\sigma\in C$，且 σ 是 C 中最小最优规则。

注6 (2.27)与(2.28)刻划了 t 为 $\overline{C}_n$ 中最优广义规则的特征，常称为最优化原理。

注7 如果 A_1,A_2条件成立，则由定理2.7，存在着最优的广义规则 $t\in\overline{C}$，于是 σ 在 $\overline{C}$ 中最优，如果 $\overline{C}\neq\Phi$，则 $\overline{V}>-\infty$，因此如 $X_n\to-\infty$，则必 $P(\sigma=\infty)=0$，亦即 σ 是最优的规则。

由定理2.12，在 A_1,A_2条件下，存在最小半最优的广义规则 τ_0，而 σ 是最小的最优广义规则。因此 $\sigma\geqslant\tau_0$，另方面 τ_0本身是最优的，因此 $\sigma\leqslant\tau_0$，于是 $\sigma=\tau_0$, a. s.

注8 在引理2.16～定理2.21中，将 C_n 换为 $\overline{C}_n$，γ_n 换为 $\overline{\gamma}_n$，V_n 换为 $\overline{V}_n$，结论都仍然是正确的。

§2.3 对无限情形的逼近

虽然在§2.2中给出了，在 A_1,A_2条件下，σ 是最小最优的广义规则，σ 的表达是结构性的，但是应用起来并不便利，因为 γ_n 及 V_n 一般很难由它们的定义来计算，所以用有限情形来逼近无限的情形是一个可行的方法。

类似于(1.1)～(1.4)式，引入 C_n^N,γ_n^N,V_n^N，$N=n,n+1,\cdots$，显然

$$EX_n=V_n^n\leqslant V_n^{n+1}\leqslant\cdots\leqslant V_n$$

$$X_n \leqslant \gamma_n^n \leqslant \gamma_n^{n+1} \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$$

于是存在极限

$$V'_n = \lim_{N\to\infty} V_n^N$$

$$\gamma'_n = \lim_{N\to\infty} \gamma_n^N$$

由引理1.1

$$\gamma_N^N = X_N,\gamma_n^N = X_n \vee E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)$$

$$E\gamma_n^N = V_n^N$$

由单调收敛定理可得

$$E\gamma'_n = \lim_{N\to\infty} E\gamma_n^N = \lim_{N\to\infty} V_n^N = V'_n$$

$$\gamma'_n = \lim_{N\to\infty} \gamma_n^N = X_n \vee E(\gamma'_{n+1}|\mathscr{F}_n) \qquad (2.31)$$

因此(γ'_n)与(γ_n)满足相同的递推关系。但下面的例子表明，一般地$(\gamma'_n)\neq(\gamma_n)$，如设 $y_1,y_2,\cdots$是独立同分布随机变量序列，$P(y_1=1)=\frac{1}{2}=P(y_1=-1)$，$X_n=\sum_{i=1}^{n} y_i$，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,\cdots y_n)$，显然$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是鞅，于是由 Doob 停止定理，对 C_n 中有界停时 t，$E(X_t|\mathscr{F}_n)=X_n$，因此 $\gamma'_n=\lim\limits_{N\to\infty}\gamma_n^N=X_n$，但由引论中命题1，$P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n=+\infty)=1$，故对一切 n，$\gamma_n=+\infty$，所以 $\gamma_n\neq\gamma'_n$，何时两者相等呢？

定理2.24　设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$为可积序列，$\forall\, t\in C_n$，$n=1,2,\cdots$，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{(t>N)}(\gamma'_N)^- = 0 \qquad (2.32)$$

则 $\gamma'_n=\gamma_n$，$V'_n=V_n$，特别 $V'_1=V$.

证明　由(2.31)式，(γ'_n)是上鞅，对$(-\gamma'_n)_{n=1}^\infty$应用引理2.13，则$\forall\ t\in C_n$，

$$E(\gamma'_t|\mathscr{F}_n) \leqslant \gamma'_n$$

于是 $\gamma'_n\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n)$，$\gamma'_n\geqslant\gamma_n$，而由 $\gamma_n^N\leqslant\gamma_n$，又得 $\gamma'_n\leqslant\gamma_n$，所以 $\gamma'_n=\gamma_n$，$V'_n=V_n$，定理得证。

下面的定理是由考虑统计模型所引起的。

定理2.25　设 $X_n=X'_n-X''_n$，其中 X'_n，X''_n 均为 $\mathscr{F}_n$ 可测，且 i)$(X'_n)^-$一致可积，ii)存在非负递增的序列$\{Z_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$，使 $X''_n\leqslant Z_n$，且$\forall\ t\in C$，$EZ_t<\infty$，则对一切 n，$\gamma'_n=\gamma'_n$.

证明　由于$(\gamma'_n)^-\leqslant X_n^-$，只须证$\forall\ t\in C$，有

$$\int_{(t>n)} X_n^- \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

这由 $X_n^-\leqslant X'^-_n+X''^-_n\leqslant X'^-_n+Z_n$，及

$$\int_{(t>n)} X_n^- \leqslant \int_{(t>n)} X'_n + \int_{(t>n)} Z_t \to 0 \quad (n\to\infty)$$

可得到

推论2.26　若 $X_n=X_n^{(1)}-X_n^{(2)}=X_n^*-X_n^{**}$，其中各项都是 $\mathscr{F}_n$ 可测的；若

i)　$(X_n^*)^-$一致可积；

ii)　$E\sup\limits_n X_n^{(1)+}<\infty$；

iii)$O\leqslant X_1^{(1)}\leqslant X_2^{(2)}\leqslant\cdots$；

iv)存在 $C>0$，使得 $X_n^{**}\leqslant CX_n^{(2)}$

则对一切 n，$\gamma'_n=\gamma_n$.

证明　令 $X'_n=X_n^*$，$X''_n=X_n^{**}$ 及 $Z_n=CX_n^{(2)}$ 即可。

在 $\gamma_n=\gamma'_n$，$n=1,2,\cdots$的条件下，我们便可用有限情形的最优规则逼近无限情形的最优规则。

定理2.27　若$\forall\ n=1,2,\cdots,\gamma_n=\gamma'_n$，则

$$\sigma=\lim_{N\to\infty}\sigma^N \tag{2.33}$$

证明　首先从 γ_n^N 随 N 而单调递增可见 $\sigma^N=\inf\{n\geqslant 1:X_n\geqslant\gamma_n^N\}$ 是单调增加的。记 $\bar{\sigma}=\lim\limits_{N\to\infty}\sigma^N$，由 $\gamma_n^N\leqslant\gamma'_n=\gamma_n$，可知 $\bar{\sigma}\leqslant\sigma$，设 $\bar{\sigma}(\omega_0)=+\infty$，则 $\bar{\sigma}(\omega_0)\geqslant\sigma(\omega_0)$自然成立。如果 $\bar{\sigma}(\omega_0)=m<+\infty$，则存在 $N(\omega_0)$，使当 $N>N(\omega_0)$时，$\sigma^N(\omega_0)=m$，于是 $X_m(\omega_0)=\gamma_m^N(\omega_0)$，因而 $X_m(\omega_0)=\gamma'_m(\omega_0)=\gamma_m(\omega_0)$. 这表明 $\sigma(\omega_0)\leqslant m=\bar{\sigma}(\omega_0)$，从而 $\sigma=\lim\limits_{N\to\infty}$

σ^N.

例1 设 $y_1, y_2, \cdots$ 为同分布的随机变量列，α 为一正常数，令报酬函数

$$X_n = \max(y_1, \cdots, y_n) - n^\alpha \qquad \widetilde{X}_n = y_n - n^\alpha$$

假定 $E|y_1| < \infty$ 且 $E((y_1^+)^{1+\alpha^{-1}}) < \infty$，则可证明存在停止规则 σ 与 $\tilde{\sigma}$，使得

$$V = EX_\sigma, \widetilde{V} = E\widetilde{X}_{\tilde{\sigma}}, \sigma = \lim\sigma^N, \tilde{\sigma} = \lim\tilde{\sigma}^N$$

其中 $\sigma^N = \inf\{1 \leqslant n \leqslant N : X_n \geqslant \gamma_n^N\}$，$\tilde{\sigma}^N = \inf\{1 \leqslant n \leqslant N : \widetilde{X}_n \geqslant \tilde{\gamma}_n^N\}$，$\gamma_n^N, \tilde{\gamma}_n^N$ 分别是相应于 $(X_n)_{n=1}^N$，$(\widetilde{X}_n)_{n=1}^N$ 的 Snell 包。

为了证明上述结果，先证明下述引理。

引理2.28 设 $w, w_1, \cdots, w_n, \cdots$ 为同分布的非负随机变量。$\forall\ \alpha > 0$，令

$$Z = \sup_n\{\max(w_1, \cdots, w_n) - n^\alpha\}$$

则 i) $Ew^{\alpha^{-1}} < \infty \Rightarrow P(Z < \infty) = 1$；

ii) $\forall\ \beta > 0, Ew^{\alpha^{-1}+\beta} < \infty \Rightarrow E(Z^+)^\beta < \infty$.

证明 i) 由 $Ew^{\alpha^{-1}} < \infty$. 及 $w, w_1, w_2, \cdots$ 同分布知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(2w_n > n^\alpha) < \infty$，由 Borel—Catelli 引理，则 $P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{w_k > \frac{k^\alpha}{2}\}) = 0$，即 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\{w_k - k^\alpha \leqslant \frac{k^\alpha}{2}\}) = 1$，而 $Z = \sup\limits_n(\omega_n - n^\alpha)$，于是 $P(Z < \infty, w_n - n^\alpha \to -\infty) = 1$.

ii) 为证 $E(Z^+)^\beta < \infty$，只须证 $\int_0^\infty u^{\beta-1}P(Z > u)\mathrm{d}u < \infty$. 对任一 $u > 0$

$$P(z > u) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(w_n > u + n^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} P(w > u + n^\alpha)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(k^\alpha < w - u \leqslant (k+1)^\alpha)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP(k^{\alpha} < w - u \leqslant (k+1)^{\alpha})$$

$$\leqslant E((w-u)^{+})^{\alpha^{-1}}$$

令 $F(x)=P(w\leqslant x)$，$\nu=\alpha^{-1}$，有

$$E((w-u)^{+})^{\nu} = \int_{u}^{\infty} (x-u)^{\nu} \mathrm{d}F(x)$$

$$= \nu \int_{u}^{\infty} (x-u)^{\nu-1}(1-F(x))\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_{0}^{\infty} u^{\beta-1} P(z>u)\mathrm{d}u \leqslant \nu \int_{0}^{\infty} u^{\beta-1} \int_{u}^{\infty} (x-u)^{\nu-1}(1-F(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}u$$

$$= \nu \int_{0}^{\infty} \left(\int_{0}^{x} u^{\beta-1}(x-u)^{\nu-1}\mathrm{d}x\right)(1-F(x))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_{s}^{\infty} x^{\beta+\nu-1}(1-F(x))\mathrm{d}x < \infty$$

引理得证。

现在来证明例1所述的结论。

由 $E(y^{+})^{1+\alpha^{-1}} < \infty \Rightarrow E(\sup_{n}(\max(2y_1^{+},\cdots,2y_n^{+})-n^{\alpha})^{+} < \infty \Rightarrow$

$E\{\sup_{n}(\max(y_1,\cdots,y_n)-\frac{n^{\alpha}}{2})\}^{+} < \infty$，令 $X_n^{(1)} = \max(y_1,\cdots,y_n) - \frac{1}{2}n^{\alpha}$，

$X_n^{*} = \max(y_1,\cdots,y_n)$，则 $X_n = X_n^{(1)} - \frac{1}{2}n^{\alpha} = X_n^{*} - n^{\alpha}$. 由于

$$\int_{(t>n)} (y_n)^{-} \leqslant \int_{(t>n)} X_n^{-} \leqslant \int_{(t>n)} (X_n^{*})^{-} + \int_{(t>n)} n^{\alpha}$$

$$\leqslant \int_{(t>n)} (X_n^{*})^{-} + \int_{(t>n)} t^{\alpha}$$

所以为了证明左边当 $n\to\infty$ 时趋于 0，只须证明右边两式趋于 0。由于 $X_n^{*} \geqslant y_1$，$(X_n^{*})^{-} \leqslant y_1^{-}$ 而 $E|y_1|<\infty$，所以第一项趋于 0。为了证明 $\int_{(t>n)} t^{\alpha} \to 0$，只须证 $Et^{\alpha}<\infty$，注意到 $\frac{1}{2}t^{\alpha} = X_t^{(1)} - X_t \leqslant X_t^{(1)} +$

X_t^-，而 $EX_t^{(1)} \leqslant E\sup_t X_t^{(1)+} < \infty$，且由 $t \in C$，可见 $EX_t^- < \infty$，这样 $Et^a < \infty$ $\int_{(t>n)} y_n^- \to 0$. 由定理 2.24，$y'_n = y_n$，而由定理 2.27 即知 $\sigma = \lim_{N\to\infty} \sigma^N$. 同样的论证用于 X_n，即知 $\tilde{\sigma} = \lim_{N\to\infty} \sigma^N$. 容易验证 A_1 条件成立，由注 7 可知 σ 与 $\tilde{\sigma}$ 都是最优规则。

例2 变化点的检测。在质量控制中，我们要观察生产过程中某一个量的变化，如设该量的观察值构成独立同分布的随机变量序列 $y_1, y_2, \cdots$，生产过程在某时刻 θ 发生变化，我们要探测这个变化的发生。为了简化，假定 θ 是非负整值随机变量，并且有先验分布

$$P(\theta = 0) = \pi$$

$$P(\theta = K \mid \theta > 0) = r_k, \quad k = 1, 2, \cdots; \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 1$$

我们观察到 $y_1, y_2, \cdots, y_{\theta-1}, y'_\theta, y'_{\theta+1}, \cdots$，其中 (y_i) 与 (y'_i) 分别服从分布 F_0, F_1. 若过早地停产检修，即当 $\theta > n$ 时，我们要损失 c（一个固定检查费用）；若停产太晚，即 $\theta \leqslant n$ 时，将要造成损失 $n-\theta$，于是要问何时停产检修，才能使平均损失最小？

令 $\mathscr{F}_n = \sigma$（观察到的前 n 个随机变量）。

$$X_n = -C(1-\pi_n) - \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_i^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

其中

$$p_i^n = P(\theta = i \mid \mathscr{F}_n), \quad i, n \geqslant 0$$
$$\pi_n = P(\theta \leqslant n \mid \mathscr{F}_n), \quad n \geqslant 0$$

显然 A_1 条件满足，因此 σ 在 $\overline{C}$ 中最优。令 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n)$，对任何 $N = 1, 2, \cdots, n > N$，当 $n \to \infty$ 时

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}(n-i)p_i^n \geqslant (n-N)P(\theta \leqslant N \mid \mathscr{F}_n) \to \infty$$

在 $\{P(\theta \leqslant N \mid \mathscr{F}_\infty) > 0\}$ 上成立。而 $\bigcup_{N=1}^{\infty}\{P(\theta \leqslant N \mid \mathscr{F}_\infty) > 0\} = \Omega$（若不

然，则对一切 N，$P(\theta\leqslant N|\mathscr{F}_\infty)=0$，于是$\forall A\in\mathscr{F}_\infty$，$P(A,\theta\leqslant N)=0$，从而 $P(A)=)0$，因此 $X_n\to-\infty(n\to\infty)$ a.s. 而定理2.23之注7说明 σ 是 C 中最优规则。

为了证明 σ 可以由 σ^N 来逼近，只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(t>n)}\sum\limits_{i=0}^{n}(n-i)p_i^t=0$ 对任何 $t\in C$ 成立。因为

$$\int\limits_{(t>n)}\sum_{i=0}^{n}(n-i)p_i^t=\sum_{i=0}^{n}(n-i)\int\limits_{(t>n)}p_i^t$$

$$\leqslant\int\limits_{(t>n)}\sum_{i=0}^{n}(t-i)p_i^t\leqslant\int\limits_{(t>n)}X_t^-EX_t^-<\infty$$

故上式当 $n\to\infty$ 时趋于0。

§2.4 单调情形

现在我们用一般理论来解决一类特殊的最优停止问题。

设 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 是可积的随机序列，记

$$A_n=\{\omega:E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\},n=1,2,\cdots$$

如果 i) $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$ (2.34)

ii) $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=1$ (2.35)

则称 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形。

从(2.34)式，似乎

$$S=\inf\{n\geqslant 1:X_n\geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\} \tag{2.36}$$

应该是最优的，首先由(2.35)知 $P(S<\infty)=1$，但下面的例子表明 S 并不总是最优的。

回到引论中例1，容易算得

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}X_n$$

因此 $\omega\in A_n\Rightarrow X_n=0\Rightarrow X_{n+1}=X_{n+2}=\cdots=0\Rightarrow\omega\in A_{n+1}$，且

$$
\begin{aligned}
&P(S<\infty)\\
&=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\\
&=P(\exists\ n\geqslant 1,\text{使 } y_n\neq -1)\\
&=1-P(y_n\neq -1,n=1,2,\cdots)\\
&=1-\lim_{m\to\infty}P(y_n\neq -1,n\leqslant m)\\
&=1-\lim_{m\to\infty}(P(y_n\neq -1))^m=1
\end{aligned}
$$

但是我们在那里已看到，任何 $S\in C$ 都不是最优的，自然要问单调情形的最优规则是什么？

在单调情形中，如果(2.36)所定义的 $S\in C$，则从 S 的定义可知(2.15)式成立，因此若(2.16)式成立则 S 是可取的(引理2.13)．另外，从 S 的定义及(2.34)式可见引理2.15中(2.19)式成立，只要 $\forall\ t\in C$，(2.20)成立，则 S 是半最优的，从而 $\forall\ t\in C$，$EX_s\geqslant EX_t$，所以 S 是 C 中最优规则(见定理2.8)。

定理2.29　设在单调情形中，(2.16)式成立且 $S\in C$，如果存在非负可积随机变量 W 以及递增的正常数列 $\{C_n\}$，使得

$$X_t^- \leqslant W + C_t \qquad (2.37)$$

则对每一个使 $EC_t<\infty$ 时 $t\in\mathscr{T}$，有 $EX_s\geqslant EX_t>-\infty$.

证明　只须证对满足定理条件的 t，有 $t\in C$ 且(2.20)式成立。事实上

$$EX_t^- \leqslant EW + EC_t < \infty$$

故 $t\in C$ 且

$$\int_{t>n} X_n^- \leqslant \int_{t>n} W + \int_{t>n} C_t \to 0 \quad (n\to\infty)$$

推论2.30　设在单调情形中，$S\in C$，且(2.16)成立，(X_n^-) 一致可积，则 S 是最优规则。

例1　假设 $y_1,y_2,\cdots$ 是独立同分布序列，$E|y_1|<\infty$，且 y_1 不恒

为常数，考虑报酬函数序列 $X_n=m_n-g(n)$，其中 $m_n=\max(y_1,\cdots,y_n)$；$g(n)$是费用函数，严格递增。

记 $\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,\cdots,y_n)$，$f_n=g(n+1)-g(n)$，表示第 $n+1$次的观察费用。

引理2.31　$\forall\ n=1,2\cdots$，存在唯一的 α_n 满足

$$E(y_{n+1}-\alpha_n)^+=f(n) \tag{2.38}$$

且$\forall\ n=1,2,\cdots$

i) $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\Leftrightarrow m_n\geqslant\alpha_n$ (2.39)

ii) $\alpha_n\geqslant\alpha_{n+1}\Leftrightarrow f(n+1)\geqslant f(n)$ (2.40)

证明　考虑连续函数 $\varphi(\beta)=E(y_{n+1}-\beta)^+$，当 $\varphi(\beta)>0$时，$\varphi(\beta)$严格单调递减，且 $E(y_{n+1}-\beta)^+\downarrow 0(\beta\to\infty)$，而 $f(n)>0$，因此存在唯一的 α_n，使(2.38)式成立。

由 $X_{n+1}-X_n=\max(y_1,\cdots,y_{n+1})-\max(y_1,\cdots,y_n)-f(n)=(y_{n+1}-m_0)^+-f(n)$. 故

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\Leftrightarrow E((y_{n+1}-m_n)^+|\mathscr{F}_n)\leqslant f(n)$$

记 $A=\{E((y_{n+1}-m_n)^+|\mathscr{F}_n)\leqslant f(n)\}$，$B=\{m_n<\alpha_n\}$。若(2.39)"$\Rightarrow$"不真，则 $P(AB)>0$，因为 $AB\in\mathscr{F}_n$，与 y_{n+1}独立，而在 B 上$(y_{n+1}-\alpha_n)^+<(y_{n+1}-m_n)^+$. 于是

$$\begin{aligned}&\int_{AB}E((y_{n+1}-m_n)^+|\mathscr{F}_n)\\=&\int_{AB}(y_{n+1}-m_n)^+\\>&\int_{AB}(y_{n+1}-\alpha_n)^+\\=&E\int_{AB}(y_{n+1}-\alpha_n)^+\\=&P(AB)f(n)=\int_{AB}f(n)\end{aligned}$$

与在 A 上，$E[(y_{n+1}-m_n)^+|\mathscr{F}_n]\leqslant f(n)$矛盾。

反之，记 $A=\{m_n\geqslant\alpha_n\}$，$B=\{E((y_{n+1}-m_n)^+|\mathscr{F}_n)>f(n)\}$。若结

论不真，则有 $P(AB)>0$，由于 $AB\in\mathscr{F}_n$，在 A 上 $(y_{n+1}-m_n)^+\leqslant(y_{n+1}-a_n)^+$，从而

$$\int_{AB}E[(y_{n+1}-m_n)^+\mid\mathscr{F}_n]\leqslant\int_{AB}(y_{n+1}-a_n)^+=\int_{AB}f(n)$$

矛盾，所以 $E(X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$.

ii)是显然的。引理得证。

现在假设 $f(n+1)\geqslant f(n)$，$n=1,2,\cdots$，则由上述引理，$a_n\geqslant a_{n+1}$，因此若 $E(X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$，由于它等价于 $m_n\geqslant a_n$，因此 $m_{n+1}\geqslant m_n\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}$，从而 $E(X_{n+2}\mid\mathscr{F}_{n+1})\leqslant X_{n+1}$，这表明(2.34)式成立。而 $P(S<\infty)=1\Leftrightarrow$(2.35)式成立。由于

$$S=\inf\{n\geqslant 1: E(X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\}=\inf\{n\geqslant 1: m_n\geqslant a_n\}$$

而从 $E(y_1-a_1)^+=f(1)>0$，可知 $p=P(y_1<a_1)<1$.

于是当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}&P(S>n)\\&=P(m_k<a_k,k=1,2,\cdots,n)\\&\leqslant P(y_1<a_1,y_2<a_2,\cdots,y_n<a_1)\\&=p^n\to 0\end{aligned}$$

故 $P(S<\infty)=1$，从而在 $f(n)\uparrow$ 的条件下，例1属于单调情形。

由定理2.29，为了证明(2.36)所定义的是最优规则，须证明(2.16)，(2.37)成立，且 $\forall\ t\in C, Eg(t)<\infty$，对任意 $m=1,2,\cdots$

$$ES^m=\sum_{k=1}^{\infty}k^mP(s=k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^mP(S\geqslant k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^mp^{k-1}<\infty$$

于是由 wald 方程

$$EX_n^+\leqslant E(y_1^++\cdots+y_n^+)=Ey_1^+\cdot ES<\infty$$

在 $[S>n]$ 上，$m_n<a_n$，故 $X_n^+\leqslant m_n^+\leqslant a_n^+\leqslant a_1^+$，因而

$$\int_{(s>n)}X_n^+\leqslant a_n^+P(S>n)\to 0,\quad n\to\infty$$

(2.16)式成立，又取 $W=y_1^-$，则(2.37)成立，往证 $\forall\ t\in C, Eg(t)<\infty$，为此先考虑 $g(n)=c_n$ 的特殊情形，这里 $c>0$.

此时 $f(n)=c, \alpha_n=\alpha, n=1,2,\cdots$，其中 α 满足 $E(y_{n+1}-\alpha)^+=c$，相应的停止规则

$$S=\inf\{n\geqslant 1; m_n\geqslant \alpha\}=\inf\{n\geqslant 1; y_n\geqslant \alpha\}.$$

由于

$$\begin{aligned}
EX_t &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(s=n)} m_n - c\cdot n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(y_1<\alpha,\cdots,y_{n-1}<\alpha,y_n\geqslant\alpha)} y_n - c\sum_{n=1}^{\infty}P(S\geqslant n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}P(S\geqslant n)\Big(\int_{(y_1\geqslant\alpha)} y_1 - c\Big) \\
&= \Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}(P(y_1<\alpha))^n\Big]\Big(\int_{(y_1\geqslant\alpha)} y_1 - c\Big) \\
&= \frac{1}{1-P(y_1<\alpha)}\Big(\int_{(y_1\geqslant\alpha)} y_1 - c\Big) = \alpha
\end{aligned}$$

对 $\alpha'>\alpha$，令 $S_n=\sum_{i=1}^{\infty}[(y_i-\alpha')^+-c], n=1,2,\cdots$，则

$$X_n = m_n - cn = \max(y_1-\alpha',\cdots,y_n-\alpha') - cn + \alpha' \leqslant S_n + \alpha'$$

$\forall\, t\in\mathscr{T}, X_t\leqslant S_t+\alpha'$，如 $t\in C$，则 $ES_t^-<\infty$，由 Wald 方程，$ES_t=Et\cdot E((y_1-\alpha')^+-c)<0$. 这样，$Et<\infty, EX_t\leqslant\alpha'+ES_t<\alpha'$. 令 $\alpha'\to\alpha$，则得

$$EX_t\leqslant \alpha = EX_S$$

于是 S 是最优的规则。

现在可以对一般的情形论证：$\forall\, t\in C, Eg(t)<\infty$，因为 $g(n)$，$f(n)$ 都是递增的，由 $f(1)\geqslant f(0)=g(1)-g(0)=g(1)$，可证得 $g(n)\geqslant g(1)$，因此 $X_n=m_n-g(n)\leqslant m_n-\frac{1}{2}g(1)n$，如果存在 $t\in C$，使 $Eg(t)=\infty$，那么如令 $X'_n=m_n-\frac{1}{2}g(1)n$，则从特殊情形的论证可知

$$-\infty < EX_t \leqslant E(m_t - \frac{1}{2}g(t)) \leqslant E(m_t - \frac{1}{2}g(1)t) \leqslant EX'_s <$$

∞,这与 $EX_t = E(m_t - \frac{1}{2}g(t)) - \frac{1}{2}Eg(t) = -\infty$ 矛盾。

既然在一般情形,即假定 $f(n) = g(n+1) - g(n)$ 非负递增,证明了 $Eg(t) < \infty$ 对一切 $t \in C$ 成立,因此(2.36)所定义的规则 S 是最优的。

例2 带观察费用的序贯 Bayes 估计,设 $y_1, y_2, \cdots$ 是来自 $(\theta - \frac{1}{2}, \theta - \frac{1}{2})$ 上均匀分布母体的样本,θ 为未知待估的参数,若用 θ^* 估计 θ 取估计的风险为 $(\theta^* - \theta)^2$,假定每次观察的费用为常数 $C > 0$,θ 有先验分布:$[0,1]$上的均匀分布,现在要求一个停止规则 t,使

$$E(\theta^*(y_1, \cdots, y_n) - \theta)^2 = \min$$

令 $\mathscr{F}_n = \sigma(y_1, \cdots, y_n)$,先求在已知 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下 θ 的后验分布密度 $P(\theta | y_1, y_2, \cdots, y_n)$,记 $P(\theta, y_1, \cdots, y_n)$ 为 θ 与 $y_1, \cdots y_n$ 的联合分布密度,$P(y_1, \cdots, y_n | \theta)$ 为已知 θ 条件下,$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的条件分布密度,$P(\theta)$ 为先验分布密度,则

$$P(\theta | y_1, \cdots, y_n) = \frac{P(y_1, \cdots, y_n | \theta) P(\theta)}{\int_0^1 P(y_1, \cdots, y_n) | \theta) P(\theta) d\theta}$$

在 $\theta \in [0,1]$时,$P(\theta) = 1$

$$P(y_1, \cdots, y_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i | \theta) = \begin{cases} 1, & M_n - \frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant m_n + \frac{1}{2} \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

这里 $M_n = \max(y_1, \cdots, y_n)$, $m_n = \min(y_1, \cdots, y_n)$.

因此,当 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 时,

$$P(\theta | y_1, \cdots, y_n) = \begin{cases} \frac{1}{m_n - M_n + 1}, & M_n - \frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant m_n + \frac{1}{2} \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

而当 $\theta < 0$ 或 $\theta > 1$ 时，$P(\theta|y_1,\cdots,y_n)=0$，记 $v_n = M_n + \frac{1}{2}$，$u_n = M_n - \frac{1}{2}$，$B_n = v_n - u_n = m_n - M_n + 1$，由条件期望的性质可知，在已知 $y_1,\cdots,y_n$ 条件下应取 $\theta^* = E(\theta|\mathscr{F}_n)$，可使风险 $E(\theta^* - \theta)^2$ 最小。

$$\theta^* = E(\theta|\mathscr{F}_n) = \frac{1}{B_n}\int_{u_n}^{v_n} t\mathrm{d}t = \frac{v_n + u_n}{2}$$

此时后险平均风险为

$$E((^*\theta - \theta)^2|\mathscr{F}) = \frac{1}{12}B_n^2$$

如果不观察而直接估计 θ 只能令 $\theta^* = \frac{1}{2}$，从而平均风险为 $\frac{1}{12}$，令

$$\mathscr{F}_0 = (\Omega,\varnothing),X_0 = -\frac{1}{12},X_n = -\frac{Bn^2}{12} - cn$$

往求 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ 的最优停止规则。由于

$$\begin{aligned}
&E(B_{n+1}^2|B_n=B)\\
=&E((m_n \wedge y_{n+1} - M_n \vee y_{n+1} + 1)^2|B_n=B)\\
=&E((y_{n+1} - M_n + 1)^2 I(y_{n+1} \leqslant m_n)\\
&-(m_n - M_n + 1)^2 I(m_n \leqslant y_{n+1} \leqslant M_n)\\
&-(m_n - y_{n+1} + 1)^2 I(y_{n+1} > M_n)|B_n=B)\\
=&\int_{u_n}^{v_n}\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{m_n}(y - M_{n+1})^2\mathrm{d}y\cdot\frac{1}{B_n}\mathrm{d}\theta\\
&-\int_{u_n}^{v_n}\int_{m_n}^{M_n}B_n^2\mathrm{d}y\cdot\frac{1}{B_n}\mathrm{d}\theta + \int_{u_n}^{v_n}\int_{m_n}^{\theta+\frac{1}{2}}(m_n - y + 1)^2\mathrm{d}y\cdot\frac{1}{B_n}\mathrm{d}\theta\Big|_{B_n=B}\\
=&B^2(1 - \frac{B}{2})
\end{aligned}$$

于是，$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n - c + \frac{1}{24}B_n^3$，　$A_n = \{X_n \geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\} = \{B_n^3 \leqslant 24c\}$. 由于 $B_n \downarrow$，故 $A_n \uparrow$，为证 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^{\infty}$ 属于单调情形，

只需证明$\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c) = \lim_{n\to\infty}P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty}P(24c < B_n^3) = 0$成立。事实上，若记$R_n = M_n - m_n$它是样本$y_1,\cdots,y_n$的极差，由极差的分布密度是

$$f_R(r)=\begin{cases} n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}(F(x+r)-F(x))^{n-2}f(x)f(x+r)\mathrm{d}x, & r>0 \\ 0, & r\leqslant 0 \end{cases}$$

这里F是y_1的分布函数，f是分布密度，由

$$F(y)=\begin{cases} y-\theta+\frac{1}{2}, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \theta+\frac{1}{2} \\ 0, & y<\theta-\frac{1}{2} \\ 1, & y>\theta+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases} 1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \theta+\frac{1}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因而，$f_R(r)=n(n-1)(1-r)r^{n-2}$，于是

$$P(B_n^3>24c)=P(Rn<1-\sqrt[3]{24c})$$

$$=\int^{1-\sqrt[3]{24c}}n(n-1)r^{n-2}(1-r)\mathrm{d}r$$

$$=n\cdot\frac{(n-2)r^{n-1}-(n-1)r^{n-2}}{n-2}\Bigg|_{r=1-\sqrt[3]{24c}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

因为$X_n\leqslant 0, X_n^-=\frac{1}{12}B_n^2+cn, 0\leqslant B_n\leqslant 1$ a. s. 而对一切$t\in C, EX_t^-<\infty\Leftrightarrow Et<\infty\Leftrightarrow EC_t<\infty$因此

$$S=\inf\{n\geqslant 1; B_n^3\leqslant 24c\}$$

是最优的停止规则。

现在我们来研究在单调情形由有限逼近无限的问题。

引理2.32 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$属于单调情形，则

$$S^N=N\wedge S$$

其中，S 由(2.36)所定义，$S^N=\inf\{1\leqslant n\leqslant N, X_n\geqslant\gamma_n^N\}$，$\gamma^N=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n^N}E(X_t|\mathscr{F}_n)$。

证明 记 $A_n=\{X_n\geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}$.

i) 如 $S(\omega)\geqslant N$，则由 S 的定义，$X_{N-1}(\omega)<E(X_N|\mathscr{F}_{N-1})\leqslant\gamma_n^N$，于是 $S^N=N=S\wedge N$.

ii) 如 $S(\omega)=m<N$，则由单调性

$$I_{(S=m)}X_{N-1}\geqslant I_{(S=m)}E(X_n|\mathscr{F}_{N-1})$$

于是

$$I_{(S=m)}\gamma_{n-1}^N=I_{(S=m)}X_{N-1}\vee I_{(S=m)}E(\gamma_N^N|\mathscr{F}_{N-1})=I_{(S=m)}X_{N-1}$$

由归纳法可证

$$I_{(s=m)}\gamma_m^N=I_{(s=m)}X_m$$

这表明$(S=m)\subset[S^N\leqslant m]$，$S^N\leqslant S$；另一方面，若 $S^N(\omega)=m<N$，则 $X_m\geqslant\gamma_m^N\geqslant E(X_{m+1}|\mathscr{F}_m)$，所以 $S^N\geqslant S$，因此 $S^N=S\wedge N$.

定理2.33 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$属于单调情形，$V<\infty$，$EX_S$ 存在，且对每个 $t\in C$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(t>n)}(\gamma'_n)^-=0 \tag{2.41}$$

则 S 为最优规则的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(S>n)}X_n=0 \tag{2.42}$$

证明 由(2.41)式，可推得 $\gamma_n=\gamma'_n$. 由引理2.32得

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\inf\{n\geqslant1; X_n\geqslant\gamma_n\}\\&=\lim_{N\to\infty}\inf\{n\geqslant1; X_n\geqslant\gamma_n^N\}\\&=\lim_{N\to\infty}S^N=S\end{aligned}$$

$$EX_S^N=V^N\uparrow V(N\to\infty)$$

故

$$V=\lim_{N\to\infty}\left(\int_{(S\leqslant N)}X_S+\int_{(S>N)}X_N\right)$$

$$= EX_s + \lim_{N\to\infty}\int_{(S>N)} X_N$$

所以 S 是最优规则⇔(2.42)式成立。

推论2.34 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$属于单调情形，$A_1$条件满足，且$\forall t\in C$，(2.41)成立，则(2.36)所定义的 S 是最优规则。

证明 事实上，$S=\sigma_1$.

推论2.35 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$属于单调情形，$X_n=X'_n-X''_n$. 其中 i) X'_n 非负，$\mathscr{F}_n$ 可测，且 $E\sup_n X'_n<\infty$；ii) X''_n 非负单调上升且 $\mathscr{F}_n$ 可测，则 S 是最优规则。

证明 由推论2.34，只须证(2.41)式。

$$\int_{(t>n)}(\gamma'_n)^-\leqslant\int_{(t>n)}X''_n\leqslant\int_{(t>n)}X''_t$$

而

$$\int X''_t-\int\sup_n X'_n\leqslant\int(X''_t-X'_t)^+=\int X_t^-<\infty$$

因此

$$\int_{(t>n)}(\gamma'_n)^-\to 0,\quad n\to\infty$$

例3 窃贼问题，它的表述见引论中的例6。对于窃贼问题，有

$$E\sup_n X_n<\infty$$

这里 $X_n=\prod_{i=1}^n\delta_i\sum_{i=1}^n y_i$，其中$(y_i)$是独立同分布且期望有限的随机变量，$\delta_1,\delta_2,\cdots$是一列独立同分布随机变量 $P(\delta_n=1)=1-P(\delta_n=0)=p$，$(y_n)$与$(\delta_n)$独立，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1\cdots y_n,\delta_1\cdots\delta_n)$.

证明 注意到 $y_n\geqslant 0$，$P(\delta_n=1,n=1,2,\cdots)=0$，因此

$$E\sup_n X_n$$

$$=\int_{\bigcup_{i=1}^\infty(\delta_j=1,j\leqslant i-1,\delta_i=0)}\sup_n X_n+\int_{(\delta_1=\delta_2=\cdots=0)}\sup_n\Big(\prod_{i=1}^n\delta_i\sum_{i=1}^n y_i\Big)$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\delta_j=1, j\leqslant i-1, \delta_i=0\}} \sum_{j=1}^{i-1} y_j \leqslant \sum_{j=1}^{i-1}(i-1)Ey_1 \cdot p^{i-1} < \infty$$

引理得证。

现在我们来证明窃贼问题属于单调情形。由独立性，$\forall\ n=1, 2, \cdots$

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = E(\delta_1, \cdots, \delta_{n+1}(y_1+\cdots+y_{n+1})|\mathscr{F}_n)$$
$$= \delta_1, \cdots, \delta_n(y_1 E\delta_{n+1} + \cdots + y_n E\delta_{n+1} + E\delta_{n+1} y_{n+1})$$
$$= \delta_1, \cdots, \delta_n[(y_1+\cdots+y_n)p + \mu p]$$

这里，$\mu = Ey_1$. 因此

$$X_n = E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

$\Leftrightarrow$ 或$\exists\ m\leqslant n$，使 $\delta_m=0$，或$(y_1+\cdots+y_n)p+\mu p\leqslant y_1+\cdots+y_n$

于是

$$A_n \triangleq \{X_n \geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\} \subseteq A_{n+1}$$
$$P(S>n) \leqslant P(\delta_1=1, \cdots, \delta_n=1) = p^n \to 0$$

故

$$P(S<\infty)=1$$

由 $E\sup_n X_n < \infty$，(2.16)式成立，又因为 $X_n \geqslant 0$，(2.20)成立。因此由定理2.8可知最优规则是

$$S = \inf\{n\geqslant 1: \delta_1\cdots\delta_n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i(p-1) + \mu p \leqslant 0 \text{ 或 } \delta_n = 0\}$$

那就是说对窃贼来说，要么在被抓住时就洗手不干，要么在所偷窃的累计超过了$\frac{p}{1-p}\mu$就洗手不干是最明智的策略。

如果修改报酬函数为

$$X_n = \prod_{i=1}^{n}\delta_i \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i) - C_n$$

式中 $C_n\uparrow$，$C_n\geqslant 0$，且 $C_{n+1}-C_n$ 也单调上升，这表明每次行窃要付出一定代价，则类似可证明最优规则是

$$S=\inf\{n\geqslant 1:(\prod_{i=1}^{n}\delta_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i(p-1)+\mu p)-C_{n+1}+C_n\leqslant 0\text{ 或 }\delta_n=0\}$$

如果修改报酬函数为

$$X_n=(\prod_{i=1}^{n}\delta_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i)-(1-\prod_{i=1}^{n}\delta_i)C_n$$

这里 C_n 如上所述，则表明如果一旦被抓获，窃贼不但要交出全部赃物，而且还要交出罚金，则此时最优规则是

$$S=\inf\{n\geqslant 1:\prod_{i=1}^{n}\delta_i(\sum_{i=1}^{n}y_i(p-1)+\mu p)+\prod_{i=1}^{n}\delta_i(pC_{n+1}-C_n)$$
$$\leqslant C_{n+1}-C_n\text{ 或 }\delta_n=0\}$$

§2.5 三重极限定理

在§2.3中，我们已经讨论了用有限逼近无限的问题，在那里寻求一个使得 $\gamma_n=\gamma'_n$ 成立的条件是一个中心问题。现在要寻找一个计算方法，使得不论在什么情形下 Snell 包 γ_n 总能计算出来，这在理论与实际上都是很有意义的。为此不但要对序列的指标集进行截尾，还必须对序列值进行截尾，这就是下面要介绍的三重极限定理。虽然真正用它来计算 γ_n 并不理想，但是通过它可以进一步研究 Snell 包 γ_n 的性质。

设 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 是一个可积的随机序列，对任意的 $a\leqslant 0,b>0$，令

$$X_n(a,b)\triangleq\begin{cases}b, & X_n>b\\ X_n, & a\leqslant X_n<b\\ a, & X_n<a\end{cases}\tag{2.43}$$

或写 $X_n(a,b)=(X_n\vee a)\wedge b$.

$$X_n(b)\triangleq X_n(-\infty,b)\tag{2.44}$$

$$X_n(a)\triangleq X_n(a,+\infty)\tag{2.45}$$

以 $\gamma_n(a,b),\gamma_n(b),\gamma_n(a)$ 分别记相应于 $X_n(a,b),X_n(b),X_n(a)$ 的 Snell

包，$\gamma_n^N(a,b)$，$\gamma_n^N(b)$，$\gamma_n^N(a)$分别表示相应于 $X_n(a,b)$，$X_n(b)$，$X_n(a)$在有限(N)情形的 Snell 包. 因为$(X_n\vee a)^-\leqslant a^-$，由定理2.24，便知 $\lim\limits_{N\to\infty}\gamma_n^N(a)=\gamma_n(a)$，$\lim\limits_{N\to\infty}V_n^N(a)=V_n(a)$，$n=1,2,\cdots$因此自然要问否有

$$\lim_{a\to-\infty}\gamma_n(a)=\gamma_n$$

$$\lim_{a\to-\infty}V_n(a)=V_n$$

下面总是假定

$$X_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n,\quad \gamma_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}\gamma_n,\quad \bar{\gamma}_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}\bar{\gamma}_n \tag{2.46}$$

引理2.36 若随机序列$\{\beta_n,\mathscr{F}_n\}$满足

i) $\beta_\infty=X_\infty$;

ii) $\forall\ n=1,2,\cdots,\beta_n\leqslant X_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$;

iii) 存在非负随机变量 u，$Eu<\infty$，使得 $X_n\leqslant\beta_n\leqslant E(u|\mathscr{F}_n)$.

则 $\beta_n\leqslant\gamma_n$，$n=1,2,\cdots$

证明 $\forall\ n=1,2,\cdots$，往证$\forall\ A\in\mathscr{F}_n$，$\int_A\beta_n\leqslant\int_A\gamma_n$. 若上式不真，则必存在某 n_0，$\varepsilon>0$及 $A\in\mathscr{F}_{n_0}$，$P(A)>0$，使

$$\int_A\beta_{n_0}>\int_A\gamma_{n_0}+\varepsilon$$

令 $t=\inf\{k\geqslant n_0,X_k\geqslant\beta_k-\varepsilon\}$，易知 t 为停时。在$[t>n\geqslant n_0]$上，$X_n<\beta_n-\varepsilon$. 故由 ii)，$\beta_n\leqslant E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$，由 iii)，$E\beta_t\leqslant Eu<\infty$. 而$\{I_{t>n}\beta_n^+\}$是一致可积的，因此从引理2.14，可知

$$E(\beta_t|\mathscr{F}_n)\geqslant\beta_n,\quad t>n,n=1,2,\cdots$$

于是$\forall\ B\in\mathscr{F}_{n_0}$，由 i)

$$-\infty<\int_B\beta_{n_0}\leqslant\int_B\beta_t=\int_{B\cap(t<\infty)}\beta_t+\int_{B\cap(t=\infty)}X_\infty \tag{2.47}$$

取 $\beta=\Omega$，则从上式可知 $P(t=\infty,X_\infty=-\infty)=0$，但从 t 的定义及 i)可知 $P(t=\infty,X_\infty>-\infty)=0$，故 $P(t=\infty)=0$，从而 $t\in C_{n_0}$，在(2.47)中令 $B=A$，则

$$\int_A\gamma_{n_0}<\int_A\beta_{n_0}-\varepsilon\leqslant\int_A\beta_t-\varepsilon\leqslant\int_A X_t$$

这与 $\gamma_{t_0}\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_{t_0})$矛盾，引理得证.

引理2.37 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$满足条件 A_1，$\{\beta_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$为一个随机序列，使得$\forall\ n=1,2,\cdots$

$$X_n\leqslant\beta_n\leqslant E(\sup_{k\geqslant n}X_k|\mathscr{F}_n)$$

则 $\beta_\infty=X_\infty$，这里 $\beta_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}\beta_n$.

证明 显然 $\beta_\infty\geqslant X_\infty$，又对每个 $m=1,2,\cdots,n$

$$\beta_n\leqslant E(\sup_{k\geqslant m}X_k|\mathscr{F}_n)$$

由鞅收敛的 *Levy* 定理

$$\beta_\infty\leqslant E(\sup_{k\geqslant m}X_k|\mathscr{F}_\infty)=\sup_{k\geqslant m}X_k$$

再令 $m\to\infty$，便得 $\beta_\infty\leqslant X_\infty$，证毕。

下面引入函数 $\tilde{\gamma}_n$. 令

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\gamma}_N^N=E(\sup_{k\geqslant N}X_k|\mathscr{F}_N)\\&\tilde{\gamma}_n^N=X_n\vee E(\tilde{\gamma}_{n+1}^N|\mathscr{F}_n),\quad n=N-1,N-2,\cdots,1\end{aligned}\right\}\tag{2.48}$$

于是对每个 n

$$\tilde{\gamma}_n^N\geqslant X_n\vee E(\sup_{k\geqslant n+1}X_k|\mathscr{F}_n)=X_n\vee E(\tilde{\gamma}_{n+1}^{N+1}|\mathscr{F}_n)=\tilde{\gamma}_n^{N+1}$$

令

$$\tilde{\gamma}_n=\lim_{N\to\infty}\tilde{\gamma}_n^N\tag{2.49}$$

引理2.38 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$满足条件 A_1，则对每个 n，有

i) $\tilde{\gamma}_n=\bar{\gamma}_n=\gamma_n$;

ii) $\lim\limits_{a\to-\infty}\gamma_n(a)=\gamma_n$.

证明 i) 显然 $\bar{\gamma}_n\geqslant\gamma_n$，$\forall\ t\in\overline{C}_N$

$$\tilde{\gamma}_N^N=E(\sup_{k\geqslant N}X_k|\mathscr{F}_N)\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_N)$$

故 $\tilde{\gamma}_N^N\geqslant\bar{\gamma}_N$，由后退归纳法可证

$$\tilde{\gamma}_n^N=X_n\vee E(\tilde{\gamma}_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n\vee E(\bar{\gamma}_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\bar{\gamma}_n$$

令 $N\to\infty$，则得.

$$\tilde{\gamma}_n\geqslant\bar{\gamma}_n\geqslant\gamma_n$$

在(2.48)中应用单调收敛定理，则

$$\tilde{\gamma}_n = X_n \vee E(\tilde{\gamma}_{n+1} | \mathscr{F}_n)$$

在引理2.36中取 $u=\sup\limits_{k\geq n} X_k$，$\beta_n=\tilde{\gamma}_n$，又从引理2.37可知 $\tilde{\gamma}_\infty = X_\infty$，于是

$$\tilde{\gamma}_n \leqslant \gamma_n$$

这就证明了 $\tilde{\gamma}_n = \bar{\gamma}_n = \gamma_n$.

ii) 由定义知 $\gamma_n(a)$ 是 a 的递增函数，令 $\gamma_n^* = \lim\limits_{a\to -\infty} \gamma_n(a)$. 因 $\gamma_n(a) \geqslant \gamma_n$，故 $\gamma_n^* \geqslant \gamma_n$，由 $\gamma_n(a) = X_n(a) \vee E(\gamma_{n+1}(a) | \mathscr{F}_n)$ 及单调收敛定理即知

$$\gamma_n^* = X_n \vee E(\gamma_{n+1}^* | \mathscr{F}_n)$$

在引理2.37中取 $\beta_n = \gamma_n(a)$，$X_n = X_n(a)$，从 $X_n(a)$ 满足 A_1 条件，即知 $\gamma_\infty(a) = X_\infty(a)$，于是 $\gamma_\infty^* \leqslant \gamma_\infty(a) = X_\infty(a) \to X_\infty (a \to -\infty)$，而由 $\gamma_n^* \geqslant X_n$，易得 $\gamma_\infty^* \geqslant X_\infty$，所以 $\gamma_\infty^* = X_\infty$.

在引理中2.36中取 $\beta_n = \gamma_n^*$，即得 $\gamma_n^* \leqslant \gamma_n$，于是 $\gamma_n = \lim\limits_{a\to-\infty} \gamma_n(a)$.

引理2.39 对每个 $n=1,2,\cdots$

$$\lim_{b\to+\infty} \bar{\gamma}_n(b) = \bar{\gamma}_n$$

$$\lim_{b\to+\infty} \gamma_n(b) = \gamma_n$$

证明 $\forall\, n=1,2,\cdots$，$\bar{\gamma}_n(b)$ 是 b 的递增函数，令

$$\gamma_n^* = \lim_{b\to\infty} \bar{\gamma}_n(b)$$

则 $\gamma_n^* \leqslant \bar{\gamma}_n$ 是显然的，对每个 $b>0$，及 $t\in \overline{C}_n$

$$E(X_t(b) | \mathscr{F}_n) \leqslant \bar{\gamma}_n(b) \leqslant \gamma_n^* \tag{2.50}$$

由于 $X_t^-(b) = X_t^-$，$EX_t^- < \infty$，在(2.50)中应用单调收敛定理，则

$$E(X_t | \mathscr{F}_n) = \lim_{b\to\infty} E(X_t(b) | \mathscr{F}_n) \leqslant \gamma_n^*$$

从而 $\bar{\gamma}_n \leqslant \gamma_n^*$，这便证明了 $\lim\limits_{b\to\infty} \bar{\gamma}_n(b) = \bar{\gamma}_n$. 同样可证明 $\lim\limits_{b\to\infty} \gamma_n(b) = \gamma_n$.

本节的主要结论是

定理2.40 对每个 $n=1,2,\cdots$

$$\gamma_n=\bar{\gamma}_n,\quad V_n=\bar{V}_n$$

证明 对每个 $n=1,2,\cdots,b>0$，$\{X_n(b),\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 满足 A_1 条件，于是由引理2.38

$$\bar{\gamma}_n(b)=\gamma_n(b)$$

再由引理2.39，得 $\bar{\gamma}_n=\gamma_n$. 因此 $V_n=E\gamma_n=E\bar{\gamma}_n=\bar{V}_n$. 定理得证。

这个定理告诉我们，尽管将最优停止问题从 C_n 扩展到 $\bar{C}_n$，并不改变 γ_n 与 V_n 的值。

定理2.41(**三重极限定理**) $\forall\ n=1,2,\cdots$

i) $\gamma_n=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\gamma_n^N(a,b)$ (2.51)

$V_n=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{N\to\infty}V_n^N(a,b)$

ii) $\gamma_n=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\bar{\gamma}_n^N(b)$ (2.52)

$V_n=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}E\bar{\gamma}_n^N(b)$

证明 i) 先考虑序列 $\{X_n(a,b),\mathscr{F}_n\}_1^\infty$，由于 $X_n(a,b)\geqslant a\wedge b,b>0$，故 $(X_n(a,b))^-\leqslant a^-$，因此由定理2.24，$\lim\limits_{N\to\infty}\gamma_n^N(a,b)=\gamma_n(a,b)$，因为 $X_n(a,b)\leqslant b$，满足条件 A_1，因此由引理2.38

$$\lim_{a\to-\infty}\gamma_n(a,b)=\gamma_n(b)$$

再由引理2.39

$$\lim_{b\to\infty}\gamma_n(b)=\gamma_n$$

联合上面几个极限式子，便可证得(2.51)的第一式，应用单调收敛定理便可证第二式。

ii) 因为 $\bar{\gamma}_n^N(b)$ 关于 N 单调下降，由引理2.38，$\lim\limits_{N\to\infty}\bar{\gamma}_n^N(b)=\bar{\gamma}_n(b)=\gamma_n(b)$. (2.52)之第一式得证。

往证第二式，因为 $\gamma_n(b)\uparrow\gamma_n$，$E\gamma_n$ 存在，故 $\lim\limits_{b\to\infty}E\bar{\gamma}_n(b)=\lim\limits_{b\to\infty}E\gamma_n(b)=V_n$. 再由 $\bar{\gamma}_n^N(b)\downarrow\bar{\gamma}_n(b)\,(N\to\infty)$，而 $\bar{\gamma}_n^n(b)=E(\sup\limits_{k\geqslant n}(X_k\wedge b)\mid\mathscr{F}_n)$ 是可积的，由单调收敛定理

$$\lim_{N\to\infty}E\bar{\gamma}_n^N(b)=E\bar{\gamma}_n(b)$$

于是 $V_n=\lim\limits_{b\to\infty}Ey_n(b)=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}E\gamma_n^N(b)$.

§2.6 (γ_n)与(γ'_n)的正则性

定义2.5 称上鞅(或鞅)序列$\{y_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$关于一个停时类 D 是正则的,若对 $t\in D$, Ey_t 存在,且

$$E(y_t|\mathscr{F}_n)\leqslant y_n,\quad t>n,n=1,2,\cdots$$

定义2.6 若 $Y=\{y_n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$与 $Z=\{z_n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$是两个随机序列,我们说 Y 控制 Z 是指$\forall$ $n=1,2,\cdots$有 $y_n\geqslant Z_n$,若 Y 与 Z 是随机序列,存在一个随机序列的类 $\mathscr{K}$,使得

i) $Y\in\mathscr{K}$;

ii) Y 控制 Z;

iii) 每一个控制 Z 的 $Y'\in\mathscr{K}$ 也控制 Y,则称 Y 是类 $\mathscr{K}$ 中控制 Z 的最小元。

定理2.42 设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是可积的随机序列,则

i) $\{\gamma'_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是控制$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$的最小上鞅;

ii) $\{\gamma_n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$是控制$\{X_n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$的最小 C 正则上鞅.

证明 i) 由 $\gamma'_n=Xn\vee E(\gamma'_{n+1}|\mathscr{F}n)$知$(\gamma'_n)$是控制$(X_n)$的上鞅,设$\{\beta n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$也是控制$(X_n)$的上鞅,则 $\beta_N\geqslant X_N=\gamma_N^N$,由后退归纳法若已证得 $\beta_{n+1}\geqslant\gamma_{n+1}^N$,则

$$\gamma_n^N=X_n\vee E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)\leqslant\beta_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\beta_n$$

令 $N\to\infty$,便得 $\gamma'_n\leqslant\beta_n$. i)得证。

ii) 先证$\{\gamma_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是 C 正则的,假设(X_n)满足 A_1条件,若$\{\gamma_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$不是 C 正则的,即存在某个 $n\geqslant1,\varepsilon>0,A\in\mathscr{F}_n,P(A)>0$,使得对某一个 $t\in C$ 有

$$\int_{A\cap(t\geqslant n)}\gamma_n+\varepsilon\leqslant\int_{A\cap(t\geqslant n)}\gamma_t$$

由引理2.16，存在 C_k 中一列递增的可取序列 (t_l) 使得 $X_k \leqslant E(X_{t_l} | \mathscr{F}_k) \uparrow \gamma_k (l \to \infty)$. 于是对 $k=n, n+1, \cdots$，存在 t_{l_k}（改记为 t_k）$\in C_k$，使

$$\int_{A \cap (t=k)} \gamma_k - \varepsilon/2^{k+1} \leqslant \int_{A \cap (t=k)} X_{t_k}$$

令 $t^* = \sum_{k=n}^{\infty} t_k I_{A \cap (t=k)} + n I_{(\Omega - A \cap (t \geqslant n))}$，易见 $t^* \in \mathscr{T}$，且

$$\int_{A \cap (t \geqslant n)} X_{t^*} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A \cap (t=k)} X_{t_k} \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A \cap (t=k)} \gamma_k - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \int_{A \cap (t \geqslant n)} \gamma_t - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \int_{A \cap (t \geqslant n)} \gamma_n + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.53)$$

$$EX_{t^*} = \int_{A^c} Xn + \int_{A \cap (t \geqslant n)} X_{t^*} + \int_{A \cap (t < n)} Xn$$

$$\geqslant \int_{A^c} Xn + \int_{A \cap (t \geqslant n)} Xn + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{A \cap (t < n)} Xn$$

$$= EXn + \frac{\varepsilon}{2} > -\infty$$

所以 $t^* \in Cn$，且从(2.53)式得

$$P(E(X_{t^*} | \mathscr{F}_n) > \gamma_n) > 0$$

这与 γ_n 的定义矛盾，这就证明了在 A_1 条件下，(γ_n) 是 C 正则上鞅。

一般情形下，对 $b>0$，由上所证，$\{\gamma_n(b), \mathscr{F}n\}_1^{\infty}$ 是 C 正则的，因此 $\forall\ t \in C, E(\gamma_t(b) | \mathscr{F}_n) \leqslant \gamma_n(b), (t \geqslant n)$. 由引理2.39，$\lim\limits_{b \to \infty} \gamma_n(b) = \gamma_n$，故从条件期望的单调收敛定理得

$$E(\gamma_t | \mathscr{F}_n) \leqslant \gamma_n, (t \geqslant n)$$

这就证明了 (γ_n) 是 C 正则的。

最后来证明最小性，为此设 $\{\beta_n, \mathscr{F}n\}_1^{\infty}$ 是控制 X_n 的 C 正则上鞅，于是 $\forall\ t \in C_n$

$$\beta_n \geqslant E(\beta_t | \mathscr{F}n) \geqslant E(X_t | \mathscr{F}n)$$

从而 $\beta_n \geqslant \gamma_n$，定理得证。

注9 如果 $\forall\ n, X_n \geqslant 0$，则 (γ_n) 是控制 (X_n) 的最小上鞅，此时 $\gamma_n = \gamma'_n, n=1,2,\cdots$

事实上，如 $Y=(y_n)$ 是控制 X_n 的上鞅，它是非负上鞅，从而满足 Doob 停止定理的条件（(y_t^-)是一致可积的），就有

$$y_n \geqslant E(y_t|\mathscr{F}_n) \geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n), t\in C_n.$$

因此 $$y_n \geqslant \gamma_n.$$

§2.7 最小与最大的最优停时[21,22]

由定理2.23可知，如果条件 A_1, A_2 成立，则 σ_n 是 $\bar{C}_n$ 中最小的广义最优规则，下面讨论当 T 是一个停止规则，在

$$C_T=\{t\in\mathscr{T}: t\geqslant T, EX_t^-<\infty\}.$$

中最优停止的问题。

定理2.43　设 T 是停止规则 $EX_T^-<\infty$，则

$$\gamma_T=\operatorname*{esssup}_{t\in C_T} E(X_t|\mathscr{F}_T) \tag{2.54}$$

$$E\gamma_T=\sup_{t\in C_T} EX_t \tag{2.55}$$

证明　C_T 非空，令 ${}_T\gamma=\operatorname*{esssup}\limits_{t\in C_T} E(X_t|\mathscr{F}_T)$。对 $s\in C_T, s\vee n\in C_n$，且在 $[T=n]$ 上，$s=s\vee n$。因此在 $[T=n]$ 上

$$E(X_s|\mathscr{F}_T)=E(X_{s\vee n}|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n=\gamma_T \quad a.s.$$

于是 ${}_T\gamma\leqslant\gamma_T$，另一方面，如 $s\in C_n, s\vee T\in C_T$，在 $[T=n]$ 上 $s=s\vee T$，因而在 $[T=n]$ 上

$$E(X_s|\mathscr{F}n)=E(X_{s\vee T}\ \mathscr{F}_T)\leqslant{}_T\gamma \quad a.s.$$

所以在 $[T=n]$ 上，$\gamma_T\leqslant{}_T\gamma$　a.s. 这样 ${}_T\gamma=\gamma_T$　a.s.

对一切 $t\in C_T, E\gamma_T\geqslant EX_t$，于是 $E\gamma_T\geqslant\sup\limits_{t\in C_T}EX_t$，注意到，如果 $t,s\in C_T$，记 $A=\{E(X_t|\mathscr{F}_T)<E(X_s|\mathscr{F}_T)\}$，则 $\tau=I_As+I_{A^c}t\in C_T$，事实上，$A\in\mathscr{F}_T$，而 $(\tau=m)=A\cap(s=m)\cup A^c\cap(t=m)=A\cap(T\leqslant m)\cap(s=m)\cup A^c\cap(T\leqslant m)\cap(t=m)\in\mathscr{F}m$，可见 $\tau\in C_T$。而且

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_T)$$

$=I_A E(X_s|\mathscr{F}_T)+I_{A^c}E(X_t|\mathscr{F}_T)$

$=E(X_s|\mathscr{F}_T)\vee E(X_t|\mathscr{F}_T)$

因为已证明 $\gamma_T=\operatorname*{essup}\limits_{t\in C_T}E(X_t|\mathscr{F}_T)$. 所以完全可以参照引理2.16或定理2.7的证明，存在$(s_m)\subset C_T$，使得 $\gamma_T=\sup\limits_m E(X_{s_m}|\mathscr{F}_T)$，所以 $E\gamma_T=\lim\limits_{n\to\infty}EX_{s_m}\leqslant\sup\limits_{t\in C_T}EX_t$. 从而 $E\gamma_T=\sup\limits_{t\in C_T}EX_t$ 获证。

注10 读者还可证明：如给定停止规则 T，令 $\sigma_T=\inf\{n\geqslant T:X_n=\gamma_n\}$则当 $\sigma_T<\infty$ a. s. 时，σ_T 是 C_T 中最小最优规则。

由注7，在条件 A_1,A_2下，$\sigma_1=\tau_0$，其中 τ_0是最小半最优的广义规则。

现在来寻求最大的最优规则，由于$(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$是一个上鞅，这里假定 $\gamma_0=E\gamma_1$，由 Doob—Meyer 分解定理

$$\gamma=M-B$$

其中，$M=(m_n,\mathscr{F}_n)_0^{\infty}$是鞅，$m_0=\gamma_0$，$m_{n+1}-m_n=\gamma_{n+1}-E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}n)$，$B=(B_n,\mathscr{F}n)_0^{\infty}$是零初值的可料增过程，$B_0=0$，$B_{n+1}-B_n=\gamma_n-E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$. 令

$$K_0=\sup\{n\geqslant 0:Bn=0\} \tag{2.56}$$

因为 B_n 是可料的，即是 $\mathscr{F}_{n-1}$可测的，因此

$$(K_0=n)=\bigcap_{m=0}^{n}(B_m=0)\cap(B_{n+1}>0)\in\mathscr{F}n$$

K_0是$(\mathscr{F}_n)$停时。

引理2.44 $\sigma\leqslant K_0$ a. s.

证明 首先证明如果 $S\leqslant\sigma$ 是一个停止规则，则 $S\leqslant K_0$. 由于在 $A=\{S>n\}$上，$\sigma>n$，$\gamma_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$，因此 $E(\gamma_{S\wedge(n+1)}|\mathscr{F}_n)=\gamma_S I_{A^c}+E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)I_A=\gamma_{S\wedge n}$，$\{\gamma_{S\wedge n},\mathscr{F}_n\}$是一个鞅，故 $E\gamma_{S\wedge n}=E\gamma_0$. 写 $\gamma=M-B$ 为 Doob—Meyer 分解，由于 $S\wedge n$ 是有界停时，由 Doob 停止定理，$EM_{S\wedge n}=EM_0$，所以 $EB_{S\wedge n}=EB_0=0$，而 $B_{S\wedge n}\geqslant 0$，故 $B_{S\wedge n}=0$，这表明$\forall$ n，$S\wedge n\leqslant k_0$，所以 $S\leqslant k_0$ a. s.

$\forall\ n=1,2,\cdots$，令 $S_n=\sigma\wedge n$，则由上面所证，$S_n\leqslant k_0$，于是 $\sigma\leqslant k_0$，引理得证。

令　$K_T=\sup\{n\geqslant T;B_n=B_T\}$其中 T 是一个停止规则，在集合 $A_m=\{T=m\}$上，令 $X'_n=X_{m+n}$，$\mathscr{F}'_n=\mathscr{F}_{m+n}$，显然 $\gamma'_n=\gamma_{m+n}$，且

$$
\begin{aligned}
&B'_{n+1}-B'_n\\
&=\gamma'_n-E(\gamma'_{n+1}|\mathscr{F}'_n)\\
&=\gamma_{m+n}-E(\gamma_{n+m+1}|\mathscr{F}_{m+n})\\
&=B_{m+n+1}-B_{m+n}
\end{aligned}
$$

因此 A_m 上

$$
\begin{aligned}
&\sigma_T=\inf\{n\geqslant m,X_n=\gamma_n\}\\
&=m+\inf\{k\geqslant 1;X_{m+k}=\gamma_{m+k}\}\\
&=m+\inf\{k\geqslant 1;X'_k=\gamma'_k\}=m+\sigma' \qquad (2.57)\\
&K_T=m+k'_0 \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

其中，$\sigma'\triangleq\inf\{k\geqslant 1;X'_k=\gamma'_k\}$ $K'_0\triangleq\sup\{k\geqslant 0;B'_k=B'_0\}$是相应于$(X'_n,\mathscr{F}'_n)_{n=m}^{\infty}$的 σ 及 K_0. 因此对一切 $T\in\mathscr{T}$

$$\sigma_T\leqslant K_T\ a.s. \qquad (2.59)$$

定理2.45　假设条件 A_1,A_2成立，则

i) $\tau\in\overline{C}_1$是最优的 $\Leftrightarrow$ $X_\tau=\gamma_\tau$　$a.s.$ 且 $\tau\leqslant K_0$　$a.s.$；

ii) K_0是最大的最优广义规则，且 $K_0=\tau_1$其中 τ_1是最大可取的广义规则。

证明　i) 必要性。由 τ 最优及定理2.23，$EX_\tau=V=E\gamma_0=E\gamma_{\tau\wedge n}\geqslant\sup\limits_{s\in C_1}EX_s=E\gamma_\tau\geqslant EX_\tau$，可知 $X_\tau=\gamma_\tau$ a.s. 由 Doob—Meyer 分解

$$\gamma_n=M_n-B_n$$

$\forall\ n$，$EM_{\tau\wedge n}=EM_0$，所以 $EB_{\tau\wedge n}=EB_0=0$，$B_{\tau\wedge n}=0$，从而 $\tau\wedge n\leqslant K_0$，$n$ 任意，所以 $\tau\leqslant K_0$　$a.s.$

充分性。设 $\tau\in\overline{C}_1$，$\tau\leqslant K_0$且 $X_\tau=\gamma_\tau a.s.$ 则由 $\tau\wedge n\leqslant K_0$，可得 $B_{\tau\wedge n}=0$，而 $EM_{\tau\wedge n}=EM_0$，所以 $E\gamma_{\tau\wedge n}=E\gamma_0$. 记 $u=\sup\limits_{k\leqslant\infty}X_k$，则 $X_k\leqslant E(u$

$|\mathscr{F}_k)$，且 $\gamma_k \leqslant y_k \triangleq E(u|\mathscr{F}_k)$，$u$ 可积，对 $z_n = y_{\tau\wedge n} - \gamma_{\tau\wedge n} \geqslant 0$，应用 Fatou 引理得

$$\varliminf_{n\to\infty} E(y_{\tau\wedge n} - \gamma_{\tau\wedge n}) \geqslant E(y_\tau - \gamma_\tau)$$

所以 $E\gamma_\tau \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} E\gamma_{\tau\wedge n} \geqslant E\gamma_1 = V$. 而另一方面，由定理2.43，$E\gamma_\tau = \sup_{s\in C_\tau} EX_s \leqslant V$. 从而 $EX_\tau = E\gamma_\tau = V$，$\tau$ 最优。

ii) 当 $K_0 < \infty$ a. s. 时，由(2.58)式 $K_{K_0} = K_0 + K_0' = K_0 + \sup\{i \geqslant 0 : B_{K_0+i} = B_{K_0}\}$，因为 $B_{K_0} = 0$，且 K_0是使得 $B_i = 0$的最大的 i，所以 $K_0' = 0$，即 $K_{K_0} = K_0$，而当 $K_0 = \infty$，由 K_{K_0}之定义可知 $K_{K_0} = \infty$，因此 $K_{K_0} = K_0$.

由(2.59)式，在 $K_0 < \infty$时，$\sigma_{K_0} \leqslant K_{K_0} = K_0$，而当 $K_0 = \infty$时，因为 $K_{K_0} = \sigma_{K_0} = \infty$，因此 $\sigma_{K_0} \leqslant K_0$由 σ_{K_0}之定义又有 $\sigma_{K_0} \geqslant K_0$，所以 $\sigma_{K_0} = K_0$，从而 $X_{K_0} = X_{\sigma_{K_0}} = \gamma_{\sigma_{K_0}} = \gamma_{K_0}$，由 i)即知 K_0是最优的广义规则，从而它也是最大的最优规则。定理2.8表明 K_0是可取的，因而 $K_0 \leqslant \tau_1$，另一方面定理2.12表明 τ_1是最优的，因而 $\tau_1 \leqslant K_0$，于是 $K_0 = \tau_1$，K_0是最大可取也是最小严格半最优的广义规则。证毕。

注11 用十分直观的语言来说，最小最优停时就是能停则停的时刻，而最大最优停时就是不能再继续或者说非停不可的时刻，这从 σ_1及 K_0的表达可以看出，特别是在今后的引理2.59中我们将证 $K_0 = \inf\{n \geqslant 1 : E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n) < X_n\}$

§2.8 最优停时的唯一性[22,23]

最优停时若存在是否唯一呢?这在理论与实际应用中都是一个值得研究的问题，从§2.1及§2.7的讨论，我们看到当条件 A_1，A_2成立时一个停时 τ 为最优当且当 $X_\tau = \gamma_\tau$，且 $\sigma \leqslant \tau \leqslant K_0$，因此当 $\sigma = K_0$或者$\forall\ \tau \in \bar{T}, \sigma < \tau \leqslant K_0\ X_\tau < \gamma_\tau$ 时，最优停时是唯一的。

[23]研究了这一问题，不过某些证明可以由[20～22]而得以简化。

定理2.46 若可积序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$的值$V=\infty$，且存在最优的广义规则$t\in\overline{C}$，则

i) 当$P(t<\infty)>0$时，存在无穷多个最优的广义规则；

ii) 最优的广义规则唯一的充要条件是$\forall\ n\geqslant 1,\mathscr{F}_n=\{\Omega,\varnothing\}$.

证明 i) 若$P(t<\infty)>0$，则必$\exists\ n\geqslant 1$，使得$P(t=n)>0$，$\forall\ k>n$ 令$t_k=tI_{(t\neq n)}+kI_{(t=n)}$则易见$P(t_k\neq t)>0, t_k\in\overline{C}$. 由于$\int_{(t=n)}(X_k-X_n)\leqslant E|X_k|+E|X_n|<\infty$，故$EX_{t_k}=EXt+\int_{(t=n)}(X_k-X_n)=\infty$，因此存在无穷多个最优的广义规则。

ii) 如最优的广义规则唯一，则由i)知$t=\infty$ a.s. 若存在n，使$A\in\mathscr{F}_n$，$0<P(A)<1$，由于$\infty=EX_\infty=EI_AX_\infty+EI_{A^c}X_\infty$，两者总有一个为$\infty$，不妨设$EI_AX_\infty=\infty$，令$t'=\infty I_A+nI_{A^c}$，则$t'\in\overline{C}$且$P(t'\neq t)>0$，$EX_{t'}=\infty$，与唯一性矛盾。

反之，如$\mathscr{F}_n=\{\Omega,\varnothing\}$，$n=1,2,\cdots$，则$\forall\ t\in\overline{C}$，$t$只能a.s.取常数值，但对任意的$k$，$|EX_k|<\infty$，故必$t=\infty$ a.s. 且$EX_t=V=\infty$，所以最优停时唯一。

推论2.47 若可积序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$的值$V=\infty$，且存在最优规则，则必有无穷多个最优规则。

下面讨论$V<\infty$的情形，对$n=1,2,\cdots$及$\sigma\in T$，令$G_n=[\sigma=n]\cap(X_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))$

$$G_\sigma=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n.$$

定理2.48 若对可积序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$，对每个$n\geqslant 1$，$EX_{\sigma_n}=V_n<\infty$，则广义最优规则唯一的充要条件是$P(G_\sigma)=0$.

证明 必要性。若$P(G_{\sigma_n})\neq 0$，则必存在$n\geqslant 1$，使$P(G_n)>0$，令

$$t=\sigma I_{G_n^c}+\sigma_{n+1}I_{G_n}$$

则 $t\in\bar{\mathscr{T}}$，$t\neq\sigma_n$，由引理2.22，并注意到 B_n 上，$\sigma_{n-1}\geqslant n+1$

$$EX_t=\int_{G_n^c}X_\sigma+\int_{G_n}X\sigma_{n+1}=\int_{G_n^c}X_\sigma+\int_{G_n}\gamma_{n-1}$$
$$=\int_{G_n^c}X_\sigma+\int_{G_n}X_\sigma=EX_\sigma=V$$

这表明最优的广义规则不唯一，矛盾。

充分性。若除 σ 外另有最优的广义规则 t，则 $\sigma\leqslant t$，由引理2.22，$I_{(t>\sigma)}E(\gamma_{\sigma+1}|\mathscr{F}_n)=I_{(t>\sigma)}X_\sigma$ 而 $(t\neq\sigma)=(t>\sigma)\subset G_\sigma$，故 $P(t\neq\sigma)\leqslant P(G_\sigma)=0$，即 $\sigma=t$ a.s. 因此广义最优规则是唯一的。

注12 上述定理在 A_1,A_2 条件下的证明更为直观，若 $EX_\sigma=V<\infty$，则 $X_\sigma=\gamma_\sigma$，σ 是唯一最优 $\Leftrightarrow\sigma=K_0$，由于 $\sigma\leqslant K_0$ 恒成立，因此唯一性等价于 $\sigma+1>K_0\Leftrightarrow B_{\sigma+1}\neq0\Leftrightarrow X_\sigma=\gamma_\sigma\geqslant M_\sigma\neq E(\gamma_{\sigma+1}|\mathscr{F}_\sigma)$ a.s. $\Leftrightarrow P(B_\sigma)=0$。

在应用中，我们更感兴趣于最优规则的唯一性。

定理2.49 若可积序列 $\{X_n,\mathscr{F}n\}_1^\infty$ 满足条件 A_1，且存在最优规则，则它为唯一的充要条件是对每个 $n\geqslant1$，$D\in G_n\cap\mathscr{F}_n$，$P(D)>0$ 有 $P(D\cap(\sigma_{n+1}=\infty))>0$.

证明 必要性。由条件知 σ 是最优规则，如果存在某个 $n\geqslant1$，$D\in B_n\cap\mathscr{F}_n$，$P(D)>0$，使得 $P(D\cap(\sigma_{n+1}=\infty))=0$，令 $t=\sigma I_{D^c}+\sigma_{n+1}I_D$，则 $t\in\bar{\mathscr{T}}$，$t\neq\sigma$，且由 $P(t=\infty)=P(D\cap(\sigma_{n+1}=\infty))=0$，可见 $t\in\mathscr{T}$，如定理2.48所证 $EXt=V$，与唯一性矛盾。

充分性。假定最优规则不唯一，则有 $t\in C$，$t\neq\sigma$，满足 $EXt=V<\infty$. 因此 $X_t=\gamma_t$，且存在 $n\geqslant1$，使 $P(\sigma=n<t)>0$，记 $D=[\sigma=n<t]$它属于 $B_n\cap\mathscr{F}_n$，这是因为 $D=[\sigma=n]\cap(E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n)\cap(t>n)$. 而由 σ_{n+1}的定义可知，在 D 上，$\sigma_{n+1}\leqslant t<\infty$，故 $P(D\cap[\sigma_{n+1}=\infty])=0$，矛盾。

推论2.50 若可积序列 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 满足条件 A_1，且 $X_\infty=-\infty$，则最优规则为唯一的充要条件是 $P(X_\sigma=E(\gamma_{\sigma+1}|\mathscr{F}_\sigma))=0$.

证明 由 $X_\infty=-\infty$，可见最优停时 $\sigma_n<\infty$，且 $V_n=EX\sigma_n<\infty$，由定理2.49可知最优规则唯一的充要条件是，$\forall\ n\geqslant1, D\in G_n\cap\mathscr{F}_n$，有 $P(D)=0$，即 $P(X_\sigma=E(\gamma_{\sigma+1}|\mathscr{F}_\sigma))=0$. 证毕。

现在讨论去掉条件 A_1 的假设之后的唯一性问题，为此先引进一些记号。

$\forall\ k\geqslant1$，$D_k\in\mathscr{F}_k$，考虑可积序列 $\{I_{D_k}X_n,\mathscr{F}_n\}_k^\infty$，令 $\sigma_m(D_k)$，$\gamma_m(D_k)$，$V_m(D_k)$，$C_m(D_k)$，$\overline{C}_m(D_k)$ 分别表示相应于序列 $X(D_k)=\{I_{Dk}X_n,\mathscr{F}_n\}_k^\infty$ 的 σ_m，γ_m，V_m，C_m 及 $\overline{C}_m$.

引理2.51 $\forall\ m\geqslant k$

i) $\gamma_m(D_k)=I_{D_k}\gamma_m$；

ii) $I_{D_k}\sigma_m(D_k)=I_{D_k}\sigma_m$.

证明 i) 易见 $C_m(D_k)\supseteq C_m$，故 $\gamma_m(D_k)\geqslant I_{D_k}\gamma_m$，而 $\forall\ t\in C_m(D_k)$，令 $s=tI_{D_k}+mI_{D_k^c}$，则 $s\in Cm$，且 $I_{D_k}X_t=I_{D_k}X_s$

$$\gamma_m(D_k)=\operatorname*{esssup}_{t\in C_m(D_k)}E(I_{D_k}X_t|\mathscr{F}_m)\leqslant\operatorname*{esssup}_{s\in Cm}E(I_{Dk}X_s|\mathscr{F}_m)$$

$$=\operatorname*{esssup}_{s\in Cm}I_{D_k}E(X_s|\mathscr{F}_m)=I_{D_k}\operatorname*{esssup}_{s\in Cm}E(X_s|\mathscr{F}_m)=I_{Dk}\gamma_m$$

$$\text{ii) } I_{D_k}\sigma(D_k)=\inf\{l\geqslant m: X_lI_{D_k}=\gamma_l(D_k)\}I_{D_k}$$

$$=\inf\{l\geqslant m: X_lI_{D_k}=\gamma_lI_{D_k}\}\cdot I_{D_k}$$

$$=I_{D_k}\cdot\sigma_m$$

定理2.52 若可积序列 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 的 $V<\infty$，且广义最优规则存在，则它唯一的充要条件是 $\forall\ n\geqslant1$，$D_n\in G_n\cap\mathscr{F}_n$，$P(D_n)>0$，$\{I_{D_n}X_k,\mathscr{F}_k\}_{k=n}^\infty$ 在 $\overline{C}_{n+1}(D_n)$ 中没有广义的最优规则。

证明 充分性。假设广义最优规则不唯一，则必存在广义的最优规则 t 及某个 $n\geqslant1$，使得 $P(t>n=\sigma)>0$，记 $D_n=[t>n=\sigma]\in G_n\cap\mathscr{F}$，及令 $s=(n+1)I_{(t\leqslant n)}+tI_{(t>n)}$，则易知 $s\in\overline{C}_{n+1}(D_n)$。由引理2.51

$$EI_{D_n}Xs=EI_{D_n}Xt=\int_{D_n}E(Xt|\mathscr{F}_n)$$

$$=\int_{D_n} E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E\gamma_{n+1}(D_n)=V_{n+1}(D_n)$$

故 s 是序列 $\{I_{D_n}X_k,\mathscr{F}_k\}_n^\infty$ 在 $\overline{C}_{n+1}(D_n)$中的广义最优规则，与定理的条件矛盾。

必要性。若存在某 $n\geqslant 1,D_n\in G_n\cap\mathscr{F}_n,P(D_n)>0$，使得$\{X_kI_{D_n},\mathscr{F}_k\}_n^\infty$ 在 $C_{n+1}(D_n)$中有广义最优规则，因为 $V_{n+1}=E\gamma_{n+1}\leqslant V_1<\infty$，由引理2.51及引理2.22

$$V_{n+1}(D_n)=E\gamma_{n+1}(D_n)=EI_{D_n}\gamma_{n+1}\leqslant E\gamma_{n+1}^+<\infty$$

由于 $X(D_n)$在 $\overline{C}_{n+1}(D_n)$中存在广义最优规则，故 $\sigma_{n+1}(D_n)$必是 $\overline{C}_{n+1}(D_n)$中广义最优规则，且

$$\begin{aligned}E(I_{D_n}X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_n)&=E(I_{D_n}X_{\sigma_{n+1}}(D_n)|\mathscr{F}_{n+1})\\&=\gamma_{n+1}(D_n)=I_{D_n}\gamma_{n+1}\end{aligned}\tag{2.60}$$

令 $s=\sigma_{n+1}I_{D_n}+\sigma I_{D_n^c}$，则 $s\in\overline{\mathscr{T}}$，$s\neq\sigma$，由(2.60)式

$$\begin{aligned}EX_s&=EI_{D_n}X_{\sigma_{n+1}}+EI_{D_n^c}X_\sigma\\&=EI_{D_n}\gamma_{n+1}+EI_{D_n^c}X_\sigma=EI_{D_n}Xn+EI_{D_n^c}X\sigma\\&=EI_{D_n}X_\sigma+EI_{D_n^c}X_\sigma=EX_\sigma=V\end{aligned}$$

s 也是$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$的广义最优规则，与唯一性矛盾。

注13 将定理中广义最优规则换为最优规则，$\overline{C}_{n+1}(D_n)$换为$C_{n+1}(D_n)$，定理依然成立。

设可积序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^k$，如果$\forall\, n$，$\mathscr{F}_n$ 与 $\sigma(X_{n+1})$独立，则称$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^k$属于独立情形，这里 $k=\infty$或一个固定的自然数 N. $k=\infty$的情形留到第3章予以研究，如果 $k=N$(即有限情形)那么由后退归纳法容易证明 $E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)=E\gamma_{n+1}^N=V_{n+1}^N$，如果令 $X_{i+N}=X_N-i,\mathscr{F}_{i+N}=\mathscr{F}_N,i\geqslant 1$于是$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$满足条件 A_1且 $X_\infty=-\infty$，由推论2.50，便知最优规则唯一的充要条件是

$$P((\sigma<N)\cap(X_\sigma=V_{\sigma+1}))=0\tag{2.61}$$

例4 古典秘书问题(第一标准)的最优规则是唯一的。

由定理1.4知道，这里 $\sigma=\inf\{n\geqslant r^*:y_n=1\}$，而 $r^*=\inf\{r\geqslant 1;$

$\sum_{n=r}^{N-1}\frac{1}{n}\leqslant 1\}$，且 $X_{r^*}\geqslant V_{r^*+1}$. 因为 $X_\sigma=\frac{\sigma}{N}I(y_\sigma=1)$ 在 $(\sigma<N)$ 上严格增加，而 $V_{\sigma+1}$ 不增，因此在 $[\sigma>r^*]$ 上，(2.61) 自然成立，所以只须证明在 $[\sigma=r^*]$ 上，$X_{r^*}\neq V_{r^*+1}$. 由直接计算

$$V_{r^*+1}=EX_{\sigma_{r^*+1}}=\frac{r^*}{N}\sum_{k=r^*+1}^{N}\frac{1}{k-1}$$

而由下面的命题可知 $\frac{r^*}{N}\neq V_{r^*+1}$，因而最优规则是唯一的。

命题2.53 调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 的任一截节 $S_{n;k}=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$ $(n\geqslant k>1)$ 不可能取整数值。

证明 设 $1<k\leqslant n$，$\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n}=t$（正整数），令

$$m=\sup\{l\in N: k^l\leqslant n<k^{l+1}\}$$

则

$$\frac{n!}{k}+\cdots\frac{n!}{k^m}+\frac{n!}{k^{m+1}}+\cdots+\frac{n!}{n}=n!t. \tag{2.62}$$

设 $\frac{n!}{k^m}$ 中含有 t 的最高次幂为 c，即

$$n!=q\cdot k^{m+c} \tag{2.63}$$

其中 q 不能整除 k，则

$$\frac{n!}{k^c\cdot k}+\frac{n!}{k^c(k+1)}+\cdots+\frac{n!}{k^m\cdot k^c}+\cdots+\frac{n!}{n\cdot k^c}=\frac{n!t}{k^c} \tag{2.64}$$

对一切 $d\neq k^m$，$k\leqslant d\leqslant n$，如 $\frac{n!}{d}=q'k^r$，q' 不能整除 k，则由 (2.63) 式得 $qk^{m+(c-r)}=q'd$，如 $c\geqslant r$，则由 q' 不能整除 k，必 d 整除 $k^{m+(c-r)}$ 与 (2.62) 式矛盾。因此 $c<r$，于是 (2.64) 式中除 $\frac{n!}{k^mk^c}$ 外均为 k 的倍数，矛盾。由此可见 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n}\neq$ 正整数。

§2.9 Rasche 方法

1979年 A. Irle, Bayreuth 在[24]中介绍了 Rasche, M. 在一篇技术报告中提出的求解最优停止的算法[25]，这一方法具有一般性的意义，它的思想来源于动态规划中 Howard 策略迭代法[26]。这种算法的收敛速度是很快的，因此在计算最优停止的问题中十分有效；1990年刘胤杰在其硕士论文[27]中研究了这个方法的实质，证明了 Rasche 方法求出的是最小最优规则，而稍加修改后又可求得最大最优规则，本节讨论 Rasche 方法。本节中假定$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是可积的随机序列，并假定下述的$A_2'$条件成立

$$X_\infty=\limsup_{n\to\infty}X_n$$

本节中常需要的另一个主要条件称为A_3，即$\forall\ \sigma_n\in\mathscr{T},\sigma_n\leqslant\sigma_{n+1},n=1,2,\cdots$有

$$EX_{\sup\limits_{n\geqslant1}\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}EX_{\sigma_n}$$

注14 在A_2'条件下，A_1条件$\Leftrightarrow$通常的 A 条件，即 $E\sup\limits_{n\geqslant1}X_n<\infty$ $\Leftrightarrow$存在可积的随机变量u，使$\forall\ n\geqslant1,X_n\leqslant E(u|\mathscr{F}_n)$，显然 A 条件$\Leftrightarrow$文献[1]中 A^+ 条件，即 $E\sup\limits_{n\geqslant1}X_n^+<\infty$.

由于$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$是可积序列，$V_n>-\infty$，因此在$\mathscr{T}_n\triangleq\{t\in\mathscr{T}:t\geqslant n\}$中考虑最优规则与在$C_n$中考虑是一致的。

下面引进本节中一系列记号

$M(\mathscr{F})=\{E=(E_n)_{n\leqslant\infty}:E_n\in\mathscr{F}_n,E_\infty=\Omega\}$

$\mathscr{T}(E)=\{\tau\in\mathscr{T}:\forall\ n,(\tau=n)\subset E_n\}$

$\tau_n(E)=\inf\{k>n:\omega\in E_k\}$

$\tau(E)=\tau_0(E)$

对任何$E\in M(\mathscr{F})$，定义两种集合运算 * 与0：$\forall\ n<\infty$

$$E_n^* = \{E(X_{\tau n(E)} | \mathscr{F}_n) \leqslant X_n\} \cap E_n, E_\infty^* = \Omega$$

$$E^* = (E_n^*)_{n \leqslant \infty}$$

$$E_n^0 = \{E(X_{\tau n(E)} | \mathscr{F}_n) < X_n\} \cap E_n, E_\infty^0 = \Omega$$

$$E^0 = (E_n^0)_{n \leqslant \infty}$$

取原始集列 $G^0 = \widetilde{G}^0 = (\Omega)_{n \leqslant \infty}$，递推地定义

$$G^k = (G^{k-1})^*, \widetilde{G}^k = (\widetilde{G}^{k-1})^0$$

$$D_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_n^k, \widetilde{D}_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{G}_n^k$$

$$D = (D_n)_{n \leqslant \infty}, \widetilde{D} = (\widetilde{D}_n)_{n \leqslant \infty}$$

引理2.54 如果$\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$满足条件 A_3，则

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X_\infty \quad a.s.$$

证明 如不然，则存在集合 A，$P(A) > 0$及在 A 上，$\underline{\lim}_{n \to \infty} X_n < b < X_\infty$，定义

$$\sigma_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{k \geqslant n: X_k < b\}, & \omega \in A \\ \inf\{k \geqslant n: X_k < X_\infty\}, & \omega \in A^c \end{cases}$$

则 $\sigma_n(\omega)$单调增加，且$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} EX_{\sigma_n} &= EX_{\sigma_n} I_{(\sigma_n < \infty) \cap A} + EX_{\sigma_n} I_{(\sigma_n < \infty) \cap A^c} + EX_{\sigma_n} I_{(\sigma_n = \infty)} \\ &< EbI_{(\sigma_n < \infty) \cap A} + EX_\infty I_{(\sigma_n < \infty) \cap A^c} + EX_\infty I_{(\sigma_n = \infty)} \end{aligned}$$

注意到 $A \subset (\sigma_n < \infty)$，$P(A) > 0$，于是 $EX_{\sigma_n} < EbI_A + EX_\infty I_{A^c} < EX_\infty$，从而$\lim_{n \to \infty} EX_{\sigma_n} < EX_\infty$，矛盾。

定理2.55(Rasche) 假设 A_3条件成立，则

$$\tau(D) \triangleq \inf\{k > 0: \omega \in D_k\}$$

是最优的停止规则。

证明 分四步证明。

i) 首先$\forall\ E \in M(\mathscr{F})$，$\tau \in \mathscr{T}(E)$，定义

$$\tau^* = \inf\{n \geqslant \tau: \omega \in E_n^*\} \in \mathscr{T}(E^*) \tag{2.65}$$

则 τ^*是$(\mathscr{F}_n)$停时，往证 $EX_{\tau^*} \geqslant EX_\tau$. 为证此，对任何 $\rho \in \mathscr{T}(E)$，令

$$\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(E) I_{(\rho = n) \setminus E_n^*} + \rho I_{(\rho = n) \cap E_n^*} \tag{2.66}$$

显然 $\hat{\rho}\geqslant\rho$，由于

$$[\rho=m]\backslash E_m^* \subset E_m\backslash\{E(X_{\tau_m(E)}|\mathscr{F}_m)\leqslant X_m\}\cap E_m$$
$$=E_m\cap\{E(X_{\tau_m(E)}|\mathscr{F}_m)>X_m\}$$

因而

$$\int_{(\rho=m)\backslash E_m^*}X_\rho=\int_{(\rho=m)\backslash E_m^*}X_m<\int_{(\rho=m)\backslash E_m^*}X_{\tau_m(E)}$$
$$=\int_{(\rho=m)\backslash E_m^*}X\hat{\rho} \qquad (2.67)$$

故 $$EX_{\hat{\rho}}\geqslant EX_\rho \qquad (2.68)$$

令 $\tau_0=\tau,\tau_k=\hat{\tau}_{k-1},k=1,2,\cdots$，则 $\tau\leqslant\tau_k\leqslant\tau_{k+1}\leqslant\cdots$，且每个 $\tau_k\leqslant\tau^*$，可以证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=\tau^*$. 事实上，当 $\tau=\infty$时，$\tau^*=\tau_k=\infty$；而当 $\tau\leqslant\tau_k=n<\tau^*$ 时，$\omega\in E_n^*$，$\tau_{k+1}(\omega)=\hat{\tau}_k(\omega)=\tau n(E)\geqslant n+1=\tau_k(\omega)+1$，表明$(\tau_k)$是严格递增的，因此$(\tau_k)$或者递增到某一个 m 后，$\tau_m=\tau_{m+1}=\tau_{m+2}=\cdots=\tau^*$，或者一直严格递增，此时 $\tau^*=+\infty$，总之 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=\tau^*$. 由 A_3条件及(2.68)式可知

$$EX_{\tau^*}=\lim_{k\to\infty}EX_{\tau_k}\geqslant EX_\tau \qquad (2.69)$$

ii) $\forall\ S\in\mathscr{T}$，定义

$$S_k=\inf\{n\geqslant S:\omega\in G_n^k\} \qquad (2.70)$$
$$S'=\inf\{n\geqslant S:\omega\in D_n\}$$

则 $S_0=S$，因为 G_n^k 随 k 的增加而单调减小，因此 $S_{k-1}\geqslant S_k$，于是由(2.70)及(2.65)式

$$S_{k+1}=\inf\{n\geqslant S:\omega\in G_n^{k+1}\}$$
$$=\inf\{n\geqslant S_k:\omega\in G_n^{k+1}\}$$
$$=\inf\{n\geqslant S_k:\omega\in(G_n^k)^*\}=S_k^*$$

从而由(2.66)式

$$EX_S\leqslant EX_{S_k}\leqslant EX_{S_{k+1}}$$

且 $S'=\lim\limits_{k\to\infty}S_k$，由 A_3条件则

$$EX_{S'}=\lim_{k\to\infty}EX_{S_k}\geqslant EX_S$$

而 $S' \in \mathscr{T}(D)$，所以

$$\sup\{EX_\tau : \tau \in \mathscr{T}(D)\} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathscr{T}\} \tag{2.71}$$

iii) 现在考虑 $\rho, \tau \in \mathscr{T}(D)$，$\rho \leqslant \tau$，令

$$\rho_k = \tau I_{(\rho=\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(G^k) I_{(\rho=n<\tau)}$$

$$\tilde{\rho} = \tau I_{(\rho=\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(D) I_{(\rho=n<\tau)}$$

则 $\rho \leqslant \rho_k \leqslant \rho_{k+1}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \tilde{\rho}$，对任何 k 与 n，$[\rho=n<\tau] \subset D_n \subset G_n^{k+1} \subset \{E(X_{\tau_n(G_k)} | \mathscr{F}_n) \leqslant X_n\}$，因而

$$\int_{(\rho=n<\tau)} X_\rho = \int_{(\rho=n<\tau)} X_n \geqslant \int_{(\rho=n<\tau)} X\tau_{n(G^k)} = \int_{(\rho=n<\tau)} X_{\rho_k}$$

于是 $EX_\rho \geqslant EX_{\rho_k}$，$k=1,2,\cdots$，$EX_\rho \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} EX_{\rho_k} = EX_{\tilde{\rho}}$，定义 $\rho_0 = \rho$，$\rho^k = \tilde{\rho}^{k-1}$，于是 $EX_\rho \geqslant EX_{\rho^k} \geqslant EX_{\rho^{k+1}}$，而 $\rho^k \leqslant \rho^{k+1}$，在$[\rho^k < \tau)$上 $\rho^{k+1} \geqslant \rho^k + 1$，可见 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho^k = \tau$，从而

$$EX_\rho \geqslant \lim EX_{\rho^k} = EX\tau \tag{2.72}$$

iv) 由于对一切 $\tau \in \mathscr{T}(D)$，$\tau(D) \leqslant \tau$，由(2.72)及(2.70)式

$$EX_{\tau(D)} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathscr{T}(D)\} = \sup\{EX_\tau : \tau \in \mathscr{T}\}$$

这说明 $\tau(D)$是最优规则。定理得证。

这个定理告诉我们一种最优停止的计算方法或程序，按此程序我们得计算 $G^1, G^2, \cdots$ 然后计算 D，如果到某一步 $D^k = D^{k+1} = \cdots$，则易见 $D = G^k$，因此在什么条件下，这种计算步骤可以在有限步截止是一个值得探讨的问题，许多例子如下面的例5表明确实计算会在有限步截止.

推论2.56　在 A_3条件下，$\tau_{n-1}(D) \triangleq \inf\{k \geqslant n : \omega \in D_k\}$是 $\mathscr{T}_n(C_n)$中的最优规则。

证明的方法完全可仿照定理2.55的证明。

很自然的一个问题是 $\tau_0(D)$是否就是 σ，$\tau_{n-1}(D)$是否就是 σ_n?

引理2.57　在 A 条件与 A_3条件下，$E(X_{\tau_n(G^k)} | \mathscr{F}_{n+1})$关于 k 是

单调不减的，且$\forall\ n\geq 1$

$$\lim_{k\to\infty} E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_{n+1})=E(X_{\tau_n(D)}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1}.$$

证明　对任何 $\rho\in\mathscr{T}_{n+1}$，令

$$\hat{\rho}=\sum_{m=n+1}^{\infty}\tau_m(G)I_{[(\rho=m)\setminus G_m^*]}+\rho I_{(\rho=m)\cap G_m^*}$$

如同(2.64)的证明，$\forall\ A\in\mathscr{F}_{n+1}$，有

$$\int_A X_{\hat{\rho}}\geq\int_A X_\rho$$

所以代替(2.68)式，我们有

$$E(X_{\hat{\rho}}|\mathscr{F}_{n+1})\geq E(X_\rho|\mathscr{F}_{n+1})\tag{2.73}$$

考虑 $\tau\in\mathscr{T}_{n+1}$，做停时列 $\tau_0=\tau,\tau_{k+1}=\hat{\tau}_k,\cdots$于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=\tau^*\triangleq$ $\inf\{n\geq\tau;\omega\in G_n^*\}$，由(2.70)式及 Fatou 引理

$$\begin{aligned}E(X_\tau|\mathscr{F}_{n+1})&\leq\lim_{m\to\infty}E(X_{\tau_m}|\mathscr{F}_{n+1})\\&\leq E(\lim_{m\to\infty}X_{\tau_m}|\mathscr{F}_{n+1})=E(X_{\tau^*}|\mathscr{F}_{n+1})\end{aligned}$$

由于 $\tau_n(G^{k+1})=(\tau_n(G^k))^*$，可见 $E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_{n+1})$随 k 而单调不减，又因为 $\tau_n(G^k)$随 k 单调不减并趋于 $\tau_n(D)$，而对充分大的 k，$E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_{n+1})\leq E(X_{\tau_n(D)}|\mathscr{F}_{n+1})\leq\gamma_{n+1}$，最后的式子是由 $\tau_n(D)$的最优性得出的。所以由 A_3条件 $EX_{\tau_n(G^k)}\to EX_{\tau_n(D)}$，于是

$$\lim_{k\to\infty}E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_{n+1})=E(X_{\tau_n(D)}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1}\tag{2.74}$$

定理2.58　在 A 条件下 A_3条件下，$\tau_{n-1}(D)=\inf\{k\geq n;\gamma_k=X_k\}$.

证明　从(2.74)式及单调收敛定理，易知

$$\lim_{k\to\infty}E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_n)=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

由于 $G_n^0=\Omega,n=1,2,\cdots$，由归纳法可证

$$G_n^{k+1}=\{E(X_{\tau_n(G^k)}|\mathscr{F}_n)\leq X_n\},\quad k\geq 0$$

从而

$$D_n=\lim_{k\to\infty}G_n^k=\{E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leq X_n\}=\{X_n=\gamma_n\}$$

所以

$$\tau_{n-1}(D)=\inf\{k\geqslant n;\omega\in D_k\}$$
$$=\inf\{k\geqslant n;X_k=\gamma_k\}=\sigma_n$$ 证毕

注15 由本定理可见 $\tau_0(D)$就是在 A_1与 A_3条件下的最小最优规则,参照定理2.23说明在 A_1与 A_3,A_2'之下存在着最优的规则。

下面将证明 $\tau_0(\tilde{D})$是最大的最优规则。

引理2.59 在 A 条件下,最大的最优停时

$$K_0=\inf\{n;E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)<X_n\}$$

证明 注意到注14,定理2.45中条件 A_1,A_2是成立的,因此 K_0是最大最优停时,由于 $K_0=\sup\{n\geqslant 0,B_n=0\}$,而由 Doob-Meyer 分解定理,$B_n=\sum_{k=1}^{n-1}[\gamma_k-E(\gamma_{k+1}|\mathscr{F}_k)]$,所以由 K_0的定义,$B_{K_0}=0$,$B_{K_0+1}>0$,它等价于 $\gamma_k=E(\gamma_{k+1}|\mathscr{F}_k)$,对一切$1\leqslant k\leqslant K_0-1$,而 $\gamma_{K_0}>E(\gamma_{K_0+1}|\mathscr{F}_{K_0})$,因而

$$K_0=\inf\{n\geqslant 1;\gamma_n>E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}$$
$$=\inf\{n\geqslant 1;X_n>E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}$$ 证毕

注意到 ∘ 运算与 * 运算的区别,仿照定理2.55,推论2.56,引理2.57,我们可以证明

定理2.60 在 A_3条件下,$\tau(\tilde{D})\triangleq\inf\{k>0;\omega\in\tilde{D}_k\}$是最优规则,$\tau_{n-1}(\tilde{D})$是 $\mathscr{F}_n$ 中的最优规则且 $E(X_{\tau_n(\tilde{G}_k)}|\mathscr{F}_{n+1})$关于 k 单调不减,$\forall\ n\geqslant 1$

$$\lim_{k\to\infty}E(X_{\tau_n(\tilde{G}_k)}|\mathscr{F}_{n+1})=E(X_{\tau_n(\tilde{D})}|\mathscr{F}_{n-1})=\gamma_{n+1}$$

证明 请读者补足。

如果在计算 $\tilde{D}$ 时,存在某自然数 k,使得 $\tilde{G}^k=\tilde{G}^{k+1}=\cdots$,则 $\tilde{D}=\tilde{G}^k$,于是 $\tau_n(\tilde{G}^k)=\tau_n(\tilde{D})$于是 $E(X_{\tau_n(\tilde{G}^k)}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1}$,$\tilde{D}_n=\tilde{G}^{k-1}=\{E(X_{\tau_n(\tilde{G}^k)}|\mathscr{F}_n)<X_n\}=\{E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)<X_n\}$,因此

$$\tau(\tilde{D})=\tau(\tilde{G}^{k+1})=\inf\{n>0;E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)<X_n\}=K_0$$

所以我们有

命题2.61　设 A 与 A_3 条件成立，且存在某自然数 k，使 $\widetilde{D}=\widetilde{G}^k$，则 $\tau_0(\widetilde{D})$ 是最大最优停止规则。

定理2.62　在 A 与 A_3 条件下，所有最优规则都属于 $\mathscr{T}(D)$。

证明　A 条件保证了 $V<\infty$，由定理2.23知如果 t 是最优规则，则 $X_t=\gamma_t$，因此 $\{t=n\}\subseteq\{X_n\geqslant\gamma_n\}\subset\{E(X_{\tau_{n-1}}(G^k)|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\}=G_n^k$，这里 k 是任意的，于是

$$[t=n]\subset\bigcap_k G_n^k=D_n$$

$t\in\mathscr{T}(D)$，定理得证。

这个定理表明，在 A_3 条件下，定理2.12中所描述的最优规则集合就是 $\mathscr{T}(D)$，Rasche 方法的实质就是在 A_3 条件下提供一个计算 σ 与 K_0 的计算程序。

例5　候选姑娘的个数为随机时的秘书问题。现在假定前来应选秘书的姑娘的个数 N 为一个随机数，且 $P(N=m)=p_m$，$0\leqslant p_m\leqslant 1)$，$\sum_{k=1}^{\infty}p_m=1$，并且定义一个收益函数

$$q_m(k)=\begin{cases}d^m, & k=1\\ 0, & k\neq1\end{cases}$$

其中，m 表示应选姑娘的个数，k 表示所选姑娘的绝对名次，令 $\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}\Omega_m$，$\Omega_m$ 是1,2,…,m 全体排列，$\mathscr{F}=\Omega$ 的一切子集，当 $\omega\in\Omega_m$ 时定义 $p(\{\omega\})=\dfrac{P_m}{m_!}$，对 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\in\Omega_m$，令 $N(\omega)=m$，第 n 个姑娘的绝对名次为 b_n，相对名次为 y_n，$\mathscr{F}=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，当 $n>m$ 时认定 $b_n=y_n=+\infty$.

考虑报酬函数

$$X_n=E(q_N(b_n)|\mathscr{F}_n)=d^nP(b_n=1|\mathscr{F}_n)$$

容易证明 $X_n=d^nP(b_n=1|y_n)$，且

$$\begin{aligned}&P(b_n=1|y_{n=1})\\&=\sum_{m=n}^{\infty}P(b_n=1,N=m|y_n=1)\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} P(b_n = 1 \mid N = m) P(N = m) / P(b_n = 1)$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{P_m}{m} / P(y_n = 1)$$

而 $P(y_n = 1) = \sum_{m=1}^{\infty} P(y_n = 1 \mid N = m) P(N = m) = \frac{P(N \geqslant n)}{n}$，于是 $X_n = \frac{nd^n}{P(N \geqslant n)} \cdot \sum_{m=n}^{\infty} \frac{P_m}{m} \cdot I_{(y_n = 1)}$，如果 $P(N \geqslant n) = 0$，则认定 $X_n = 0$.

由于对任何停时 $\sigma_n \uparrow \sigma = \sup \sigma_n$，$X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ 且 $|X_{\sigma_n}| \leqslant 1$，是一致可积的，因此 $EX_{\sigma_n} \to EX_\sigma$ 条件 A_3 是满足的。

令 $X_\infty = 0$，则有 $\lim_{n \to \infty} X_n = X_\infty$，事实上 $\forall\ \omega \in \Omega_m$，当 $n > m$ 时，$y_n = +\infty$，所以 $X_n \to 0$，条件 A_2' 满足，因此可应用本节的定理2.55。[24]

§2.10 带约束的最优停止

在实际应用中往往不允许停止规则 T 过大，也就是需要考虑在约束条件 $ET \leqslant \alpha$ 下，求某一报酬序列 (X_n) 的最优停时问题，即所谓约束的最优停止问题，比如在统计试验中，如果用 X_n 表示第 n 次试验后所作统计判断的风险，每次试验费用为 c，原则上我们可以解

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} E(X_T - cT)$$

的问题，但实际上，试验的风险与试验的费用很难在同一量纲上比较大小，$X_n + cn$ 的表达是难以实现的，这时我们可以考虑在试验总次数 $ET \leqslant \alpha$ 的限制下求 $\inf EX_T$ 的解，在这个专题上可参考文献[27～30]。

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，$(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ 仍是一列上升子 σ 代数列，除考虑适应的报酬函数列 $(X_n)_{n \in N}$ 外，另设 $(Y_n)_{n \in N}$ 也是一个

适应的序列。

记 $B=\{t\in\mathscr{T}:EX_t^-<\infty,EY_t^+<\infty\}$，$\alpha$ 是给定的实数，考虑

$$(P)\quad\begin{cases}\underset{t\in B}{\text{Maxmize}}\,EXt & (2.75)\\ \text{且 } EY_t\leqslant\alpha & (2.76)\end{cases}$$

并称为是带约束条件的最优停止问题，其中(2.76)称为约束条件，若有在 $t_0\in B$，使得 $EY_{t_0}\leqslant\alpha$，且 $EX_{t_0}=\sup\limits_{t\in B,EY_t\leqslant\alpha}EX_t$，则称 t_0为问题(P)的 α 最优解，又记

$$C_n^1=\{t\geqslant n:t\in\mathscr{T}\text{ 且 }EY_t^+<\infty\};$$

$$C_n^2=\{t\geqslant n:t\in\mathscr{T}\text{ 且 }EX_t^-<\infty\};$$

设$(\alpha_n)_{n=1}^\infty$为一列实数，$\alpha_1=\alpha$，$\forall\ n=1,2,\cdots$，令

$$Dn=\{t\geqslant n:t\in B\text{ 且 }EYt\leqslant\alpha_n\}$$

$$\gamma_n=\underset{t\in C_n^2}{\text{esssup}}\,E(Xt|\mathscr{F}_n);$$

$$\beta_n=\underset{t\in D_n}{\text{esssup}}\,E(Xt|\mathscr{F}_n);$$

$$V_n^1=\sup_{t\in C_n^1}E(-Yt);$$

$$V_n^2=\sup_{t\in C_n^2}EXt;$$

$$W_n=\sup_{t\in D_n}EXt;$$

本节假定两个适应数列的值 V_1^2,V_1^1是有限的实数。

令

$$\varphi(\alpha)=\sup\{EX_T:T\in C\text{ 且 }EY_T\leqslant\alpha\}\qquad(2.77)$$

则 $\varphi(\alpha)$单调增加，记

$$D_\alpha=\{T\in C\text{ 且 }EY_T\leqslant\alpha\}$$

为了解问题(P)，我们引入罚函数

$$\delta_\alpha(T)=\begin{cases}0, & T\in D_\alpha\\ -\infty, & T\notin D_\alpha\end{cases}\qquad(2.78)$$

于是解问题(P)，就化为求解

$$\sup_{T\in C}E(X_T+\delta_\alpha(T))$$

取 $\delta_a(T)=\inf\limits_{\lambda\geqslant 0}\lambda(a-EY_T)$，则它满足(2.78)，且

$$E(X_T+\delta_a(T))=\inf_{\lambda\geqslant 0}[EX_T-\lambda(EY_T-\alpha)]=\begin{cases}-\infty, & T\notin D_a\\ EX_T, & T\in D_a\end{cases}$$

因此
$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)&=\sup_{T\in D_a}EX_T\\&=\sup_{T\in C}\inf_{\lambda\geqslant 0}(EX_T+\lambda\alpha-\lambda EY_T)\\&\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0}\sup_{T\in C}[EX_T-\lambda(EY_T-\alpha)]\triangleq\psi(\alpha)\end{aligned}$$

记 $f_a(\lambda)=\sup\limits_{T\in B}[EX_T-\lambda(EY_T-\alpha)]$，它作为 λ 的函数是凸(即下凸)函数，称

$$(P'):\inf_{\lambda\geqslant 0}f_a(\lambda)$$

为(P)的对偶问题；并称

$$L(T,\lambda)=EX_T-\lambda(EY_T-\alpha)$$

为(P)的 lagrange 函数。

定义2.7 设 g 是定义在 R 上广义实值函数，则称

$$g^*(x)=\inf_{y\in R}\{xy-g(y)\}$$

为 g 的凹共轭函数。[31]

引理 2.63 $\psi(\alpha)=\varphi^{**}(\alpha)$，$\forall\ \alpha\geqslant 0$成立

证明 $\forall\ \alpha\geqslant 0$

$$\begin{aligned}f_a(\lambda)&=\sup_{T\in B}(EX_T-\lambda EY_T+\lambda\alpha)\\&=\sup_{\beta\geqslant 0}\sup_{T\in C,EY_T\leqslant\beta}(EX_T-\lambda EY_T+\lambda\alpha)\\&\geqslant\sup_{\beta\geqslant 0}(\varphi(\beta)-\lambda\beta+\lambda\alpha)\\&=\lambda\alpha-\inf_{\beta\geqslant 0}(\lambda\beta-\varphi(\beta))\\&=\lambda\alpha-\varphi^*(\lambda)\end{aligned}$$

另一方面，由 $T\in B$，$EX_T\leqslant\varphi(EY_T)$，所以

$$\begin{aligned}f_a(\lambda)&\leqslant\sup_{T\in B}(\varphi(EY_T)-\lambda EY_T+\lambda\alpha)\\&\leqslant\sup_{\beta\geqslant 0}(\varphi(\beta)-\lambda\beta+\lambda\alpha)\end{aligned}$$

$$=\lambda\alpha-\inf_{\beta\geqslant 0}(\lambda\beta-\varphi(\beta))$$
$$=\lambda\alpha-\varphi^*(\lambda)$$

从而 $f_\alpha(\lambda)=\lambda\alpha-\varphi^*(\lambda)$，于是

$$\psi(\alpha)=\inf_{\lambda\geqslant 0}f_\alpha(\lambda)=\inf_{\lambda\geqslant 0}(\lambda\alpha-\varphi^*(\lambda))=\varphi^{**}(\alpha)$$

引理2.64　问题(P)的值 $V=\varphi(\alpha)$，且 $T^*\in D_\alpha$ 为(P)的解当且仅当

$$\inf_{\lambda\geqslant 0}L(T^*,\lambda)=\varphi(\alpha)\tag{2.79}$$

证明　$T^*\in D_\alpha$ 为(P)的解，则 $EY_{T^*}\leqslant\alpha$，于是 $\delta_\alpha(T^*)=0$

$$EX_{T^*}=\sup_{T\in D_\alpha}EX_T=\sup_{T\in C}\inf_{\lambda\geqslant 0}(EX_T-\lambda EY_T+\lambda\alpha)=\varphi(\alpha)$$

又

$$EX_{T^*}=EX_{T^*}+\delta_\alpha(T^*)=\inf_{\lambda\geqslant 0}(EX_{T^*}-\lambda EY_{T^*}+\lambda\alpha)$$
$$=\inf_{\lambda\geqslant 0}L(T^*,\alpha)$$

所以，$T^*\in D_\alpha$ 为(P)的解的充要条件是(2.79)式成立。

如果存在 $\lambda^*\geqslant 0$，使得对偶问题的值达到 $\varphi(\alpha)$，也即 $\sup\limits_{T\in B}L(T,\lambda^*)=\varphi(\alpha)$，则称 λ^* 为 lagrange 乘子，当然 lagrange 乘子必定是对偶问题(P')的解。

定理2.65　$T^*\in B$ 是问题(P)的解且 $\lambda^*\geqslant 0$ 为(P)的 lagrange 乘子的充要条件是：对任意的 $T\in B$ 及 $\lambda\geqslant 0$，成立

$$L(T,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda)\tag{2.80}$$

证明　必要性。如果 T^* 是(P)的解，λ^* 是 lagrange 乘子，则 $\varphi(\alpha)=\sup\limits_{T\in B}L(T,\lambda^*)=\inf\limits_{\lambda\geqslant 0}L(T^*,\lambda)$。于是 $L(T^*,\lambda^*)\geqslant\inf\limits_{\lambda\geqslant 0}L(T^*,\lambda)=\varphi(\alpha)\geqslant L(T^*,\lambda^*)$，所以

$$L(T,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda)$$

充分性。设(2.80)式成立，则

$$\psi(\alpha)\leqslant\sup_T L(T,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda^*)\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0}L(T^*,\lambda)\leqslant\varphi(\alpha)$$

而 $\varphi(\alpha)\leqslant\psi(\alpha)$ 总是成立的，所以上式其实是等式，从而 $\inf\limits_{\lambda}L(T^*,$

$\lambda)=\varphi(\alpha)$，可见 T^* 是(P)的解，而 $\sup_T L(T,\lambda^*)=\varphi(\alpha)$，可见 λ^* 是 lagrange 乘子。

推论2.66 条件(2.80)与下面的条件等价

$$\sup_{T\in B} L(T,\lambda^*)=L(T^*,\lambda^*) \tag{2.81}$$

$$\lambda^*(EY_{T^*}-\alpha)=0 \tag{2.82}$$

$$EY_{T^*}-\alpha\leqslant 0 \tag{2.83}$$

证明 ⇐)：由(2.81)，$L(T,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda^*)$，另一方面 $L(T^*,\lambda^*)=EX_{T^*}\leqslant EX_{T^*}-\lambda(EY_{T^*}-\alpha)=L(T^*,\lambda)$；

⇒)：首先 $\sup_{T\in B}L(T,\lambda^*)\leqslant L(T^*,\lambda^*)$，再由(2.80)式，$L(T^*,\lambda^*)\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0} L(T^*,\lambda)\leqslant\sup_{T\in B}\inf_{\lambda\geqslant 0}L(T,\lambda)\leqslant\sup_{T\in B} L(T,\lambda^*)$. 因此 $\sup_{T\in B} L(T,\lambda^*)=L(T^*,\lambda^*)$，此外，由定理2.65，$T^*$ 是(P)的解，所以(2.83)成立，且

$$EX_{T^*}-\lambda^*E(Y_{T^*}-\alpha)\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0}[EX_{T^*}-\lambda E(Y_{T^*}-\alpha)]=EX_{T^*}$$

所以(2.82)式成立。

由此推论可得求解(P)的一般方法：对任意的 $\lambda\geqslant 0$，求 $\sup_{T\in B}L(T,\lambda)$的问题，设其解为 $T(\lambda)$，然后求 λ，使 $EY_{T(\lambda)}\leqslant\alpha$ 且 $\lambda(EY_{T(\lambda)}-\alpha)=0$。它的解 λ^* 所相应的 $T(\lambda^*)$就是(P)的解。

但是求解 $\sup_{T\in B}L(T,\lambda)$的问题要化成真正的无约束条件的最优停止问题，还必须将 B 用

$$B_\lambda=\{t\in\mathscr{T}:E(X_t-\lambda y_t)^-<\infty\}$$

来代替。

定理2.67 设 $y_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，如对某个 $\mu<\lambda$，$\sup_{t\in B_\mu}E(X_t-\mu t)<\infty$，则对一切 $\lambda\geqslant 0$，有 $B_\lambda=B$. 特别地

$$\sup_{t\in B_\lambda}E(X_t-\lambda y_t)=\sup_{t\in B}E(X_t-\lambda y_t). \tag{2.84}$$

证明 由于 $E(X_t-\lambda y_t)^-\leqslant EX_t^-+\lambda Ey_t^+<\infty$，故 $B\subseteq B_\lambda$ 是明显的；反之，如 $S\in B_\lambda\subset B_\mu$，则

$$-\infty<E(X_S-\lambda y_S)\leqslant\sup_{T\in B_\mu}E(X_T-\mu Y_T)<\infty$$

于是 $X_S-\lambda Y_S, X_S-\mu Y_S$ 可积，故 Y_S 可积，又 $EX_S^-\leqslant E(X_S-\lambda y_S)^-<\infty$，故 $S\in B$，从而 $B_\lambda=B$.

前一段，我们借助于规划论的思想，构造 Lagrange 函数来求解约束最优停止问题，另一个很自然的想法是在 D_n 中定义 β_n，希望约束条件下的 Snell 包 β_n 也能发挥类似于 γ_n 的作用，但遗憾的是 (β_n) 并不具有 (γ_n) 类似的性质，其主要原因是 D_n 与通常的 C_n 不同，对上端运算不封闭，也即当 $t_1,t_2\in Dn$ 时，$t_1\vee t_2$ 不一定属于 D_n，虽然如此，我们还能得到一些好的结果。

现在讨论有限情形，此时考虑 $\{X_n,y_n,\mathscr{F}_n\}_{n=1}^N, N<\infty$. 补充定义 $\beta_{N+1}=\beta_N$，取 $\varepsilon=V_1^N+\alpha, \alpha_n=\varepsilon-V_n^y, n=1,2,\cdots,N$.

引理 2.68 若 $k<M\leqslant\infty$，t 为 $\{-y_n,\mathscr{F}n\}_{n=K}^M$ 的最优规则，则 $\forall A\in\mathscr{F}_k$，$t$ 也是 $\{-I_Ay_n,\mathscr{F}_n\}_{n=k}^M$ 的最优规则。

证明 如不然，则存在停止规则 $s\in\mathscr{T}, s\geqslant k, E(-y_sI_A)^-<\infty$，使得 $-Ey_sI_A<-Ey_tI_A$，令 $t'=sI_A+tI_{A^c}$，则 $t'\in\mathscr{T}$，$t'\geqslant k$，且 $E(y_{t'}^-)<\infty$，但是

$$E(-y_{t'})=-Ey_sI_A-Ey_tI_{A^c}>-Ey_t=V_k^y$$

矛盾。

引理 2.69 $\forall n<N, t\in D_n$，存在 $t'\in D_{n+1}$，使得在 $[t>n]$ 上 $t'=t$.

证明 令 S_0,t_0 分别为 $\{-y_k,\mathscr{F}_k\}_{k=n+1}^N\{-y_k,\mathscr{F}_k\}_{k=n}^N$ 的最优规则，令 $t'=S_0I_{(t=n)}+tI_{(t>n)}$，则易知 $t'\in\mathscr{T}, t'\geqslant n+1, E(-y_{t'}^-)<\infty$，故 $t'\in C_{n+1}^y$，且有

$$\begin{aligned}E(-y_{t'})&=E(-y_{S_0})I_{(t=n)}+E(-y_t)I_{(t>n)}\\&=E(-y_{S_0})+E(-y_t)I_{(t>n)}-E(-y_{S_0})I_{(t>n)}\\&=V_{n+1}^y+Ey_{S_0}I_{(t>n)}-Ey_tI_{(t>n)}\end{aligned}\tag{2.85}$$

往证

$$Ey_tI_{(t>n)}-Ey_{S_0}I_{(t>n)}\leqslant\varepsilon\tag{2.86}$$

如其不然，存在 $\delta>0$，使得

$$Ey_t I_{(t>n)} - Ey_{s_0} I_{(t>n)} = \varepsilon + \delta$$

令 $t^* = t_0 I_{(t=n)} + s_0 I_{(t>n)}$，则 $t^* \in C_n^N$，由引理 2.68得

$$\begin{aligned} V_n^N &= -Ey_{t_0} \\ &\leqslant -Ey_t + \varepsilon \\ &= \varepsilon - Ey_t I_{(t=n)} - Ey_t I_{(t>n)} \\ &\leqslant \varepsilon - Ey_{t_0} I_{(t_0=n)} - Ey_{s_0} I_{(t>n)} - \varepsilon - \delta \\ &= -Ey_{t^*} - \delta < E(-y_{t^*}) \end{aligned}$$

这与 V_n^N 的定义矛盾，从而(2.86)式成立，再由(2.85)式，$E(-y_{t'}) \geqslant V_{n+1}^N - \varepsilon = -\alpha_{n+1}$，所以 $t' \in D_{n+1}$.

引理2.70　对每一个 $n=1,2\cdots,N$

$$\beta_n \leqslant X_n \vee E(\beta_{n+1} | \mathscr{F}_n) \tag{2.87}$$

证明　$n=N$ 时结论显然成立；考虑$1 \leqslant n < N$，由引理2.69，$\forall\ t \in D_n$，存在 $t' \in D_{n+1}$，使得在$(t>n)$上 $t'=t$，故对任意的 $A \in \mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned} \int_A X_t &= \int_{A\cap(t=n)} X_n + \int_{A\cap(t>n)} X_{t'} \\ &\leqslant \int_{A\cap(t=n)} X_n + \int_{A\cap(t>n)} \beta_{n+1} \\ &\leqslant \int_A [X_n \vee E(\beta_{n+1} | \mathscr{F}_n)] \end{aligned}$$

由 A 的任意性及 $t \in Dn$ 的任意性，得

$$\beta_n \leqslant X_n \vee E(\beta_{n+1} | \mathscr{F}_n)$$

定理 2.71　在有限情形下，令 $\tau_n = \inf\ \{k \geqslant n;\ Xk \geqslant E(\beta_{k+1} | \mathscr{F}_k)\}$，$n=1,2,\cdots,N$，则

i) $E(X_{\tau_n} | \mathscr{F}_n) \geqslant \beta_n$，$n=1,2,\cdots,N$；

ii) 当 $\tau_n \in D_n$ 时，τ_n 是带约束问题的 α_n 最优规则。

证明　i) 当 $n=N$ 时，结论显然成立。假设对 $N, N-1,\cdots,n+1$，结论已成立，往证 n 的情形。

$\forall\ A \in \mathscr{F}_n$，有

$$\int_A X_{\tau_n} = \int_{A\cap(X_n \geqslant E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))} X_n + \int_{A\cap(X_n < E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))} X_{\tau_{n+1}}$$

$$\geqslant \int_{A\cap(X_n\geqslant E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))} X_n + \int_{A\cap(X_n<E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))} \beta_{n+1}$$

$$= \int_A X_n \vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

$$\geqslant \int_A \beta_n$$

因此，由 A 的任意性，得 $E(X_{\tau_n}|\mathscr{F}_n)\geqslant\beta_n$.

ii) 当 $\tau_n\in D_n$ 时，由(1)，$\forall\ t\in D_n$ 有

$$E(X_{\tau_n}|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n).$$

故 $EX_{\tau_n}\geqslant EX_t$，而 $Ey_{\tau_n}\leqslant\alpha_n$，所以 τ_n 是 α_n 最优。

引理2.69在有限情形中起着重要的作用，但在无限情形下，不再有相应的结论，如设 $\Omega=[0,1]$. $\mathscr{F}=\mathscr{B}[0,1]$，$P$ 为$[0,1]$上 lebesgue 测度，$A=[0,\frac{1}{2}]$，$B=[0,\frac{2}{3}]$，$y_1=-I_A$，$y_n=-(1-\frac{1}{n})I_B$，$n=2,3,\cdots$，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$经简单的计算可知，$V_1^\varepsilon=V_2^\varepsilon=\frac{2}{3}$，令 $\varepsilon=\frac{1}{12}$，$\alpha=-\frac{7}{12}$，取 $t=1\cdot I_A+2\cdot I_{A^c}$，则 $E(y_t)=-P(A)-(1-\frac{1}{2})P(B|A)=-\frac{7}{12}$，所以 $t\in D_1$. 但对于任何 $t'\geqslant2$，在$[t>1]$上，如有 $t'=t$，则

$$E(y_{t'})\geqslant-(1-\frac{1}{2})P(BA)-(1-\frac{1}{2})P(BA^c)$$

$$=-\frac{1}{2}P(B)=-\frac{1}{3}>-\frac{7}{12}$$

与 $t'\in D_2$矛盾(此时 $\alpha_2=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}$)。

为此需要修改 α_n 的定义。

令 $\varepsilon=V_1^\varepsilon+\alpha$，取 $\varepsilon_n\uparrow\uparrow(\varepsilon-v)$，其中 $v>0$，$\varepsilon_1=\varepsilon$.

$$\tilde{D}_n=\{t\in C_n^\varepsilon: Ey_t\leqslant\varepsilon_n-V_n^\varepsilon\}$$

引理2.72 对任意的 $t\in\tilde{D}_n$，存在 $t'\in\tilde{D}_{n+1}$，使得在$[t>n]$上，$t'=t$，其中 $n=1,2,\cdots$

证明 由 V_{n+1}^ε的定义，存在 $S_0\in C_{n+1}^\varepsilon$，使

$$-Ey_{S_0} \geqslant V^{\xi}_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{2} \tag{2.88}$$

令 $t'=S_0 I_{(t=n)}+tI_{(t\geqslant n+1)}$，则 $t'\in C^{\xi}_{n+1}$，且

$$\begin{aligned}
-Ey_{t'} &= -Ey_{S_0} I_{(t=n)} - Ey_t I_{(t>n)} \\
&= -Ey_{S_0} - Ey_t I_{(t>n)} + Ey_{S_0} I_{(t>n)} \\
&\geqslant V^{\xi}_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{2} - Ey_t I_{(t>n)} + Ey_{S_0} I_{(t>n)}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

往证

$$Ey_{S_0} I_{(t>n)} - Ey_t (I_{(t>n)}) \geqslant -\varepsilon_n \tag{2.90}$$

如其不然，则存在 $\delta>0$，使

$$Ey_{S_0} I_{(t>n)} - Ey_t I_{(t>n)} = -\varepsilon_n - \delta \tag{2.91}$$

对任意的 $A\in\mathscr{F}_n$，记 $V^{\xi}_n(A)$ 为 $(-I_A y_k)_{k=n}^{\infty}$ 的值，取 t_1 使 $-Ey_{t_1} I_{(t=n)} \geqslant V^{\xi}_n I_{(t=n)} - \eta_1$，这里 η_1 是充分小的正数。令

$$t^* = t_1 I_{(t=n)} + S_0 I_{(t>n)}$$

则

$$\begin{aligned}
V^{\xi}_n &\leqslant -Ey_t + \varepsilon_n \\
&= -Ey_t I_{(t=n)} - Ey_t I_{(t>n)} + \varepsilon_n \\
&\leqslant -Ey_{t_1} I_{(t=n)} + \eta_1 - Ey_t I_{(t>n)} + \varepsilon_n \\
&= -Ey_{t_1} I_{(t=n)} + \eta_1 - Ey_{S_0} I_{(t>n)} - \delta \\
&= -Ey_{t^*} + \eta_1 - \delta
\end{aligned}$$

取 η_1 充分小可使

$$V^{\xi}_n \leqslant -Ey_{t^*} - \frac{\delta}{2}$$

矛盾，所以(2.90)成立. 再由(2.89)式

$$-Ey_{t_1} \geqslant V^{\xi}_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n}{2} - \varepsilon_n \geqslant V^{\xi}_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$$

可见 $t'\in\tilde{D}_{n+1}$.

推论2.73　设 $n<m$，则对任意的 $t\in D_n$，存在 $t'\in D_m$，使得在 $[t\geqslant m]$ 上，$t'=t$.

证明　对于 $m=n+1$，就是引理2.72，如果对 $m=n+k-1$，存

在 $t_{k-1}\in D_{n+k-1}$，使当 $t\geqslant n+k-1$时，$t_{k-1}=t$ 考虑 $m=n+k$ 的情形，由于 $t_{k-1}\in D_{n+k-1}$，由引理2.72，存在 $t_k\in D_{n+k}$，使当 $t_{k-1}\geqslant n+k$ 时，$t_k=t_{k-1}$，而$(t\geqslant n+k)\subseteq(t\geqslant n-k-1)$，故在$(t\geqslant n+k)$上有 $t_k=t_{k-1}=t$.

由引理2.70的证明可以看出，(2.87)式对无限情形也是成立的。

引理2.74 若 $t\in D_1$，则对每个 $n=2,3,\cdots$

i) 在$(t\geqslant n)$上，有 $E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant\beta_n$；

ii) 在$(t>n)$上，$E(X_t^-|\mathscr{F}_n)\geqslant E(\beta_{n+1}^-|\mathscr{F}_n)$.

证明 i) 由推论2.73可得；

ii) 由 i)，可取 $t''\in D_{n+1}$，使在$[t>n]$上，$t''=t$，且

$$E(X_t|\mathscr{F}_{n+1})=E(X_{t''}|\mathscr{F}_{n+1})\leqslant\beta_{n+1}$$

再由 Jensen 不等式，知在$(t>n)$上

$$\begin{aligned}E(X_t^-|\mathscr{F}_n)&\geqslant E[E(X_t|\mathscr{F}_{n+1})^-|\mathscr{F}_n]\\&\geqslant E(\beta_{n+1}^-|\mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

引理2.75 若 $s,t\in D_1$，且对一切 n，有

$$\begin{cases}E(X_s|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n, & S>n\\ E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n, & S=n,t\geqslant n\end{cases}$$

则必有 $EX_s\geqslant EX_t$.

证明 参见定理2.8。

最后我们给出本节的主要定理，记

$$\tau_n=\inf\{k\geqslant n: X_k\geqslant E(\beta_{k+1}|\mathscr{F}_k)\}$$

定理2.76 i) 若 $\tau_1\in D_1$，且 τ_1可取，则 τ_1为 α 最优规则；

ii) 若问题(P)存在 α 最优规则 t_0，且 $t_0\geqslant\tau_1$，且 $Ey_{\tau_1}\leqslant\alpha$，则 τ_1也是问题(P)的最优规则。

证明 i) 由 τ_1的可取性，在$[\tau_1>j]$上，$E(X_{\tau_1}|\mathscr{F}_j)\geqslant X_j$，$j=1,2,\cdots$ 再由引理2.74，$\forall\ t\in D_1$，在$[t\geqslant j]$上，$E(X_t|\mathscr{F}_j)\leqslant\beta_j$，$j=1,2,\cdots$，故在$(\tau_1=j,t\geqslant j)$上，有

$$E(X_t|\mathscr{F}_j)\leqslant\beta_j\leqslant X_j\vee\in E(\beta_{j+1}|\mathscr{F}_j)=X_j$$

由引理2.75，便知 $EX_{\tau_1}\geqslant EXt$，故 τ_1是 α 最优。

ii) 由 $t_0\geqslant\tau_1$

$$\begin{aligned}\int X_{\tau_1}^- &= \int_{(\tau_1=t_0)} X_{t_0}^- + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)} X_k^- \\ &\leqslant \int_{(\tau_1=t_0)} X_{t_0}^- + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)} E(\beta_{k+1}^-|\mathscr{F}_k) \\ &\leqslant \int_{(\tau_1=t_0)} X_{t_0}^- + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)} E(X_{t_0}^-|\mathscr{F}_k) \\ &= EX_{t_0}^- < \infty.\end{aligned}$$

其中最后第二个不等式用到了引理2.74. 从而 $\tau_1\in D_1$，类似地可证 $EX_{\tau_1}\geqslant EX_{t_0}$，所以 τ_1也是 α 最优停止规则。

§2.11 多目标最优停止——多数原则

从应用的观点来看，考虑报酬函数是一个向量过程$(X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^p)^T$ 是更有意义的。即使是古典的秘书问题，当我们考察每一个应聘者时，我们观察到也是个向量过程，比如 X_n^1 表示她的表达能力，X_n^2 表示她的知识面，X_n^3 表示她的应变能力等等。于是我们面临的将是对 P 个目标的最优选取，这个问题也可以陈述成有 P 个人参加的博奕问题。文章[68～70]中提出了所谓多数的原则，也就是假定每个博奕者都可要求停止在任何一时刻，而观察的真正停止时刻是在有 $r(\leqslant p)$个人要求停止的时刻。

记 $X_n=(X_n^1\ X_n^2\cdots\ X_n^p)^T$ 是报酬向量，$C_n=(C_n^1\ C_n^2\cdots\ C_n^p)^T$ 是费用向量。

如果 p 个局中人组成的观察值决定停止在第 n 步，则每个局中人 $i(1\leqslant i\leqslant p)$，得到的 报酬是 X_n^i，他的费用为 C_n^i，因此他的纯收入为 $X_n^i-C_n^i$.

我们约定：i)每个局中人都可要求在任何时刻停止观察过程；ii)决策开始前，由全体局中人公认一个多数水平 $r(1\leqslant r\leqslant p)$；iii)一旦在某时刻要求停止的人数$\geqslant r$，则过程就停止。

令 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_1\ X_2\cdots\ X_n)$

$$\sigma_n^i=\begin{cases}1, & \text{局中人 } i \text{ 要求停止}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

且假定 σ_n^i 只依赖于当前的观察值 X_n，即 σ_n^i 是 $\sigma(X_n)$可测的。

定义2.8 对每个 $i(1\leqslant i\leqslant p)$，随机变量序列 $\sigma^i=(\sigma_1^i\ \sigma_2^i\cdots)$称为 i 的个体停止策略，记为 ISS.

以 S^i 表示局中人 i 的 ISS 的全体。

定义2.9 称 $\sigma=(\sigma^1\ \sigma^2\cdots\ \sigma^p)^T$ 为停止策略，记为 SS，它的全体记为 S.

定义2.10 对固定的数 $r(1\leqslant r\leqslant p)$，$\forall\ \sigma\in S$，称

$$t(\sigma)=\inf\{n\geqslant 1:\sum_{i=1}^{p}\sigma_n^i\geqslant r\} \tag{2.92}$$

为由停止策略 σ 产生的停时。

定义2.11 一个停止策略 ${}^*\sigma=({}^*\sigma^1,{}^*\sigma^2,\cdots,{}^*\sigma^p)^T$ 称为是平衡的停止策略，如果$\forall\ \sigma^i\in S^i$，有

$$Ey^i_{t({}^*\sigma(i))}\leqslant Ey^i_{t({}^*\sigma)},\quad i=1,2,\cdots,p \tag{2.93}$$

其中，${}^*\sigma(i)=({}^*\sigma^1,\cdots,{}^*\sigma^{i-1},{}^*\sigma^i,{}^*\sigma^{i+1},\cdots,{}^*\sigma^p)^T$，$y_n^i=X_n^i-C_n^i$，$i=1,2,\cdots$

从定义看出，对于平衡的停止策略，不存在另外的个体策略，在其它人不改变他们的 ISS 的条件下，使每个局中人得到更大的收益。

下面设 v_n^i，$i=1,2,\cdots,p$，$n=1,2,\cdots$是一列常数，令

$$y_n^i=\begin{cases}X_n^i-C_n^i, & \text{如果有不少于 } r \text{ 个人在第 } n \text{ 步要求停止}\\ v_n^i-C_n^i, & \text{否则}\end{cases} \tag{2.94}$$

记 $A_n^i \in \sigma(X_n)$ 为局中人 i 的停止事件，事件 $g_n^i(r)$ 是 $\{A_n^1, \cdots, A_n^{i-1}, A_n^{i+1}, \cdots, A_n^p\}$ 中恰好有 r 个发生的事件；$G_n^i(r) = \bigcup_{k=r}^{p} g_n^{(i)}(k)$，于是过程关于 $A_n^1, \cdots, A_n^p$ 在 n 时刻停止的事件

$$B_n = A_n^i \cap G_n^i(r-1) \cup (A_n^i)^c \cap G_n^i(r), \quad i=1,2,\cdots,p \tag{2.95}$$

引理2.77 对任意固定的 $A_n^1, \cdots, A_n^{i-1}, A_n^{i+1}, \cdots, A_n^p$

$$\max_{A_n^i \in \sigma(X_n)} E_{B_n}(X_n^i - C_n^i) + P(B_n^c)(v_n^i - C_n^i) \tag{2.96}$$

在 $A_n^i = \{X_n^i \geqslant v_n^i\}$ 上达到，即

$$E_{B_n}(X_n^i - C_n^i) + P(B_n^c)(v_n^i - C_n^i) \leqslant u_n^i - C_n^i \tag{2.97}$$

其中

$$\begin{aligned} u_n^i = & E(X_n^i - v_n^i)^+ P(g_n^i(r-1) \mid X_n^i) \\ & + E[(X_n^i - v_n^i)P(G_n^i(r) \mid X_n^i)] - v_n^i \end{aligned} \tag{2.98}$$

$$E_{B_n}\xi \triangleq E I_{B_n}\xi$$

证明 由于 $E_{B_n}(X_n^i - C_n^i) + P(B_n^c)(v_n^i - C_n^i) = E_{B_n}(X_n^i - v_n^i) + v_n^i - C_n^i$，而

$$\begin{aligned} B_n &= A_n^i \cap (g_n^i(r-1) \cup G_n^i(r)) \cup ((A_n^i)^c \cap G_n^i(r)) \\ &= A_n^i \cap g_n^i(r-1) \cup G_n^i(r) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & E_{B_n}(X_n^i - C_n^i) + P(B_n^c)(v_n^i - C_n^i) \\ = & E[(X_n^i - v_n^i) I_{A_n^i \cap g_n^i(r-1)} - (X_n^i - v_n^i) I_{G_n^i(r)}] + v_n^i - C_n^i \\ \leqslant & E[(X_n^i - v_n^i)^+ P(g_n^i(r-1) \mid X_n^i)] \\ & + E[(X_n^i - v_n^i) \cdot P(G_n^i(r) \mid X_n^i)] + v_n^i - C_n^i \\ = & u_n^i - c_n^i \end{aligned}$$

上式取等号，当且仅当 $A_n^i = \{X_n^i \geqslant v_n^i\}$。证毕。

上式左边就是局中人 i 的纯收入。由上述引理可见，局中人 i 为了得到最大的收益，必须在 $[X_n^i \geqslant v_n^i]$ 时请求停止，这个事件与其它决策者的停止事件是独立的。

现在讨论有限水平问题，即假定观察的最大次数为 N，并设

i) $\sigma_N^i=1, i=1,2,\cdots,p$,即观察到第 N 步必须停止；

ii) 报酬过程 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机的量，且$\forall\ i$，$E|X_n^i|<\infty$；

iii) 观察费用 $C_n=cn, n=1,2,\cdots,N$，其中 $c=(c^1,c^2,\cdots,c^p)^T$ 是常数向量。

限于考虑由停止策略产生的停时，我们记这种停时全体为 $\mathscr{T}'$，记

$$\mathscr{T}_n^i=\{t\in\mathscr{T}':t\geqslant n\}$$

$$V_n^i=\sup_{t\in\mathscr{T}_n^i}EY_t^i$$

由此，(2.94)中 $v_n^i-C_n^i$ 应该等于 V_{n+1}^i，也即 $v_n^i=V_{n+1}^i+c_n^i=V_{n+1}^i+c^i\cdot n$，在引理2.77中的 $u_n^i-c_n^i$ 就是 V_n^i，从而由(2.98)式，有

$$\begin{cases}V_n^i=E[(X_n^i-c^in-V_{n+1}^i)^+ +P(g_n^i(r-1)|X_n^i)]\\ \qquad +E[(X_n^i-c^in-V_{n+1}^i)P(G_n^i(r)|X_n^i)]+V_{n+1}^i\\ \qquad\qquad\qquad n\leqslant N-1 & (2.99)\\ V_N^i=EX_N^i-c_N^i & (2.100)\end{cases}$$

而且对于局中人 i 的最优的个体策略 ${}^*\sigma^i=({}^*\sigma_1^i\,{}^*\sigma_2^i\cdots\ {}^*\sigma_N^i)$ 应该为

$$\begin{cases}{}^*\sigma_n^i=1, & X_n^i-c^in\geqslant V_{n+1}^i\\ {}^*\sigma_n^i=0, & \text{否则}\end{cases}\qquad(2.101)$$

定理2.78 由全体最优的 ISS ${}^*\sigma^i$ 构成的策略 ${}^*\sigma=({}^*\sigma^1,{}^*\sigma^2,\cdots,{}^*\sigma^p)^T$ 是一个平衡的策略，且

$$E(Y_{t({}^*\sigma)})=V\qquad(2.102)$$

证明 记 $t^*=t({}^*\sigma)$，为方便计，设 $c^1=\cdots=c^p=c$，用归纳法可以证明

$$E(Y_{t^*}^i\ |t^*\geqslant n+1)=V_{n+1}^i\qquad(2.103)$$

事实上，当 $n=N-1$时，(2.103)显然成立；假设上式对 $N-1,N-2,\cdots,n+1$成立，往证 n 之情形，为此记 $A_n^i=\{\omega:X_n^i-cn\geqslant V_{n+1}^i\}$，$B_n$ 由(2.95)式定义。那么

$$E(Y_{t^*}^i|t^*\geqslant n)$$
$$=E(Y_n^i I_{B_n}+Y_{t^*}^i I_{B_n^c}|t^*\geqslant n)$$
$$=E_{B_n}(Y_n^i)+P(B_n^c)E(Y_{t^*}^i|t^*\geqslant n,B_n^c)$$
$$=E_{B_n}(X_n^i-cn)-P(B_n^c)E(Y_{t^*}^i|t^*\geqslant n+1)$$
$$=E_{B_n}(X_n^i-cn)-P(B_n^c)V_{n+1}^i \qquad \text{(由归纳假设)}$$
$$=E_{B_n}(X_n^i-cn)+P(B_n^c)(V_{n+1}^i+cn-cn) \qquad (2.104)$$

由引理2.77，取那里的 $v_n^i=V_{n+1}^i+cn$，则由(2.104)式

$$E(Y_{t^*}|t^*\geqslant n)$$
$$=E(X_n^i-cn-V_{n+1}^i)^+P(g_n^i(r-1)|X_n^i)$$
$$+E[(X_n^i-cn-V_{n+1}^i)P(G_n^i(r)|X_n^i]+V_{n+1}^i$$
$$=V_n^i$$

最后一个等式由(2.99)得出，前一个等式是由于取 $A_n^i=[X_n^i-cn\geqslant V_{n+1}^i]$ 之故，于是(2.103)式获证。

为了证明 $^*\sigma$ 是一个平衡的策略，只须对每个 i，比如取 $i=1$，来验证 (2.93)式。

对任意的个体策略 $\sigma^1=(\sigma_1^1,\cdots,\sigma_N^1)$，记

$$\sigma_{\{n\}}^1=(\sigma_1^1,\cdots,\sigma_n^1,{}^*\sigma_{n+1}^1,\cdots,{}^*\sigma_N^1)$$
$$\sigma_{\{0\}}^1={}^*\sigma^1=({}^*\sigma_1^1,{}^*\sigma_2^1,\cdots,{}^*\sigma_N^1)$$
$$\sigma_{\{N\}}^1=\sigma^1$$
$$t\{n\}=t(\sigma_{\{n\}})$$

我们只要证：$\forall\ \sigma^1$ 及 $1\leqslant n\leqslant N$，有

$$E(Y_{t\{n\}}^1)\leqslant E(Y_{t\{n-1\}}^1) \qquad (2.105)$$

由于

$$E(Y_{t\{n\}}^1)=E_{t\{n\}<n}Y_{t\{n\}}^1+P(t\{n\}\geqslant n)E(Y_{t\{n\}}^1|t\{n\}\geqslant n)$$
$$=E_{t\{n-1\}<n}Y_{t\{n-1\}}^1+P(t\{n-1\}\geqslant n)E(Y_{t\{n\}}^1|t\{n\}\geqslant n) \qquad (2.106)$$

令

$$A_n^1=\{\sigma_n^1=1\},\ {}^*A_n^i=\{{}^*\sigma_n^i=1\},i\neq 1$$
$$B_n=A_n^1\cap{}^*G_n^1(r-1)+(A_n^1)^c\cap{}^*G_n^1(r)$$

$$=\{\sigma_n^1+\sum_{i=2}^{p}{}^*\sigma_n^i\geqslant r\}$$

其中，${}^*G_n^i(r)=\sum_{k=r}^{p}{}^*g_n^i(k)$，${}^*g_n^i(r)$是$\{{}^*A_n^2,\cdots,{}^*A_n^p\}$中恰有$r$个发生的事件，由引理2.77及(2.103)式

$$
\begin{aligned}
&E(Y_{t(n)}^1\mid t\{n\}\geqslant n)\\
&=E_{B_n}(Y_n^1)+P(B_n^c)E(Y_{t(n)}^1\mid t\{n\}\geqslant n+1)\\
&=E_{B_n}(Y_n^1)+P(B_n^c)E(Y_{t^*}^1\mid t^*\geqslant n+1)\\
&=E_{B_n}(X'_n-cn)+P(B_n^c)V_{n+1}^1\\
&\leqslant V_n^1\\
&=E(Y_{t^*}^1\mid t^*\geqslant n)\\
&=E(Y_{t(n-1)}^1\mid t\{n-1\}\geqslant n)
\end{aligned}
$$

这里当且仅当$\sigma_n^i={}^*\sigma_n^i$时，等号成立从而由(2.106)式

$$EY_{t(n)}^1\leqslant EY_{t(n-1)}^1$$

定理得证。

上面的定理中，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立的假设是非本质的。事实上，只要在(2.98)中用对$\mathscr{F}_n^i=\sigma(X_1^i,\cdots,X_n^i)$的条件期望代替$E(\cdot\mid X_n^i)$，同样有类似的结论

$$
\begin{aligned}
&\max_{A_n^i\in\sigma(X_n)} E(I_{B_n}(X_n^i-c_n^i)\mid\mathscr{F}_{n-1}^i)+P(B_n^c\mid\mathscr{F}_{n-1}^i)(v_n^i-c_n^i)\\
&\leqslant E[(X_n^i-v_n^i)^+P(g_n^i(r-1)\mid\mathscr{F}_{n-1}^i]\\
&+E((X_n^i-v_n^i)P(G_n^i(r)\mid\mathscr{F}_{n-1}^i)]+v_n^i
\end{aligned}
$$

此时(2.99)式也应作相应的修改，只要在(2.104)式作适当的修改仍可证明(2.103)式，从而重证定理2.78，读者可作为练习。

例6 设$X_n=\{X_n^1,\cdots,X_n^p)\}^T$，$n=1,2,\cdots$是iid序列，且服从(0,1)上的均匀分布，那么可见$V_n^1=V_n^2=\cdots=V_n^p=V_n$，$X_n^i$的分布函数为

$$F(x)=P(X_n^i<x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 1\\ x, & x\in(0,1)\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

注意到现在所讨论的是无限情形，(2.99)式中 V_n^i 实际上都是有 限情形下的值，应记为 $v_n^i(N)$。现在令

$$V_n^i=\lim_{N\to\infty}V_n^i(N)$$

由于 $X_n^i\geqslant 0$，由定理2.24，可知这里的

$$V_n^i=\sup_{t\in\mathscr{T}_n^i}EY_t^i$$

在(2.99)式中，改记 $V_n^i=V_n^i(N)$，再令 $N\to\infty$，由单调收敛定理便得

$$V_n^i=E[(X_n^i-c^in-V_{n+1}^i)^+P(g_n^i(r-1)\mid X_n^i)]$$
$$+E[(X_n^i-c^in-V_{n+1}^i)P(G_n^i(r)\mid X_n^i)]+V_{n+1}^i,\quad n\geqslant 1$$

(2.107)

在(X_n)为 iid 的情形，有 $V_n^i(N)=V_{n+1}^i(N+1)$，从而 $V_n^i=V_{n+1}^i=V^i$，$n\geqslant 1$，对不同的 i，$V^1=V^2=\cdots=V^p\triangleq V$. 现在取

$$A_n^i=\{X_n^i\geqslant V\},P(A_n^i)=1-V$$

由独立性，容易算得

$$P(g_n^1(r-1)\mid X_n^1)=P(g_n^1(r-1))=C_{p-1}^{r-1}(1-V)^{r-1}V^{p-r}$$

$$P(G_n^1(r)\mid X_n^1)=P(G_n^1(r))=\sum_{k=r}^{p-1}C_{p-1}^k(1-V)^kV^{p-1-k}$$

$$E(X_n^1-V)^+=(1-V)^2/2$$

$$E(X_n^1-V)=\frac{1}{2}-V$$

由(2.107)式得

$$\frac{(1-V)^2}{2}C_{p-1}^{r-1}(1-V)^{r-1}V^{p-r}$$
$$+(\frac{1}{2}-V)\sum_{k=r}^{p-1}C_{p-1}^k(1-V)^k\cdot V^{p-1-k}=0\qquad(2.108)$$

设 $p=5$，则由(2.108)，对 $r=5,4,3,2,1$有

$$
\left.\begin{cases}
V-1=0, & r=5 \\
4V^2-2V-1=0, & r=4 \\
6V^3-V-1=0, & r=3 \\
4V^4+2V^3+V^2-1=0, & r=2 \\
V^5+V^4+V^3+V^2+V-1=0, & r=1
\end{cases}\right\} \tag{2.109}
$$

它们统称为平衡方程，r 愈小时，V 的值也小一些，这是由于每个局中人都受到“被迫停止”的强烈影响所致。如果多数水平较大，这种影响将会减弱。在 $r=p$ 的所谓一致情形，V 将最大，但是我们也要看到，这种“一致”情形，将会使实际的施行带来困难。

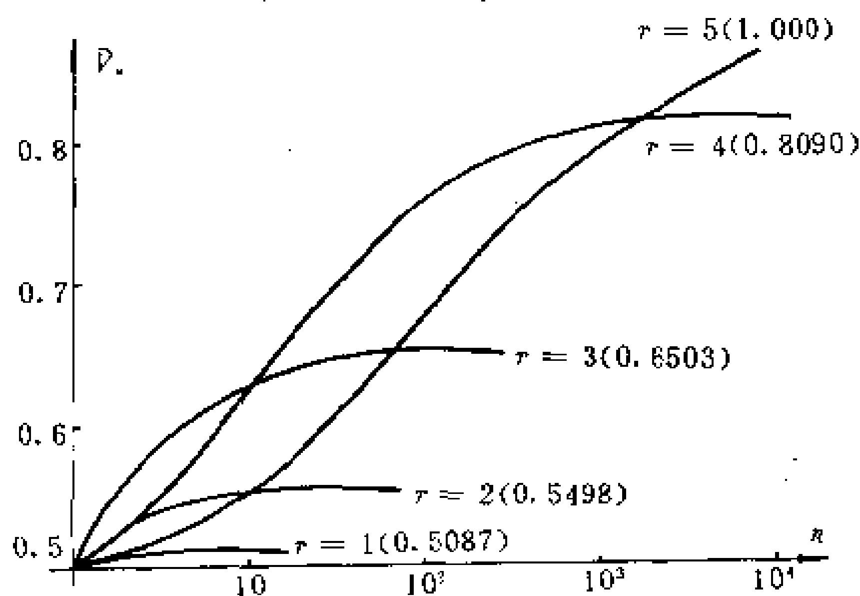
记 $\widetilde{V}_n=V_{N-n+1}^N$，则

$$
\lim_{n\to\infty}\widetilde{V}_n=\lim_{n\to\infty}V_1^n=V_1
$$

在(2.99)中令 $c^i=0$，可得

$$
\begin{cases}
\widetilde{V}_{n+1}=E[(X_{N-n}-\widetilde{V}_n)^+P(g_{N-n}(r-1)\mid X_{N-n})] \\
\qquad\qquad +E[(X_{N-n}-V_n)P(G_{N-n}(r)\mid X_{N-n})]+\widetilde{V}_n-C \\
\widetilde{V}_1=\dfrac{1}{2}
\end{cases}
$$

下图描绘了 $P=5$，$r=1,2,3,4,5$时，$\widetilde{V}_n$ 的图像，由此可见当 $n<10^3$时，$r=3,4$的情形已经很令人满意了。图中圆括号里面的数字为相应的 V_1的值，它就是(2.109)的解。



§2.12 多约束下的最优停止

设有概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$(\mathscr{F}_n)$是$\mathscr{F}$的一族上升σ代数族，且$\mathscr{F}_0$包含$\mathscr{F}$中一切零概集，$(X_n^1,X_n^2)_1^\infty$为可积的适应可测向量序列，$X_n=X_n^1+X_n^2$，$n=1,2,\cdots$ $\mathscr{T}$与$\overline{\mathscr{T}}$仍表示关于$(\mathscr{F}_n)$的停止规则与停时的集合。

$\overline{C}_n=\{t\in\overline{\mathscr{T}}:t\geqslant n$，且$EX_t^-<\infty\}$

$Cn=\overline{C}n\cap\mathscr{T}$

$D=\{t\in\mathscr{T}:EX_t^i\geqslant a_i,i=1,2$，且至少成立一个不等号$\}$

其中，$a_i=EX_{t_0}^i$，$i=1,2$，$t_0\in C_n$。

$$\gamma_n^i=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n\cap D}E(X_t^i\mid\mathscr{F}n),\quad i=1,2$$

$$\gamma_n=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n\cap D}E(X_t\mid\mathscr{F}_n)$$

$$V_n^i=\sup_{t\in C_n\cap D}EX_t^i,\quad i=1,2$$

$$V_n=\sup_{t\in C_n\cap D}EX_t$$

我们要考虑约束在$C_n\cap D$中的最优停止问题，即求解$\sup\limits_{t\in C_n\cap D}EX_t$。

定义2.12　停时t称为是协调n(严)可取的，是指在$[t>j\geqslant n]$上，$E(X_t^1\mid\mathscr{F}_j)>X_j^1$等价于$E(X_t^2\mid\mathscr{F}_j)\geqslant(>)X_j^2$　$a.s.$

引理2.79　设$t\in C_n\cap D$，令

$$t'=\inf\{k\geqslant n:E(X_t^i\mid\mathscr{F}_k)\leqslant X_k^i,i=1,2\}\tag{2.110}$$

并设$C_n\cap D$中的停时都是协调n严可取的，则

i) $t'\in C_n\cap D$，$t'\leqslant t$；

ii) $E(X_{t'}^i\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t^i\mid\mathscr{F}_n)$，$i=1,2$；

iii) t'对X^1且X^2都是n可取的。

证明 i) 容易看出 $t' \leqslant t < \infty a.s$，且 $t' \in C_n$，由

$$EX^i_{t'} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{(t'=k)} X^i_k \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \int_{[t'=k]} X^i_t = EX^i_t, \quad i=1,2$$

可知 $t' \in C_n \cap D$.

ii) 对 $j \geqslant n$，$\forall\ A \in \mathscr{F}_j$

$$\int_{A\cap(t'\geqslant j)} X^i_{t'} = \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t'=k)} X^i_k \geqslant \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t'=k)} X^i_t = \int_{A\cap(t'\geqslant j)} X^i_t$$

$$i=1,2$$

令 $j=n$，则得 $E(X^i_{t'}|\mathscr{F}_n) \geqslant E(X^i_t|\mathscr{F}_n)$，$i=1,2$.

iii) 在 $[t'>j\geqslant n]$ 上，$E(X^1_t|\mathscr{F}_j) > X^1_j$ 或者 $E(X^2_t|\mathscr{F}_j) > X^2_j$ 成立，所以在 $[t'>j\geqslant n]$ 上

$$E(X^1_{t'}|\mathscr{F}_j) > X^1_j \text{ 或 } E(X^2_{t'}|\mathscr{F}_j) > X^2_j$$

成立，由于 $t' \in C_n \cap D$ 是协调 n(严)可取的，所以 t' 是 X_1 且 X_2 n 可取的。

引理2.80 设 $t_1, t_2 \in C_n \cap D$，$\tau = t_1 \vee t_2$，t_1, t_2 是 X^1 且 X^2 n(严)可取的，则 $\tau \in C_n \cap D$，τ 是 X^1 且 $X^2 n$(严)可取的，且

$$E(X^i_\tau|\mathscr{F}_n) \geqslant (>) E(X^i_{t_j}|\mathscr{F}_n) \quad j=1,2; i=1,2, \tag{2.111}$$

证明 容易看出 $\tau \in C_n$，$\forall\ j \geqslant n$，$A \in \mathscr{F}_j$

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(t_1\geqslant j)} X^1_\tau &= \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t_1=k<t_2)} X^1_{t_2} + \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t_1=k=\tau)} X^1_k \\ &\geqslant (>) \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t_1=k<t_2)} X^1_k + \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\cap(t_1=k=\tau)} X^1_k \\ &= \int_{A\cap(t_1\geqslant j)} X^1_{t_1}\end{aligned}$$

取 $j=n$，得

$$\int_A X^1_\tau \geqslant (>) \int_A X^1_{t_1}$$

所以 $E(X^1_\tau|\mathscr{F}_n) \geqslant (>) E(X^1_{t_1}|\mathscr{F}_n)$，同理可证另一不等式：$E(X^1_\tau|\mathscr{F}_n) \geqslant (>) E(X^1_{t_2}|\mathscr{F}_n)$，将上两式中指标1改为2的结果仍然是成

立的，于是 $EX_\tau^i \geqslant EX_t^i, i=1,2$. 因此 $\tau \in C_n \cap D$，因为 $[\tau > j] = [t_1 > j] \cup [t_2 > j]$，故 τ 是 X^1 且 X^2 n 可取的.

下文需要对报酬序列 (X_n^1, X_n^2) 附加条件(*)：$\forall\ k \geqslant n, n \leqslant j \leqslant k-1$，总存在 $l \geqslant k$，使

$$E(X_l^i | \mathscr{F}_j) \geqslant X_j^i, \quad i=1,2 \tag{2.112}$$

引理2.81 设条件(*)满足，则

i) $\forall\ t \in C_n \cap D, k \geqslant n$，存在 $t' \in C_k \cap D$，使当 $t \geqslant k$ 时，$t' = t$;

ii) 在 $[t \geqslant k]$ 上

$$E(X_t^i | \mathscr{F}_k) \leqslant \gamma_k^i, E(X_t^{i-} | \mathscr{F}_k) \geqslant \gamma_k^{i-}, i=1,2 \tag{2.113}$$

证明 i) 令 $S_j = \inf\{l \geqslant k : E(X_l^i | \mathscr{F}_j) \geqslant X_j^i, i=1,2\}, j=n, n+1, \cdots, k-1$，则 S_j 是停时，且 $S_j \in C_k$. 事实上

$$\begin{aligned} EX_{S_j}^{i-} &= \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} X_m^{i-} = \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} E(X_m^{i-} | \mathscr{F}_j) \\ &\leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} X_j^{i-} = \int_{[S_j \geqslant k]} X_j^{i-} \\ &= EX_j^{i-} < \infty, (i=1,2) \end{aligned}$$

令

$$t' = tI_{[t \geqslant k]} + \sum_{j=n}^{k-1} S_j I_{[t=j]}$$

则 $t' \geqslant k$，容易证明 $t' \in C_k$，而由

$$\begin{aligned} EX_{t'}^i &= EX_t^i I_{(t \geqslant k)} + \sum_{j=n}^{k-1} EX_{S_j}^i I_{[t=j]} \\ &= EX_t^i + \sum_{j=n}^{k-1} \int_{[t=j]} [E(X_{S_j}^i | \mathscr{F}_j) - X_j^i] \\ &\geqslant EX_t^i, i=1,2 \end{aligned}$$

所以

$$t' \in C_k \cap D$$

ii) 由于 $t' \in C_k \cap D$，所以 $E(X_{t'}^i | \mathscr{F}_k) \leqslant \gamma_k^i, E(X_{t'}^{i-} | \mathscr{F}_k) \geqslant \gamma_k^{i-}, i=1,2$，而在 $[t' \geqslant k]$ 上，$t' = t$.

引理2.82 设序列 $X_n=(X_n^1,X_n^2)$ 满足条件(*),$t\in C_n\cap D$,$\sigma_n=\inf\{k\geqslant n: X_k^i\geqslant\gamma_k^i, i=1,2\}$,$t'=t\wedge\sigma_n$,则 $t'\in C_n\cap D$,$t'\leqslant t$,且

$$E(X_{t'}^i|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t^i|\mathscr{F}_n),\quad i=1,2 \tag{2.114}$$

证明 $\forall A\in\mathscr{F}_n$,由引理2.81之 ii)可知

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(\sigma_n<t)}X_{\sigma_n}^{i-}&=\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)}X_k^{i-}\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)}\gamma_k^{i-}\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A\cap(\sigma_n=k<t)}X_t^{i-}\\&=\int_{A\cap(\sigma_n<t)}X_t^{i-}\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\int_A X_{t'}^{i-}&=\int_{A\cap(\sigma_n<t)}X_{\sigma_n}^{i-}+\int_{A\cap(\sigma_n\geqslant t)}X_t^{i-}\\&\leqslant\int_{A\cap(\sigma_n<t)}X_t^{i-}+\int_{A\cap(\sigma_n\geqslant t)}X_t^{i-}\\&=\int_A X_t^{i-},\qquad i=1,2\end{aligned}$$

于是 $t'\in C_n$,由引理2.81之 ii)的另一条不等式,则可证得 $E(X_{t'}^i|\mathscr{F}n)\geqslant E(X_t^i|\mathscr{F}n)$,$i=1,2$。

引理2.83 设$(X_n^1,X_n^2)_1^\infty$是可积的适应向量序列,并设 $C_n\cap D$ 中的停时是协调 n 严可取的,那么存在 $C_n\cap D$ 中递增的 X_n^1 且 X_n^2 n 可取停时列(τ_k),使当 $k\to\infty$时

$$X_n^i\leqslant E(X_{\tau_k}^i|\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma_n^i,\quad i=1,2$$

成立,当条件(*)成立时,还可要求 $\tau_k\leqslant\sigma_n$ a. s.

证明 由 γ_n^i 之定义,存在 Cn 中的停时列$\{t_k(1)\}$,$\{t_k(2)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}E(X_{t_k(i)}^i|\mathscr{F}_n)=\gamma_n^i,\qquad i=1,2$$

不妨取 $t_1(1)=t_1(2)=n$，令

$$t_k^1=\inf\{m\geqslant n: E(X^i_{t_k(1)}\mid\mathscr{F}m)\leqslant X^i_m, i=1,2\}$$

$$t_k^2=\inf\{m\geqslant n: E(X^i_{t_k(2)}\mid\mathscr{F}m)\leqslant X^i_m, i=1,2\}$$

则由引理2.79可知

i) $t_k^i\in C_n\cap D, t_k^i<\infty \quad a.s.\ i=1,2$

ii) $E(X^1_{t_k^1}\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(X^1_{t_k(1)}\mid\mathscr{F}_n)$

$E(X^2_{t_{2k}^2}\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(X^2_{t_k(2)}\mid\mathscr{F}_n)$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}E(X^i_{t_k^i}\mid\mathscr{F}_n)=\gamma^i_n, i=1,2$。

iii) t_k^1,t_k^2 都是 X^1 且 X^2n 可取的。

令 $S_k=t_k^1\vee t_k^2, k\geqslant 1$，由引理2.80，可知 $S_k\in C_n\cap D, k=1,2,\cdots$，而 $E(X^i_{S_k}\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(X^i_{t_k^i}\mid\mathscr{F}_n), i=1,2$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}E(X^i_{S_k}\mid\mathscr{F}_n)=\gamma^i_n, i=1,2$。最后令

$$\tau_1=S_1=t_1^1\vee t_2^1,\cdots,\tau_k=\tau_{k-1}\vee S_k,\cdots$$

则 $\tau_k\uparrow$，对一切 k，$\tau_k\in C_n\cap D$，$E(X^i_{\tau_k}\mid\mathscr{F}n)\geqslant E(X^i_{S_k}\mid\mathscr{F}_n)$，$E(X^i_{\tau_k}\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(X^i_{\tau_{k-1}}\mid\mathscr{F}_n), i=1,2$. 所以，$X^i_n\leqslant E(X^i_{\tau_k}\mid\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma^i_n, i=1,2$.

由引理2.82可知，在条件（$*$）下，还可要求 $\tau_k\leqslant\sigma_n \quad a.s.$

推论2.84 设对任意的 $t\in C_n\cap D$，t 是协调 n 严可取的，则

$$\gamma^1_n+\gamma^2_n=\gamma_n \tag{2.115}$$

证明 由引理2.83，存在 (τ_k)，$\tau_k\in C_n\cap D$

$$X^1_n+X^2_n\leqslant E(X^1_{\tau_k}+X^2_{\tau_k}\mid\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma^1_n+\gamma^2_n$$

而 $E(X^1_{\tau_k}+X^2_{\tau_k}\mid\mathscr{F}n)$，所以 $\gamma^1_n+\gamma^2_n\leqslant\gamma_n$。另一方面，$\gamma_n\leqslant\gamma^1_n+\gamma^2_n$ 总是成立的。

定理2.85 设任意的 $t\in C_n\cap D$ 是协调 n 严可取的，则

i) $\gamma^i_n=X^i_n\vee E(\gamma^i_{n+1}\mid\mathscr{F}n),\quad n\geqslant 1; i=1,2$ (2.116)

ii) $V^i_n=E\gamma^i_n,\quad i=1,2$ (2.117)

iii) $V_n=E\gamma_n$ (2.118)

证明 i) $\forall\ n, t\in C_n\cap D$，记 $B=\{t=n\}$，由引理2.81，在 $B^c=\{t$

$>n\}$上，$E(X_t^i|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant\gamma_{n+1}^i$，从而在 B^c 上，$E(X_t^i|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma_{n+1}^i|\mathscr{F}_n)$，$i=1,2$，于是，$E(X_t^i|\mathscr{F}_n)\leqslant I_B X_n+I_{B^c}E(\gamma_{n+1}^i|\mathscr{F}_n)$，从而

$$\gamma_n^i\leqslant X_n^i\vee E(\gamma_{n+1}^i|\mathscr{F}_n),\quad i=1,2$$

而由引理2.83，存在 $C_{n+1}\cap D$ 中叙列(τ_k)，使得

$$E(X_{\tau_k}^i|\mathscr{F}_{n+1})\uparrow\gamma_{n+1}^i$$

于是 $\gamma_n^i\geqslant E(X_{\tau_k}^i|\mathscr{F}_n)\uparrow E(\gamma_{n+1}^i|\mathscr{F}_n)$，从而可证得(2.116)。

ii) 由2.83可得。

iii) 由推论2.84易得。

引理2.86 设 $V_n^i<\infty$，$i=1,2$，并设任意的 $t\in C_n\cap D$ 是协调 n 严可取的，(t_k)为 $C_n\cap D$ 中一列递增的停止规则，使得 $EX_{t_k}^i\uparrow V_n^i$，则

$$P(\lim_{k\to\infty}t_k\geqslant\sigma_n)=1,\qquad i=1,2$$

证明 可逐字重复引理2.19的证明，其中由 $EX_{\tau_k}^i\geqslant EX_{t_k}^i+\varepsilon$，$i=1,2$，一方面得到 $\tau_k\in Cn\cap D$，另方面导出 $V_n^i\geqslant V_n^i+\varepsilon$ 之矛盾。

引理2.87 若 $s,t\in Cn\cap D$，对一切 $k\geqslant n$

$$E(X_t^i|\mathscr{F}_k)\geqslant X_k^i,\quad 在[s\geqslant k]上，i=1,2\qquad(2.119)$$

$$E(X_t^i|\mathscr{F}_k)\leqslant X_k^i,\quad 在[s=k\leqslant t]上，i=1,2\qquad(2.120)$$

则

$$E(X_s^1+X_s^2)\geqslant E(X_t^1+X_t^2)$$

证明留给读者，下面是主要结果。

定理2.88 i) 设(X_n^1,X_n^2)满足条件(*)，$\sigma_n=\inf\{k\geqslant n;X_k^i\geqslant\gamma_k^i,i=1,2\}\in C_n\cap D$，且是 X^1 及 X_n^2 可取的，则它是 $C_n\cap D$ 中最优的；

ii) 若 $V_n<+\infty$，条件(*)满足，并设 $C_n\cap D$ 中的停时都是协调 n 严可取的，且存在关于 $Xn=X_n^1+X_n^2$ 的最优规则 t，则 $\sigma_n\leqslant t$，σ_n 最优，X^1 及 X^2 n 可取，且在$[\sigma_n>k\geqslant n]$上

$$E(X_{\sigma_n}^i|\mathscr{F}k)=\gamma_k^i,\quad k\geqslant n;i=1,2\qquad(2.121)$$

证明 i) 由于 σ_n 是 X^1 及 $X^2 n$ 可取，(2.119)式对 $s=\sigma_n$ 成立，再由引理2.81，在$[\sigma_n=k,t\geqslant k]$上

$$E(X_t^i|\mathscr{F}k)\leqslant\gamma_k^i\leqslant X_k^i,\quad i=1,2$$

即(2.120)式成立，从而 σ_n 最优。

ii) 由引理2.86，$\sigma_n \leqslant t$ a.s.，由引理2.82，$t' = \sigma_n \wedge t = \sigma_n$ 是 $C_n \cap D$ 中最优的，为证明 σ_n 是 X^1 及 X_n^2 可取的，只要证明(2.121)式成立(因为 σ_n 是协调 n 严可取的)，为此记 $A = \{\sigma_n > k, E(X_{\sigma_n}^i | \mathscr{F}_k) < \gamma_k^i, i=1或2\}$，不妨设 A 上 $E(X_{\sigma_n}^1 | \mathscr{F}_k) < \gamma_k^1$，若 $P(A) > 0$，则 $\int_A X_{\sigma_n}^1 < \int_A \gamma_k^1$，由定理2.83，存在 $t \in C_k \cap D$，使得 $\int_A X_t^1 > \int_A X_{\sigma_n}^1$. 令 $\tau = tI_A + \sigma_n I_{A^c}$，则 $\tau \in C_n$，$EX_\tau^1 > EX_{\sigma_n}^1$. 取 $\varepsilon < EX_\tau^1 - EX_{\sigma_n}^1$，由于在 A 上，$E(X_{\sigma_n}^1 | \mathscr{F}_k) \leqslant \gamma_k^1$，$\int_A X_{\sigma_n}^2 \leqslant \int_A \gamma_k^2$，且存在一列 $\{t_l\} \uparrow \subseteq C_k \cap D$，使得 $E(X_{t_l}^2 | \mathscr{F}_k) \uparrow \gamma_k^2$，所以存在 $t^0 \in C_k \cap D$，使得 $\int_A X_{t^0}^2 > \int_A X_{\sigma_n}^2 - \varepsilon$，令 $t' = t^0 \vee t$，则 $t' \in C_k \cap D$，则引理2.80

$$\int_A X_{t'}^2 \geqslant \int_A X_{t^0}^2 > \int_A X_{\sigma_n}^2 - \varepsilon$$

而另一方面，由引理2.80，$E(X_{t'}^1 | \mathscr{F}_k) > E(X_t^1 | \mathscr{F}_k)$，所以

$$\int_A X_{t'}^1 > \int_A X_t^1 > \int_A X_{\sigma_n}^1$$

令 $\tilde{\tau} = t' I_A + \sigma_n I_{A^c}$，则

$$EX_{\tilde{\tau}}^1 = \int_A X_{t'}^1 + \int_{A^c} X_{\sigma_n}^1 > EX_\tau^1 > EX_{\sigma_n}^1 + \varepsilon$$

$$EX_{\tilde{\tau}}^2 = \int_A X_{t'}^2 + \int_{A^c} X_{\sigma_n}^2 > EX_{\sigma_n}^2 - \varepsilon$$

从而 $EX_{\tilde{\tau}} > EX_{\sigma_n}$. 矛盾！

最后我们给出下述关于最优规则的存在性定理。

定理2.89　设可积适应序列 $(X_n^1, X_n^2)_1^\infty$ 满足条件(＊)，且 i) $E \sup_n X_n^i < \infty$，$i=1,2$；ii) $\forall t \in C_n \cap D$，t 是协调 n 严可取的，并设 $a_1 < V_n^1$ 或 $a_2 < V_n^2$ 成立，则当 $\sigma_n < \infty$ a.s. 时，σ_n 便是 $C_n \cap D$ 中最优规则，且当 $x_n^i \to -\infty (i=1,2)$ 时，$\sigma_n < \infty$ a.s. 成立。

证明　由引理2.83，存在 $\{\tau_k\} \subset C_n \cap D$，$\tau_k \uparrow$，$\tau_k \leqslant \sigma_n$，$EX_{\tau_k}^i \uparrow V_n^i$，$i=1,2$，由条件 i)，$V_n < \infty$，再由引理2.86，$\sigma_n = \lim_{k \to \infty} \tau_k$.

由条件 i)，应用 Fatou 引理

$$\begin{aligned}V_n^i &= \lim_{k\to\infty} EX_{\tau_k}^i \\ &\leqslant E(\limsup_{k\to\infty} X_{\tau_k}^i) \\ &\leqslant \int_{(\sigma_n<\infty)} X_{\sigma_n}^i + \int_{(\sigma_n=\infty)} \limsup_{k\to\infty} X_{\tau_k}^i\end{aligned}$$

若 $P(\sigma_n<\infty)=1$，则 $EX_{\sigma_n}^i \geqslant V_n^i \geqslant a_i$，可见 $\sigma_n \in C_n \cap D$，且 $EX_{\sigma_n} \geqslant V_n^1 + V_n^2 \geqslant V_n$，因而它是最优的，且当 $X_n^i \to -\infty$ 时，必有 $\sigma_n<\infty$　a. s.

注16　这里协调 n 严可取的要求是本质的，它表示(X_n^1, X_n^2)之间某种关系。

注17　条件(*)只是为了保证引理2.81，如果条件(*)不成立，也就意味着存在 k 及 $j\leqslant k-1$，使得对任何 $l\geqslant k$，$E(X_l|\mathscr{F}_j)\leqslant X_j$，因此我们只须讨论有限情形 $n\leqslant k$ 的最优停止问题，由此可见条件(*)是非本质的。

§2.13　多目标最优停止——有效规则

多目标最优停止是多目标决策理论的一部分，如果我们能找到一组权函数，把各个目标的报酬加权平均，则可将多目标最优停止化为单目标的最优停止问题，这种情形就可不必讨论了。在§2.11中曾提出过一个多数规则，把多目标决策化为多人对策的问题，现在从另一角度来讨论多目标的最优停止问题。

设有 p 维可积的随机向量序列$(X_n)_1^\infty \triangleq (X_n^1, X_n^2 \cdots, X_n^p)_1^\infty$，它定义在某一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上，记 $C_n=\{t\in\mathscr{T}: t\geqslant n, EX_t^{i-}<\infty, i=1,2,\cdots,p\}$。我们要研究

$$\sup_{t\in C_n} EX_t \triangleq \sup_{t\in C_n}(EX_t^1 \cdots\ EX_t^p) \tag{2.122}$$

的最优停止问题。

但是(2.122)的提法是不确切的，因为 R^p 不是一个全序集，为

此先引入下面的概念。

定义2.13　R^p 空间中偏序关系"$\geqslant$""$>$""$\gg$"分别是指下面的关系：$\forall\ y=(y^1,y^2,\cdots,y^p)$ 及 $y_0=(y_0^1,y_0^2,\cdots,y_0^p)$，$y\geqslant y_0$是指对一切$1\leqslant i\leqslant p$，$y^i\geqslant y_0^i$；$y>y_0$是指 $y\geqslant y_0$，且至少存在一个 i，使 $y^i>y_0^i$，$y\gg y_0$是指对一切$1\leqslant i\leqslant p$，$y^i>y_0^i$。

令

$$C_{t^*}^{>}=\{t: t\in C_n \text{ 且 } EX_t>EX_{t^*}\}$$

$$C_{t^*}^{\gg}=\{t: t\in C_n \text{ 且 } EX_t\gg EX_{t^*}\}$$

$$\widetilde{C}_{t^*}=\{t: t\in C_n, EX_t \text{ 与 } EX_{t^*} \text{ 不可比较}\}$$

定义2.14　称 $t^*\in C_n$ 为多目标问题(2.122)的绝对最优停止规则，是指 $C_{t^*}^{>}=\Phi$，$\widetilde{C}_{t^*}=\Phi$，也即对一切 $t\in C_n$，$EX_t\leqslant EX_{t^*}$，C_n 中全体绝对最优规则记为 C^*。

定义2.15　称 $t^*\in C_n$ 是(2.122)的有效停止规则，是指 $C_{t^*}^{>}=\Phi$，换言之，不存在 $t\in C_n$，使得 $EX_t>EX_{t^*}$，全体有效规则记为 C_e。

定义2.16　称 $t^*\in C_n$ 是(2.122)的弱有效停止规则，是指 $C_{t^*}^{\gg}=\Phi$，换言之，不存在 $t\in C_n$，使得 $EX_t\gg EX_{t^*}$ 全体弱有效规则记为 C_w。

显然

$$C^*\subseteq Ce\subseteq C_w$$

对于多目标最优停止问题，我们只能求出全部或一系列有效(或弱有效)的停止规则，供决策者择取，决策者可以根据另外的原则(比如选最小的有效停止，或者偏向于某一目标)在这些有效或弱有效规则任选一个，求有效规则的方法往往是设法把它们化归为一个单目标问题。

下面设 $h(\cdot)$为 R^p 上实值函数。

定理2.90　设 $h(y)$为单调增函数，若

$$\sup_{t\in C_n} h(EX_t) \tag{2.123}$$

有最优停止规则，则其任何最优规则都是(2.122)的有效停止规则。

证明 设 t_0 为(2.123)的最优规则，如果 t_0 不是(2.122)的有效规则，则必存在 $t\in C_*$，使 $EX_t > EX_{t_0}$，从而 $h(EX_t) > h(EX_{t_0})$，与 t_0 的最优性矛盾。

定理2.91 设 $h(y)$ 在 R^p 上单调不减，且对(2.123)的任一最优规则 t_0

$$D=\{t\in C_*: EX_t > EX_{t_0}\}\neq\Phi$$

存在 $\sup\limits_{t\in C_*\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p}EX_t^i$ 的最优规则，则(2.123)的最优规则中必有(2.122)的有效规则。

证明 设 t_0 为(2.123)的最优规则，若 t_0 不是(2.122)的有效规则，则 $D=C_{t_0}^{>}\neq\Phi$，由假设，存在 $\sup\limits_{t\in C_*\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p}EX_t^i$ 的最优规则 t^*，则可证明 $t^*\in Ce$. 事实上，若 $t^*\notin Ce$，则必有 $\bar{t}\in Cn$，使得 $EX_{\bar{t}} > EX_{t^*} > EX_{t_0}$，从而 $\bar{t}\in C_*\cap D$. 但 $\sum\limits_{i=1}^{p}EX_{\bar{t}}^i > \sum\limits_{i=1}^{p}EX_{t^*}^i$，与 t^* 为 $\sup\limits_{t\in C_*\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p}EX_t^i$ 最优规则矛盾，由 $t^*\in D$，得 $EX_{t^*} > EX_{t_0}$，故 $h(EX_{t^*})\geqslant h(EX_{t_0})=\sup\limits_{t\in C_*}h(EX_t)$，这说明若 t_0 不是(2.122)的有效规则，必存在 $\sup\limits_{t\in C_*}h(EX_t)$ 的最优规则 t^* 是(2.122)的有效规则。

写 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$，令

$$h(y,\lambda)=\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i y_i^{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\gamma}},\quad 1\leqslant\gamma<+\infty;\ y_i\geqslant 0$$

于是当向量 $\lambda\gg 0$ 时，$h(y,\lambda)$ 关于 $y\geqslant 0$ 为单调增加；当 $\lambda > 0$ 时，$h(y,\lambda)$ 关于 $y\geqslant 0$ 单调不减，记

$$C_\lambda^* = \{t\in C_*: h(EX_t,\lambda)=\sup_{t\in C_*}h(EX_t,\lambda)\}$$

定理2.92 设 $EX_t > 0$（对任意的 $t\in C_*$），则

$$\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*\subseteq C_{ew},$$

$$\bigcup_{\lambda \gg 0} C_\lambda^* \subseteq C_e$$

证明 设 $t_0 \notin C_{we}$，则存在 $\tilde{t} \in Cn$，使 $EX_{\tilde{t}} \gg EX_{t_0}$，故当 $\lambda > 0$ 时，$h(EX_{\tilde{t}}, \lambda) > h(EX_{t_0}, \lambda)$，这表明 $t_0 \overline{\in} C_\lambda^*$，矛盾；同理可证另一个式子。

注18 如果 $f_i = \inf\limits_{t \in cn} EX_t^i > -\infty$，$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$，令 $X_n' = X_n - f$，则 $EX_t' \geqslant 0$，而关于 (X_n') 的 C_{we}' 与 C_{we} 是相同的，取适当的 h，$C_\lambda'^* = C_\lambda^*$.

注19 当取 $\lambda_j = 1, \lambda_k = 0 (k \neq j)$，则 $\lambda > 0$，则由定理2.92，每个分目标的最优规则都是(2.122)的弱有效规则。

引理2.93 假定 $V_n^i \triangleq \sup\limits_{t \in C_n} EX_t^i < \infty (i = 1, 2, \cdots, p)$ 且(2.122)存在绝对最优规则 t_0，则

i) $\sigma_n \leqslant t_0 < \infty \quad a.s.$，其中

$$\sigma_n = \inf\{k \geqslant n : X_k^i \geqslant \gamma_k^i, i = 1, 2, \cdots, p\} \qquad (2.124)$$

$$\gamma_k^i = \operatorname*{esssup}_{t \in C_k} E(X_t^i | \mathscr{F}_k) \qquad (2.125)$$

ii) $\forall\, t_1, t_2 \in C_n$，$0 < \alpha < 1$，存在 $t^* \in C_n$，使得

$$EX_{t^*}^i \geqslant \alpha EX_{t_1}^i + (1 - \alpha) EX_{t_2}^i, \quad i = 1, 2, \cdots, p \qquad (2.126)$$

证明 i) t_0 是绝对最优，对每一个分目标 t_0 也是最优的，因此由引理2.22，$X_{t_0}^i = \gamma_{t_0}^i$，$i = 1, 2, \cdots, p$，于是 $\sigma_n \leqslant t_0 < \infty$， $a.s.$

ii) 令 $t^* = \inf\{k \geqslant n : X_k^i \geqslant \alpha E(X_{t_1}^i | \mathscr{F}_k) + (1-\alpha) E(X_{t_2}^i | \mathscr{F}_k), i = 1, 2, \cdots, p\}$，则 t^* 是 $\mathscr{F}_n$ 停时。$t^* \geqslant n$. 在 $[\sigma_n = k]$ 上

$$X_k^i = \gamma_k^i \geqslant \alpha E(X_{t_1}^i | \mathscr{F}_k) + (1-\alpha) E(X_{t_2}^i | \mathscr{F}_k)$$

所以 $t^* \leqslant \sigma_n < \infty a.s$，易见 $t^* \in C_n$，而

$$\begin{aligned} EX_{t^*}^i &= \sum_{m=n}^{\infty} \int_{[t^* = m]} X_m^i \\ &\geqslant \alpha \sum_{m=n}^{\infty} \int_{[t^* = m]} X_{t_1}^i + (1 - \alpha) \sum_{m=n}^{\infty} \int_{[t^* = m]} X_{t_2}^i \\ &= \alpha EX_{t_1}^i + (1-\alpha) EX_{t_2}^i, \quad i = 1, 2, \cdots, p \end{aligned}$$

证毕。

定理2.94　设 $h(y,\lambda)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i y_i$，且 $V_i^*<\infty, i=1,2,\cdots,p$，(2.112)问题存在绝对最优规则 t_0，则

$$\bigcup_{\lambda>0} C_\lambda^* = C_{we}$$

其中

$$C_\lambda^* = \{t^* \in C_n : h(EX_{t^*},\lambda) = \sup_{t\in C_n} h(EX_t,\lambda)\} \qquad (2.126)$$

证明　首先证明 $\bigcup_{\lambda>0} C_\lambda^* \subseteq C_{we}$，设对某个 $\lambda>0$，$t^*\in C_\lambda^*$，但 $t^* \overline{\in} C_{we}$，则必存在 $\bar{t}\in C_n$，使 $EX_{\bar{t}} \gg EX_{t^*}$，于是 $\lambda^T EX_{\bar{t}} > \lambda^T EX_{t^*}$，这与 $t^*\in C_\lambda^*$ 矛盾，这里 λ^T 表示 λ 的转置。

往证反包含，即要证 $\forall\ t_0\in C_{we}$，必存在 $\lambda>0$，使 $t_0\in C_\lambda^*$，令

$$\mathscr{V}=\{V\in R^p : V\ll 0\}$$

$$\mathscr{X}=\{X\in R^p : X\geqslant EX_{t_0}-EX_t, \forall\ t\in C_n\}$$

易见 $\mathscr{V}$ 是凸集，由引理2.93，可证 $\mathscr{X}$ 是凸的。事实上，$\forall\ z_1,z_2\in\mathscr{X}$，则 $\forall\ 0<\alpha<1$，$\forall\ t\in C_n$

$$\begin{aligned}&\alpha z_1+(1-\alpha)z_2\\ \geqslant&\alpha(EX_{t_0}-EX_t)+(1-\alpha)(EX_{t_0}-EX_t)\\ =&EX_{t_0}-EX_t.\end{aligned}$$

由于 $t_0\in C_{we}$，可见 $\mathscr{V}\cap\mathscr{X}=\varnothing$，且 $\mathscr{V}$ 是开集，故由凸集分离定理，存在 $\lambda\neq 0$，使得对一切 $v\in\mathscr{V}$，$z\in\mathscr{X}$ 有 $\lambda^T z\geqslant\lambda^T v$，因为 $v\ll 0$，$0\in\mathscr{X}$，故必 $\lambda>0$，取 $z=EX_{t_0}-EX_t$，令 $v\to 0$，则 $\lambda^T EX_{t_0}\geqslant\lambda^T EX_t$，所以 $t_0\in C_\lambda^*$，这就证明了 $C_{we}\subseteq\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*$.

函数 $h(y,\lambda)=\min_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i|y_i|$ 不是 R^p 上的单调函数，但对函数 h，仍然有

定理2.95　设对 $t\in C_n$，$EX_t\gg 0$，则

$$\bigcup_{\lambda\gg 0} C_\lambda^* = C_{we}$$

其中，C_λ^* 照(2.126)，由这里的 h 所定义。

证明　先证 $\bigcup_{\lambda\gg 0} C_\lambda^*\subseteq C_{we}$，如果存在 $\lambda\gg 0$ 及 $t_0\in C_\lambda^*$，但 $t_0\overline{\in} C_{we}$，则

存在 $\bar{t}\in C_*$，使得 $EX_{\bar{t}}\gg EX_{t_0}$，于是 $\forall\ \lambda\gg 0$，有某个 $1\leqslant i_0\leqslant p$，使

$$\min_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i EX_{\bar{t}}^i=\lambda_{i_0}EX_{\bar{t}}^{i_0}>\lambda_{i_0}EX_{t_0}^{i_0}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant p}\lambda_i EX_{t_0}^i$$

这表明 $t_0\overline{\in}C_\lambda^*$ 矛盾。

往证 $C_{we}\subseteq\bigcup_{\lambda\gg 0}C_\lambda^*$，设对任何 $\lambda\gg 0$，C_* 中停止规则 $t_0\overline{\in}C_\lambda^*$. 取

$$\bar{\lambda}_i=(EX_{t_0}^i\cdot\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{EX_{t_0}^j})^{-1}$$

则 $\bar{\lambda}_i>0$，$\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i=1$，于是有 $\bar{t}\in C_*$，使得

$$\min_{1\leqslant i\leqslant p}\bar{\lambda}_i EX_{\bar{t}}^i>\min_{1\leqslant i\leqslant p}\bar{\lambda}_i EX_{t_0}^i$$

于是

$$\bar{\lambda}_i EX_{t_0}^i=(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{EX_{t_0}^j})^{-1}$$

$$=\min_{1\leqslant i\leqslant p}\bar{\lambda}_i EX_{t_0}^i<\min_{1\leqslant i\leqslant p}\bar{\lambda}_i EX_{\bar{t}}^i\leqslant\bar{\lambda}_i EX_{\bar{t}}^i,\quad i=1,2,\cdots,p$$

故 $t_0\overline{\in}C_{we}$，得证。

第三章　马尔可夫序列的最优停止

在众多的实际问题中，我们所观察的随机序列具有无后效性或者称为马氏性，因此在最优停止理论中专门研究马氏序列或马氏过程的最优停止是十分必要的；而且马氏过程理论中的转移函数与算子半群使得最优停止理论的内容更加丰富多彩。

§3.1　基本假设

设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)_{n=0}^{\infty}$ 是一个取值在可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 上的齐次马氏链。我们仍用 $\mathscr{T}$ 或 $\overline{\mathscr{T}}$ 表示 $(\mathscr{F}_n)$ 一停止规则与广义规则的全体，记

$\mathscr{B}=\{g\mid g$ 是 $\mathscr{B}$ 可测实值函数，且 $\forall\, x\in E,\ -\infty<g(x)\leqslant\infty\}$

我们用 $g(X_n)$ 表示停在 n 时所得的报酬，其中 $g\in\mathscr{B}$，称

$$V(x)=\sup\{E_xg(X_t):\tau\in\mathscr{T}\text{，且}\ \forall\, x\in E,E_xg(X_t)\text{ 有意义}\}$$

为相应于报酬函数 $g(x)$ 的值函数，简称为值函数，记

$$C(g)=\{\tau\in\mathscr{T}:\text{且}\forall\ x\in E,E_x(g(X_\tau))^-<\infty\}$$

容易证明

$$V(X)=\sup_{\tau\in C(g)}E_xg(X_\tau)$$

事实上，我们只须证 $\forall\ x\in E,\tau\in\mathscr{T},E_xg(X_\tau)$ 有意义，必存在 $\tau_0\in C(g)$ 使 $E_xg(X_{\tau_0})\geqslant E_xg(X_\tau)$。为此，当

i) $E_xg^-(X_\tau)=\infty$ 时，令 $\tau_0=0$，则 $E_xg(X_{\tau_0})=g(x)>-\infty=E_xg^-$

(X_τ);

ii) $E_x g^-(X_\tau)<\infty$时，令 $\tau_0=\tau I_{(X_0=x)}+0\cdot I_{(X_0\neq x)}$，显然 $\tau_0\in\mathscr{T}$，且对任何 $x'\in E$

$$E_{x'}g^-(X_{\tau_0})=E_{x'}g^-(X_\tau)I_{(X_0=x)}+E_{x'}g^-(X_0)I_{(X_0\neq x)}$$

所以当 $x'=x$ 时

$$E_{x'}g^-(X_{\tau_0})=E_{x'}g^-(X_0)I_{X_0\neq x)(X_0=x')}\leqslant g^-(x')<\infty$$

这表明 $\tau_0\in C(g)$，而且

$$E_x g(X_{\tau_0})=\int_{(X_0=x)}g(X_\tau)P^x(\mathrm{d}w)=E_x g(X_\tau)$$

定义 3.1 $\forall\ \varepsilon\geqslant0$，规则 $\tau_\varepsilon\in C(g)$ 称为是(ε,V)最优的，是指 $\forall\ x\in E$

$$V(x)-\varepsilon\leqslant E_x g(X_{\tau_\varepsilon})\tag{3.1}$$

特别称$(0,V)$最优规则为最优规则。

第 2 章中 A_2'条件取下面的方式

$$g(X_\infty)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n).$$

我们仍称为 A_2'条件。同样可在 $\overline{\mathscr{T}}$ 或相应的 $\overline{C}(g)=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}}:\forall\ x\in E,E_x g^-(X_\tau)<\infty\}$中考虑广义的最优规则，此时相应的值函数为

$$\overline{V}(x)\triangleq\sup_{\tau\in\overline{C}(g)}E_x g(X_\tau)$$

其中，$\overline{C}(g)=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}}$ 且$\forall\ x\in E,E_x(g(X_\tau))^-<\infty\}$。

§3.2 有限情形

开始讨论有限情形，也就是假定我们所观察到的马氏链是 $(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)n=0,1,2,\cdots,N$.

记 $\quad C_n^N(g)=\{\tau\mid\tau\in C(g);n\leqslant\tau\leqslant N\},C_0^N(g)\triangleq C^N(g)$

$$V_n^N(x)=\sup_{\tau\in C_n^N(g)}E_x g(X_\tau),x\in E,V_0^N(x)\triangleq V^N(x)$$

$$\gamma_n^N(x)=\underset{\tau\in C_n^N(g)}{\text{esssup}}E(g(X_\tau)\mid\mathscr{F}_n),\ \gamma_0^N(x)\triangleq V^N(x)$$

这里 $n=0,1,2,\cdots,N$，$\gamma_n^N(X)$便是 Snell 包函数。

我们感兴趣的问题是：$C^N(g)$中是否存在最优规则？类似于别尔曼方程的将是什么？Snell 包函数有什么性质？

下面将限制报酬函数 g 属于类 L

$$L\triangleq\{g\mid g\in\mathscr{B}\text{ 且}\forall\ x\in E,E_xg^-(X_1)<\infty\}$$

这里 $E_xg^-(X_1)$表示 $E_x(g(X_1)^-)$。

定义算子 $Q:L\to L$ 如下：$\forall\ x\in E,g\in L$

$$Qg(x)=g(x)\vee Tg(x) \tag{3.2}$$

其中 $Tg(x)=E_xg(X_1)$，并归纳定义

$$Q^ng(x)=Q(Q^{n-1}g(x))=Q^{n-1}g(x)\vee TQ^{n-1}g(x)$$

容易证明

$$Q^ng(x)=g(x)\vee TQ^{n-1}g(x) \tag{3.3}$$

引理 3.1 $\forall\ x\in E$

$$V^N(x)\leqslant Q^Ng(x) \tag{3.4}$$

证明 当 $N=0$ 时，(3.4)显然成立，设 $N>0$，令 $A=[\tau=N]$，这里 $\tau\in C^N(g)$，显然

$$A=\Omega\setminus\bigcup_{i=0}^{N-1}[\tau=i]\in\mathscr{F}_{N-1},$$

因此

$$\begin{aligned}E_xg(X_\tau)&=E_xI_{A^c}g(X_\tau)+E_xI_Ag(X_N)\\&=E_xI_{A^c}g(X_{\tau\wedge(N-1)})+E_xI_AE_{X_{N-1}}g(X_1)\\&=E_xI_{A^c}g(X_{\tau\wedge(N-1)})+E_xI_AE_{X_{\tau\wedge(N-1)}}g(X_1)\\&\leqslant E_x(g(X_{\tau\wedge(N-1)})\vee E_{X_{\tau\wedge(N-1)}}g(X_1))\\&=E_xQg(X_{\tau\wedge(N-1)})\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}E_xg(X_\tau)&\leqslant E_xQg(X_{\tau\wedge(N-1)})\\&\leqslant E_xQ^2g(X_{\tau\wedge(N-2)})\end{aligned}$$

$$\leqslant \cdots$$
$$\leqslant E_x Q^N g(X_0)$$
$$= Q^N g(x)$$

所以 $$V^N(x) = \sup_{\tau \in C^N(g)} E_x g(X_\tau) \leqslant Q^N g(x)$$

引理 3.2 $N=0,1,2,\cdots,x\in E$

$$Q^N g(x) = E_x g(X_{\sigma^N}) \tag{3.5}$$

其中

$$\sigma^N = \inf\{0 \leqslant k \leqslant N : g(X_k) = Q^{N-k} g(X_k)\} \tag{3.6}$$

证明 用归纳法。$N=0$ 是明显的，如果(3.5)对 N 成立，往证 $N+1$ 之情形。对任何 $x\in E$，如 $P_x(\sigma^{N+1}=0)=1$，则由(3.6)式

$$P_x(g(X_0) = Q^{N+1} g(X_0)) = 1$$

因此 $Q^{N+1}g(x) = g(x) = E_x g(X_0) = E_x g(X_{\sigma^{N+1}})$，(3.5)式得证；如 $P_x(\sigma^{N+1}=0)<1$，由于 $\{\sigma^{N+1}=0\}\in \mathscr{F}_0$，而由马氏过程的零壹律知 $P_x(\sigma^{N+1}=0)=0$。下面证明 $\sigma^{N+1}=1+\theta_1\sigma^N$，$P_x-a.s$，其中 θ_1 为推移算子，事实上

$$\begin{aligned}
\theta_1\sigma^N &= \theta_1 \inf\{0\leqslant k\leqslant N : Q^{N-k}g(X_k) = g(X_k)\} \\
&= \inf\{0\leqslant k\leqslant N : Q^{N-k}g(X_{k+1}) = g(X_{k+1})\} \\
&= \inf\{0\leqslant k\leqslant N : Q^{N+1-(k+1)}g(X_{k+1}) = g(X_{k+1})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1+\theta_1\sigma^N \\
&= \inf\{1\leqslant k+1\leqslant N+1 : Q^{N+1-(k+1)}g(X_{k+1}) = g(X_{k+1})\} \\
&= \sigma^{N+1} \quad (\because \quad P_x(\sigma^{N+1}\geqslant 1)=1)
\end{aligned}$$

由 $\sigma^{N+1}>0 \quad P_x-a.s$，故

$$Q^{N+1}g(X_0) > g(X_0) \quad P_x-a.s$$

即 $Q^{N+1}g(x)>g(x)$。于是由归纳假设

$$\begin{aligned}
Q^{N+1}g(x) &= g(x) \vee E_x Q^N g(X_1) \\
&= E_x Q^N g(X_1) \\
&= E_x(E_{X_1} g(X_{\sigma^N}))
\end{aligned}$$

$$=E_x\theta_1 g(X_{\sigma^N})$$
$$=E_x g(X_{\theta_1\sigma^N}(\theta_1\omega))$$
$$=E_x g(X_{1+\theta_1\sigma^N})$$
$$=E_x g(X_{\sigma^{N+1}})$$

引理 2 得证，其中第四个等号由于马氏链具强马氏性，因此对于 $\sigma(X_n, n=1,2,\cdots)$ 可测的可积的随机变量 η 及停时 $\tau<\infty$，有

$$E_x(\theta_\tau\eta\,|\,\mathscr{F}_\tau)=E_{X_\tau}\eta$$

注 1 取 $B\in\mathscr{F}m$，用引理 3.1 同样的手法可证：$E_x g(X_\tau)I_B\leqslant E_x Q^{N-m}g(X_m)I_B$，因此

$$E_x(g(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}m)\leqslant Q^{N-m}g(X_m) \tag{3.7}$$

定理 3.3 设 $g\in L$，则

i) $V^N(x)=Q^N g(x)$, $\quad N=0,1,2,\cdots$ (3.8)

ii) $V^N(x)=g(x)\vee TV^{N-1}(x)$, $V^0(x)=g(x)$ (3.9)

iii) $\sigma^N=\inf\{0\leqslant m\leqslant N: V^{N-m}(X_m)=g(X_m)\}$ 是 $C_0^N(g)$ 中的最优规则，即

$$E_x g(X_{\sigma^N})=V^N(x) \tag{3.10}$$

证明 由引理 3.1 及 3.2 知

$$-\infty<V^N(x)\leqslant Q^N g(x)=E_x g(X_{\sigma^N})\leqslant V^N(x)$$

(3.8)式获证。(3.9)式是显然的，因为

$$Q^{N-1}g(x)=V^{N-1}(x)$$

又从(3.6)式及 $V^{N-m}(x)=Q^{N-m}(x)$ 可知(3.10)式是成立的，亦即 σ^N 是 $C^N(g)$ 中最优规则。

注 2 如 $E_x g^-(X_k)<\infty$, $k=1,2,\cdots,N$，则 $C^N(g)=\mathscr{T}^N\equiv\{\tau\in\mathscr{T}: 0\leqslant\tau\leqslant N\}$，$\sigma^N$ 是 $\mathscr{T}^N$ 中最优规则

注 3 令

$$\Gamma_n^N=\{x: V^{N-n}(x)=g(x)\} \tag{3.11}$$

由定理 3.3 可知

$$\sigma^N=\inf\{0\leqslant n\leqslant N: X_n\in\Gamma_n^N\} \tag{3.12}$$

称 Γ_n^N 为停止域,$G_n^N=E-N_n^N$ 为继续观察域,显然

$$\Gamma_N^N=E$$

$$G_N^N=\Phi$$

$$G_{N-1}^N=\{x:V^1(x)>g(x)\}=\{x:Tg(x)>g(x)\}$$

且

$$\Phi=G_N^N\subseteq G_{N-1}^N\subseteq\cdots\subseteq G_0^N=\{x:V^N(x)>g(x)\}$$

因此若 x 属于在某一步要继续观察的域,则 x 必属于前面几步的继续观察域。

下面的定理表达了 Snell 包函数 $\gamma_n^N(x)$ 的性质,特别指出了它与值函数的关系。

定理 3.4 设 $g\in\mathscr{L}$,则对一切 $0\leqslant n\leqslant N$ 有

i) $V_n^N(x)=E_xV^{N-n}(X_n)$ (3.13)

ii) $\gamma_n^N(x)=V^{N-n}(X_n),P_x-a.s$ (3.14)

iii) $\sigma_n^N=\inf\{n\leqslant k\leqslant N;V^{N-k}(X_k)=g(X_k)\}$ (3.15)

是 $C_n^N(g)$ 中最优规则,即

$$E_xg(X_{\sigma_n^N})=\sup_{\tau\in C_n^N(g)}E_xg(X_\tau)\tag{3.16}$$

$$E_x[g(X_{\sigma_n^N})|\mathscr{F}_n)]=\operatorname*{esssup}_{\tau\in C_n^N(g)}E_x(g(X_\tau)|\mathscr{F}_n)\tag{3.17}$$

iv) $(V^{N-n}(X_n),\mathscr{F}_n,P_x)$ 是控制 $(g(X_n))_{n=0}^N$ 的最小正则上鞅。

证明 由(3.7)式及(3.8)式,$\forall\ \tau\in C_m^N(g)$

$$E_x(g(X_\tau)|\mathscr{F}_m)\leqslant Q^{N-m}g(X_m)=V^{N-m}(X_m)\tag{3.18}$$

由定理 3.3 知

$$\sigma_{N-m}=\inf\{0\leqslant k\leqslant N-m:V^{N-m-k}(X_k)=g(X_k)\}$$

是 $C^{N-m}(g)$ 中最优规则,即 $E_xg(X_{\sigma_{N-m}})=V^{N-m}(x)$. 而

$$\begin{aligned}\theta_m\sigma_{N-m}&=\inf\{0\leqslant k\leqslant N-m:V^{N-m-k}(X_{k+m})=g(X_{k+m})\}\\&=\inf\{m\leqslant l\leqslant N,V^{N-l}(X_l)=g(X_l)\}-m\\&=\sigma_m^N-m\end{aligned}\tag{3.19}$$

故

$$\theta_m X_{\sigma_{N-m}} = X_{\sigma_{N-m}(\theta_m(\omega))}(\theta_m(\omega)) = X_{\sigma_m^N-m}(\theta_m(\omega)) = X_{\sigma_m^N}(\omega)$$

由马氏性，$\forall\ x \in E$

$$\begin{aligned} Ex[g(X_{\sigma_m^N}) \mid \mathscr{F}_m] &= Ex[(\theta_m g(X_{\sigma_{N-m}}) \mid \mathscr{F}_m] \\ &= E_{X_m} g(X_{\sigma_{N-m}}) \\ &= V^{N-m}(X_m) \\ &= Q^{N-m} g(X_m) \end{aligned}$$

由(3.18)式，$\forall\ \tau \in C_m^N(g)$

$$E_x[g(X_\tau) \mid \mathscr{F}_m] \leqslant Q^{N-m} g(X_m) = E_x[g(X_{\sigma_m^N}) \mid \mathscr{F}_m] \tag{3.20}$$

因此，$E_x g(X_\tau) \leqslant E_x g(X_{\sigma_m^N})$，从而 $\sigma_m^N \in C_m^N(g)$. 由(3.20)式可见

$$\gamma_m^N(x) = E_x[g(X_{\sigma_m^N}) \mid \mathscr{F}_m] = V^{N-m}(X_m);$$

$$V_m^N(x) = E_x g(X_{\sigma_m^N}) = E_x V^{N-m}(X_m)$$

i)，ii)，iii)全部得证，往证 iv)。显然 $V^{N-n}(X_n) \geqslant g(X_n)$，且 $V^N(x) \in L$

$$\begin{aligned} & V^{N-n}(X_n) \\ = & Q^{N-n} g(X_n) \\ \geqslant & TQ^{N-n-1} g(X_n) = E_{X_n} Q^{N-n-1} g(X_1) \\ = & E_x[Q^{N-n-1} g(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] \\ = & E_x[V^{N-n-1}(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] \end{aligned}$$

这表明$(V^{N-n}(X_n), \mathscr{F}_n, P_x)_{n=0}^N$是控制 $g(X_n)$的上鞅，因为 N 是有限的，因此对任何取$\{0,1,\cdots,N\}$中的停止规则是正则的，往证它的最小性，如有$(\xi_n)_{n=0}^N$，也是控制$(g(X_n))_{n=0}^N$的上鞅，则

$$\xi_N \geqslant g(X_N) = V^{N-N}(X_N)$$

$$\begin{aligned} & \xi_{N-1} \\ \geqslant & E_x(\xi_N \mid \mathscr{F}_{N-1}) \\ \geqslant & E_x[g(X_N) \mid \mathscr{F}_{N-1}] \\ = & E_{X_{N-1}} g(X_1) = Tg(X_{N-1}) \end{aligned}$$

所以

$$\xi_{N-1} \geqslant Qg(X_{N-1}) = V^{N-(N-1)}(X_{N-1})$$

同理可证 $\xi_n \geqslant V^{N-n}(X_n)$对一切 $0 \leqslant n \leqslant N$ 成立。证毕。

注 4 由(3.14)及(3.3)式可得别尔曼方程

$$\begin{aligned}
&\gamma_n^N(x) \\
&= V^{N-n}(X_n) \\
&= Q^{N-n}g(X_n) \\
&= g(X_n) \vee E_{X_n}Q^{N-n-1}g(X_1) \\
&= g(X_n) \vee E_x(Q^{N-n-1}g(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \\
&= g(X_n) \vee E_x(\gamma_{n+1}^N(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

由(3.13)及(3.14)式，我们得到熟悉的结果

$$V_n^N = E_x\gamma_n^N(x) \tag{3.22}$$

由(3.9)及(3.13)式，有

$$V^N(x) = g(x) \vee V_1^N(x) \tag{3.23}$$

例 1 第一标准的古典秘书问题。现在我们用马氏链的方法研究第一章研究过的问题，承用 § 1. 的记号，$y_1, y_2, \cdots, y_N$ 构成马氏链，但是 $P(y_n = j \mid y_{n-1} = i) = P(y_n = j) = 1/n$，可见它不是齐次马氏链，为了应用本节的结果，我们可以将非齐次马氏链齐次化，一般地，如果$\{\xi_t, t \in T\}$是一个定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上取值$(E, \mathscr{B})$上的马氏过程，令 $E' = T \times E$，$\mathscr{B}' = \{\Gamma \subset E'; \forall\ S \in T, \Gamma_S \triangleq \{x; (s, x) \in \Gamma\} \in \mathscr{B}\}$，$\Omega' = T \times \Omega$，对任何 $\omega' = (s, \omega)$，定义 $\xi'_t(\omega') = (t+s, \xi_{t+s}(\omega))$，对任何 $A \in \mathscr{B}'$，$A_s \triangleq \{x; (s, x) \in A\} \in \mathscr{B}$，令

$$P'_{x'}(A) = P_{s,x}(A_s), \quad x' = (s, x)$$

$$P'(t, x', \Gamma) = P(s, x, s+t, \Gamma_{s+t})(\Gamma \in \mathscr{B}')$$

容易证明$\{\xi'_t(\omega'); t \in T\}$便是定义在 Ω' 上以 $P'(t, x', \Gamma)$为转移函数的齐次马氏链。

由马氏链$\{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$可构造齐次马氏链 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, P_z\}$，$n = 1, 2, \cdots, N$，其中 $z_k = (k, y_k)$对 $z = (k, y)$置

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{k}{n}, & y=1\\ 0, & \text{如 } y>1\end{cases}$$

由

$$P(b_n(\omega)=1\mid\mathscr{F}_n)=P(b_n=1\mid y_n)=\begin{cases}\dfrac{n}{N}, & y_n=1\\ 0, & y_n>1\end{cases}$$

容易证明

$$\begin{aligned}&P(b_\tau(\omega)=1)\\ &=\sum_{k=1}^{N}\int_{(\tau=k)}P(b_k=1\mid\mathscr{F}_k)P(\mathrm{d}\omega)\\ &=E_{(1,1)}g(Z_\tau)\end{aligned}$$

由 (3.14)式，$\gamma_n^N(z)=V_0^{N-n}(Z_n(\omega'))=V_0^{N-n}(n,y_n(\omega))$所以它只是 y_n 的函数，由(3.21)式

$$\gamma_n^N(n,y)=g(n,y)\vee\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_{n+1}^N(n+1,i)\tag{3.24}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$，且

$$\gamma_N^N(N,y)=g(N,y)=\begin{cases}1, & y=1\\ 0, & y=0\end{cases}\tag{3.25}$$

令 $\gamma^*=\inf\{n\geqslant1:\sum\limits_{k=n}^{N-1}\frac{1}{k}\leqslant0\}$，则对一切 $m\geqslant\gamma^*$，由(3.24)与(3.25)式可算得($i>1$)

$$\gamma_{N-1}^N(1)=\frac{N-1}{N}$$

$$\gamma_{N-1}^N(i)=\frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}$$

$$\gamma_{N-2}^N(1)=\frac{N-2}{N}$$

$$\gamma_{N-2}^N(i)=\frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)$$

$\cdots$

$$\gamma_m^N(1)=\frac{m}{N}$$

$$\gamma_m^N(i)=\frac{m}{N}(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{m})$$

进一步

$$\gamma_{\gamma^*-1}^N(1)=\frac{r^*-1}{N}\vee\frac{1}{\gamma^*}[\frac{\gamma^*}{N}+\frac{(\gamma^*-1)\gamma^*}{N}(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{\gamma^*})]$$

$$=\frac{r^*-1}{N}[\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{r^*-1}]$$

$$\gamma_{\gamma^*-1}^N(i)=\frac{1}{r^*}\sum_{j=1}^{r^*}r_{\gamma^*}^N(j)$$

$$=\frac{1}{r^*}\{\frac{r^*}{N}+(r^*-1)[\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{r^*}]\}$$

$$=\gamma_{\gamma^*-1}^N(1)$$

由(3.24)可得

$$\gamma_1^N(1)=\gamma_2^N(1)=\cdots$$
$$=\gamma_{\gamma^*-1}^N(1)$$
$$=\frac{\gamma^*-1}{N}(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{\gamma^*-1})$$

而由定理 3.3,最优规则为

$$\sigma^N=\inf\{1\leqslant n\leqslant 1:\gamma_m^N(y_m)=g(m,y_m)\}$$
$$=\inf\{r^*\leqslant n\leqslant N:y_n=1\}$$

与第一章 § 1.1 的结果是相同的。

§ 3.3 过份函数与最小过份函数

对马氏链最优停止的理论,过份函数与最小过份函数在值函数 $V(x)$ 与 $\bar{V}(x)$ 的构造及性质的研究中起着重要的作用。

设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)$, $n=0,1,2,\cdots$ 是一个齐次马氏链,其中 $x\in E$

定义 3.2 函数 $f\in\mathscr{B}$ 称为是过份函数，如果 $\forall\ x\in E, Tf(x)\triangleq E_x f(X_1)$ 有意义，且

$$Tf(x)\leqslant f(x)$$

定义 3.3 过份函数 f 称为是函数 $g\in B$ 的最小过份控制是指

i) $\forall\ x\in E, f(x)\geqslant g(x)$;

ii) 如果 $h(x)$ 是过份函数，且 $\forall\ x\in E, h(x)\geqslant g(x)$，则有 $h(x)\geqslant f(x)$。

记

$$\mathscr{B}(A^-)=\{f\in\mathscr{B}, \text{且满足 } A^- \text{条件, 即} \forall\ x\in E, E_x\sup_{n\geqslant 0} f^-(X_n)<\infty\}$$

$$\mathscr{B}(A^+)=\{f\in\mathscr{B}, \text{且满足 } A^+ \text{条件, 即} \forall\ x\in E, E_x\sup_{n\geqslant 0} f^+(X_n)<\infty\}$$

$$\mathscr{B}(A^+,A^-)=\mathscr{B}(A^+)\bigcap\mathscr{B}(A^-)$$

$$\mathscr{L}(A^\pm)=\mathscr{L}\bigcap\mathscr{B}(A^\pm), \mathscr{L}(A^+,A^-)=\mathscr{L}(A^+)\bigcap\mathscr{L}(A^-)$$

$$\mathscr{B}(a^-)=\{f\in\mathscr{B}, \text{且} \forall\ x\in E, a^- \text{条件成立, 即 } E_x f^-(X_\infty)<\infty\}$$

其中 $f(X_\infty)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(X_n)$。易知

$$\mathscr{B}(A^-)\subseteq\mathscr{B}(a^-)\subseteq\mathscr{B}$$

$$\mathscr{B}(A^-)\doteq\mathscr{L}(A^-)\subseteq\mathscr{L}\subseteq\mathscr{B}$$

过份函数具有下面的性质

性质 1 常值函数是过份函数。

性质 2 如果 f,g 都是非负过份函数，a,b 为非负常数，则 $af+bg$ 也是非负过份函数。

性质 3 设 $f_n\in\mathscr{L}$ 是过份函数的非降序列，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\in L$ 也是过份函数。

性质 4 设 f 是过份函数，且 $E_x f^-(X_n)<\infty$，且 $n=0,1,2,\cdots$，则 $\{f(X_n),\mathscr{F}_n,P_x\}_0^\infty$ 是上鞅。

证明 $E_x(f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)=E_{X_n}f(X_1)=Tf(X_n)\leqslant f(X_n)$

性质 5 如过份函数 f 满足 A^- 条件，即 $E_x\sup\limits_{n\geqslant 0} f^-(X_n)<\infty$，则 $\forall\ m=0,1,2,\cdots, f_m(x)=T_m f(x)$ 也是过份函数，且当 $m\geqslant n$ 时，$T_m f$

$(x)\leqslant T_n f(x)$，这里 $T_n f(x)\stackrel{\triangle}{=}T(T(\cdots(T(f(x))\cdots))$（共有 n 重 T）。

证明　用归纳法，$m=0$ 是成立的，如果 $m=k$ 时成立，则当 $m=k+1$ 时

$$Tf_{k+1}(x)=E_x f_{k+1}(X_1)=E_x Tf_k(X_1)\leqslant E_x f_k(X_1)=f_{k+1}(x)$$

性质 6　如果过份函数 $f,g\in\mathscr{L}$，则 $f\wedge g$ 也是过份函数。

性质 7　如果过份函数 f 满足，$\sup\limits_{n\geqslant 0}E_x f^-(X_n)<\infty$，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(X_n)$ $a.s$ 存在（有限或等于 $+\infty$），特别如果存在随机变量 η，使 $E_x|\eta|<\infty$，且 $f(X_n)\geqslant E_x(\eta|\mathscr{F}_n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)a.s$ 存在。

证明　由上鞅的收敛定理可得。

引理 3.5　设过份函数 $f\in\mathscr{L}(A^-)=\mathscr{B}(A^-)$，则 $\forall$ 两个停时 τ,σ，$P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，则

$$E_x(f(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant f(X_\sigma)\qquad P_x-a.s,x\in E$$

证明　由 $f\in\mathscr{B}(A^-)$ 及性质 7，$\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$ 存在，于是 $f(X_\infty)=\lim\limits_{n\to\infty} f(X_\infty)$. 如果 $f\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$，则由于 $\{f^-(X_n)\}_{n=0}^\infty$ 一致可积，因而右闭。由 Doob 停止定理，便知（3.26）成立，对于一般的 $f\in\mathscr{B}(A^-)$，则

$$f^b(x)=f(x)\wedge b\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$$

因此

$$E_x(f^b(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant f^b(X_\sigma)$$

由 Fatou 引理

$$E_x(\lim_{b\to\infty} f^b(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\lim_{b\to\infty} f^b(X_\sigma)\qquad(3.26)$$

而

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to\infty} f^b(X_\sigma)\\&=\lim_{b\to\infty} f^b(X_\sigma)I_{(\sigma<\infty)}+\lim_{b\to\infty} f^b(X_\infty)I_{(\sigma=\infty)}\\&=f(X_\sigma)I_{(\sigma<\infty)}+\lim_{b\to\infty}\lim_{n\to\infty}(f(X_n)\wedge b)I_{(\sigma=\infty)}\\&=f(X_\sigma)I_{(\sigma<\infty)}+f(X_\infty)I_{(\sigma=\infty)}\end{aligned}$$

$=f(X_\sigma)$

类似地，$\lim\limits_{k\to\infty} f^k(X_\tau)=f(X_\tau)\quad P_x-a.s$，由(3.26)即得证本引理。

推论 3.6　如果报酬函数 $g(x)$ 是过份的，且 $g\in\mathscr{B}(A^-)$，则 $\forall\ x\in E$

$$\bar{V}(x)=V(x)=g(x)$$

且 $\tau\equiv0$ 是最优规则。

证明　显然 $V(x)\geqslant g(x)$，由引理 3.5，$\forall$ 停时 τ，$E_x g(X_\tau)\leqslant E_x g(X_0)=g(x)$，故 $\bar{V}(x)=V(x)=g(x)$，且 $\tau\equiv0$ 是最优规则。

引理 3.7　如 $f\in\mathscr{L}(A^-)$ 且是过份函数，则

$$f_A(x)\triangleq E_x f(X_{\sigma_A})$$

也是过份函数，这里 $A\in\mathscr{B}_1$（一维 Borel 集），$\sigma_A=\inf\{n\geqslant0:X_n\in A\}$

证明　令 $\sigma_A^1=\inf\{n\geqslant1:X_n\in A\}$，则 $\sigma_A^1\geqslant\sigma_A$，$Tf_A(x)=E_x f_A(X_1)=E_xE_{X_1}f(X_{\sigma_A})$。由强马氏性

$$E_x[E_{X_1}f(X_{\sigma_A})]=E_x\theta_1 f(X_{\sigma_A})=E_x f(\theta_1\circ X_{\sigma_A})$$

易知 $\theta_1\circ X_{\sigma_A}=X_{\sigma_A(\theta_1\omega)}(\theta_1\omega)=X_{\sigma_A^1-1}(\theta\omega)=X_{\sigma_A^1(\omega)}(\omega)$。因此，$Tf_A(x)=E_x f(X_{\sigma_A^1})\leqslant E_x f(X_{\sigma_A})=f_A(x)$。证毕。

设 f 是 g 的过份控制，则 $\forall\ x\in E$

$$f(x)\geqslant g(x)\vee Tf(x)$$

下面的引理表明当 f 是 g 的最小过份控制时，上述不等式将变为等式。

引理 3.8　设 $g\in\mathscr{L}$，且 f 是 g 的最小过份控制，则 $\forall\ x\in E$

$$f(x)=g(x)\vee Tf(x)\tag{3.27}$$

证明　令 $f_1(x)=g(x)\vee Tf(x)$，则 $f(x)\geqslant f_1(x)\geqslant g(x)$。往证 f_1 也是 g 的过份控制，首先 $Tf_1(x)\geqslant Tg(x)>-\infty$，$Tf_1(x)$ 存在，$\forall\ x\in E$

$$Tf_1(x)\leqslant Tf(x)\leqslant g(x)\vee Tf(x)=f_1(x)$$

从而由 f 是 g 的最小过份控制得 $f(x)\leqslant f_1(x)$，所以 $f(x)=f_1(x)=g(x)\vee Tf(x)$。证毕。

引理表明 $g\in L$ 的最小过份控制是方程(3.27)的解，但(3.27)的解不一定就是 g 的最小过份控制，如取 $|g(x)|\leqslant C<\infty, f(x)\equiv k>c$，它不是最小过份控制。

下面的引理给出寻求 $g\in\mathscr{L}$ 的最小过份控制的构造性方法。

引理 3.9 设 $g\in\mathscr{L}$，则 $v(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g(x)$ 就是 $g(x)$ 的最小过份控制。

证明 显然 $Q^n g(x)$ 关于 n 单调不减，因此极限函数 $v(x)$ 存在，且 $v(x)\geqslant g(x)$。往征它是过份函数，由 $Q^n g(x)\geqslant TQ^{n-1}g(x)$ 及单调收敛定理得

$$v(x)=\lim_{n\to\infty}Q^n g(x)\geqslant\lim_{n\to\infty}E_x Q^{n-1}g(X_1)=E_x v(X_1)=Tv(x)$$

如果 f 也是 g 的过份控制，则

$$Qf(x)=f(x)\vee Tf(x)=f(x)$$

于是
$$f(x)=Q^n f(x)\geqslant Q^n g(x),\ f(x)\geqslant v(x)$$

因此 v 是 g 的最小过份控制。

注 4 如假设 $T^n g(x)=E_x g(X_n), n=1,2,\cdots$ 有意义，令

$$\tilde{Q}g(x)=\sup\{g(x),Tg(x),T^2g(x),\cdots\} \tag{3.28}$$

则 $\tilde{v}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{Q}^n g(x)$ 也是 g 的最小过份控制，所以 $\tilde{v}(x)=v(x)$。

证明 由于 $\tilde{Q}g(x)$ 关于 n 单调不减，因此极限 $\tilde{v}(x)$ 存在。

$$\tilde{v}(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde{Q}^n g(x)\geqslant\lim_{n\to\infty}E_x\tilde{Q}^{n-1}g(X_1)=E_x\tilde{v}(X_1)=T\tilde{v}(x)$$

可见 $\tilde{v}(x)$ 是 $g(x)$ 的过份控制，如 $f(x)$ 也是 $g(x)$ 的过份控制，则 $\tilde{Q}^n g(x)\leqslant f(x)$，于是 $\tilde{v}(x)\leqslant f(x)$，因而 $\tilde{v}$ 是 g 的最小过份控制，它等于 $v(x)$。

引理 3.10 设 $g\in\mathscr{L}$，v 是它的最小过份控制，记 $g^b(x)=g(x)\wedge b, b\geqslant 0$，$V^b(x)$ 为 $g^b(x)$ 的最小过份控制，则

$$v(x)=\lim_{b\to\infty}v^b(x) \tag{3.29}$$

且

$$V(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}Q^n g^b(x) \tag{3.30}$$

证明 由于 $g^b(x)$关于 b 单调不减，且 $E_x g^b(X_1) > -\infty$. 由单调收敛定理

$$\lim_{b\to\infty} Tg^b(x) = Tg(x)$$

因此

$$\lim_{b\to\infty} Q^n g^b(x) = Q^n g(x)$$

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} Q^n g(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty} Q^n g^b(x).$$

因为 $g^b(x)\in L$，所以

$$v^b(x) = \lim_{n\to\infty} Q^n g^b(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} Q^n g(x) = v(x)$$

因而$\lim\limits_{b\to\infty} v^b(x) \leqslant v(x)$。另一方面，由性质 3，$\lim\limits_{b\to\infty} v^b(x)$仍然是控制 $g(x)$ 的过份函数，所以$\lim\limits_{b\to\infty} v^b(x) \geqslant v(x)$，(3.29)与(3.20)两式得证。

g 之最小过份控制 v 满足方程(3.27)，满足(3.27)的函数 f 有什么性质呢？

引理 3.11 设 $g\in\mathscr{B}$，f 满足(3.27)，记 $\tau^\varepsilon = \inf\{n\geqslant 0: f(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$，$\varepsilon\geqslant 0$，若 $f(x)<\infty$，则

$$E_x f(X_{\tau^\varepsilon\wedge n}) = f(x) \tag{3.31}$$

证明 由 $f(x)<\infty$及 $f\in\mathscr{B}$ 知$|f(x)|<\infty$，而 $E_x f(X_0) = f(x)$ 有限，于是

$$E_x f(X_0) I_{(\tau^\varepsilon=0)} = f(x) P_x(\tau^\varepsilon = 0) < \infty$$

$$E_x f(X_0) I_{(\tau^\varepsilon>0)} < \infty$$

且

$$f(x) = E_x f(X_0) I_{(\tau^\varepsilon=0)} + E_x f(X_0) I_{(\tau^\varepsilon>0)} \tag{3.32}$$

在$[\tau^\varepsilon>0]$上，$f(X_0)>g(X_0)$，故 $f(X_0) = Tf(X_0) = E_{X_0} f(X_1) = E_x(f(X_1)|\mathscr{F}_0)$。由(3.32)式

$$f(x) = E_x f(X_{\tau^\varepsilon}) I_{(\tau^\varepsilon=0)} + E_x f(X_1) I_{(\tau^\varepsilon>0)}$$

$$= E_x f(X_{\tau^\varepsilon}) I_{(\tau^\varepsilon\leqslant 1)} + E_x f(X_1) I_{(\tau^\varepsilon>1)}$$

在$[\tau^\varepsilon>1]$上，$f(X_1)>g(X_1)$，故 $f(X_1) = E_x(f(X_2)|\mathscr{F}_1)$，因此

$$f(x) = E_x f(X_{\tau^\varepsilon}) I_{(\tau^\varepsilon\leqslant 1)} + E_x f(X_2) I_{(\tau^\varepsilon>1)}$$

$$=E_x f(X_{\tau^\varepsilon})I_{(\tau^\varepsilon\leqslant 2)}+E_x f(X_2)I_{(\tau^\varepsilon>2)}$$

$$=\cdots$$

$$=E_x f(x_{\tau^\varepsilon})I_{(\tau^\varepsilon\leqslant n)}+E_x f(X_n)I_{(\tau^\varepsilon>n)}$$

$$=E_x f(X_{\tau^\varepsilon\wedge n})$$

下面的引理表明在适当的条件下，上述的 $\tau^\varepsilon<\infty, P_x-a.s.$

引理 3.12 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，v 为其最小过份控制，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}v(X_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n), P_x-a.s, x\in E \tag{3.33}$$

且 $\forall\ \varepsilon>0$

$$P_x(\tau^\varepsilon<\infty)=1$$

这里

$$\tau^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0, v(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$$

证明 为证(3.33)式，只须证 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}v(X_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g(X_n)$。固定 $x\in E$，记

$$\psi_n=\sup_{j\geqslant n}g(X_j),\quad \varphi_n=E(\Psi_n|\mathscr{F}_n)$$

由马氏性

$$\varphi_n=E_{X_n}\psi_0\triangleq\varphi(X_n)\qquad(\varphi(x)=E_x\psi_0)$$

易见 $\qquad E_x\varphi(X_1)=E_x\varphi_1=E_x\psi_1\leqslant E_x\sup\limits_{j\geqslant 0}g^+(X_j)<\infty$

而 $\varphi(x)=E_x\psi_0\geqslant E_xg(X_0)=g(x)$，且 $T\varphi(x)=E_x\psi_1\leqslant E_x\psi_0=\varphi(x)$，所以 φ 是 g 的过份控制，于是 $v(x)\leqslant\varphi(x)$，$\varphi_n\geqslant v(X_n)P_x-a.s$，令 m 固定，当 $n\geqslant m$ 时

$$E_x[\psi_m|\mathscr{F}n]\geqslant E_x[\psi_n|\mathscr{F}_n]=\varphi(X_n)\geqslant v(X_n)$$

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_x[\psi_m|\mathscr{F}_n]\geqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}v(X_n)$，而由 $g\in\mathscr{B}(A^+)$ 及鞅收敛定理(Levy)，易证

$$\lim_{n\to\infty}E_x[\psi_m|\mathscr{F}_n]\leqslant\psi_m, P_x-a.s$$

故 $\psi_m\geqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}v(X_n)$，再令 $m\to\infty$，则(3.33)式得证。

记 $A=[\tau^\varepsilon=\infty]$，则当 $\omega\in A$ 时，$v(X_n)>g(X_n)+\varepsilon$ 于是 $A\subset\{\omega:$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}v(X_n)>\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n)\}$，由 $g\in B(A^+)$ 得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n)<\infty, P_x-a.s$，这样由(3.33)式知 $P_x(A)=0$。证毕。

下面对 $g\in\mathscr{L}(A^+,A^-)$ 构造一列函数 $G^n\varphi(x)\downarrow\tilde{v}(x)$，使 $\tilde{v}$ 也是 g 的最小过份控制。

设 $f\in\mathscr{B}$，且 $\forall x\in E$，$Tf(x)$ 有定义，令

$$Gf(x)=g(x)\vee Tf(x) \tag{3.34}$$

易证当 f 为 g 之最小过份控制时，$Gf=f$.

引理 3.13 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，$\varphi(x)=E_x(\sup_{n\geqslant 0}g(X_n))$，则

$$G^{n+1}\varphi(x)\leqslant G^n\varphi(x),\quad n=0,1,2,\cdots;x\in E$$

且 $\tilde{v}(x)=\lim_{n\to\infty}G^n\varphi(x)$ 满足方程(3.27)。

证明 先证 $G\varphi(x)\leqslant\varphi(x)$。事实上

$$\begin{aligned}G\varphi(x)&=g(x)\vee T\varphi(x)\\&=g(x)\vee E_x[E_{X_1}\sup_{n\geqslant 0}g(X_n)]\\&=g(x)\vee E_x(E_x[\theta_1\sup_{n\geqslant 0}g(X_n)\,|\,\mathscr{F}_1])=\\&E_xg(X_0)\vee E_x\sup_{n\geqslant 1}g(X_n)\\&\leqslant\varphi(x)\end{aligned}$$

类似地可归纳证明 $G^{n+1}\varphi(x)\leqslant G^n\varphi(x)$，因此极限 $\tilde{v}(x)=\lim_{n\to\infty}G^n(x)$ 存在。由定义可得

$$G^n\varphi(x)=g(x)\vee TG^{n-1}\varphi(x)$$

应用单调收敛定理，则

$$\tilde{v}(x)=g(x)\vee T\tilde{v}(x)$$

证毕。

引理 3.13 表明当 $g\in\mathscr{B}(A^+)$ 时，$\tilde{v}$ 是 g 的过份控制，下面的引理 3.15 将证明当 $g\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$ 时，$\tilde{v}$ 还是 g 的最小过份控制，我们还需要下面的

引理 3.14 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{v}(X_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n),Px-a.s \qquad (3.35)$$

且 $P_x(\tilde{\tau}^\varepsilon<\infty)=1$

这里 $\tilde{\tau}^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0;\tilde{v}(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\},\varepsilon>0$

证明 只需证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tilde{v}(X_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g(X_n)$。设 $x\in E,m\leqslant n$

$$\begin{aligned}\tilde{v}(X_n) &\leqslant G^n\varphi(X_n)\leqslant\varphi(X_n)\\ &=E_x(\sup_{j\geqslant n}g(X_j)\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E_x(\sup_{j\geqslant m}g(X_j)\mid\mathscr{F}_n)\end{aligned} \qquad (3.36)$$

从而$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tilde{v}(X_n)\leqslant\sup\limits_{j\geqslant m}g(x_j)$。再令 $m\to\infty$，便得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tilde{v}(X_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}g(X_j)$。

完全类似于引理 3.12 的证明，我们有

$$P_x(\tilde{\tau}^\varepsilon<\infty)=1,x\in E,\varepsilon>0$$

引理 3.15　1) 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，则$\forall\ \varepsilon>0$

$$\tilde{v}(x)\leqslant E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon}) \qquad (3.37)$$

2) 如 $g\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$，则

$$\tilde{v}(x)=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}_\varepsilon}) \qquad (3.38)$$

且 $\tilde{v}(x)$是 g 之最小过份控制。

证明　1) 由引理 3.13，$\tilde{v}(x)$满足方程(3.27)，由 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，得 $\tilde{v}(x)<\infty$，因此由引理 3.11 得

$$\tilde{v}(x)=E_x[\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon\wedge n})]=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})I_{(\tilde{\tau}_\varepsilon\leqslant n)}+E_x\tilde{v}(X_n)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}$$

因为 $\tilde{v}(X_n)\leqslant\varphi(X_n)$

$$E_x(\tilde{v}(X_n)I_{(\tilde{\tau}_\varepsilon>n)})\leqslant E_x[\sup_{j\geqslant 0}g^+(X_j)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}]$$

从而由 $P(\tilde{\tau}^\varepsilon<\infty)=1$ 以及 $g\in\mathscr{B}(A^+)$知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x\tilde{v}(X_n)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}=0$$

于是由 Faton 引理

$$\tilde{v}(x)\leqslant E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon<\infty)}=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})$$

2) 当 $g\in\mathscr{B}(A^-)$时，$-g\in\mathscr{B}(A^+)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}E_x\tilde{v}(X_n)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}\geqslant-\underline{\lim_{n\to\infty}}E_x\sup_{j\geqslant 0}g^-(X_j)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}=0$$

因此，当 $g\in B(A^+,A^-)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}E_x\tilde{v}(X_n)I_{(\tilde{\tau}^\varepsilon>n)}=0$，所以 $\tilde{v}(x)=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})$。设 f 为 g 之最小过份控制，则 $\forall\ \varepsilon>0$

$$\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})\leqslant g(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})+\varepsilon\leqslant f(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})+\varepsilon$$

于是
$$\tilde{v}(x)=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})\leqslant E_xf(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})+\varepsilon\leqslant f(x)+\varepsilon$$

这里最后的不等式是由于 $(f(X_n),\mathscr{F}_n,P_x)$ 是上鞅且从 $g\in\mathscr{B}(A^-)\Rightarrow f\in\mathscr{B}(A^-)$。

ε 是任意的，于是 $\tilde{v}(x)\leqslant f(x)$，而 $\tilde{v}(x)\geqslant f(x)$ 是显然的，所以 $\tilde{v}(x)=f(x)$ 是 g 之最小过份控制。

推论 3.16　设 $g\in\mathscr{B}(A^-,A^+)$，v 是 g 之最小过份控制，则 $\forall\ \varepsilon>0$

$$v(x)=E_xv(X_{\tau^\varepsilon})$$

其中 $\tau^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0:v(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$。

证明　由 $g\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$，则 $v(x)=\tilde{v}(x)$，$\tau^\varepsilon=\tilde{\tau}^\varepsilon$，所以由引理 3.15，即知

$$v(x)=\tilde{v}(x)=E_x\tilde{v}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})=E_xv(X_{\tau^\varepsilon})$$

§3.4　A^- 条件下值函数的过份性与最优规则

本节描述在 A^- 条件下，$V(x)$ 与 $\bar{V}(x)$ 的构造以及最优规则。

定理 3.17　设 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，则

1) $V(x)$ 是 $g(x)$ 之最小过份控制；

2) $V(x)=\bar{V}(x)$；

3) $V(x)=g(x)\vee TV(x)$；

4) $V(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q^ng(x)=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^ng^b(x)$。

证明　设 v 是 g 的最小过份控制，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,v(X_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,g(X_n)$$

由 $g\in\mathscr{L}(A^-)\Rightarrow v\in\mathscr{L}(A^-)$，于是 $C(g)=\mathscr{T}$，$\overline{C}(g)=\overline{\mathscr{T}}$，$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$

$$v(x)\geqslant E_x v(X_\tau)\geqslant E_x g(X_\tau)$$

从而 $v(x)\geqslant\overline{V}(x)\geqslant V(x)$，往证 $v(x)\leqslant V(x)$，为此先假定 $g\in\mathscr{L}(A^+, A^-)$，则由引理 3.12

$$\tau^\varepsilon=\inf\{n\leqslant 0: v(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$$

是停止规则，而由推论 3.16，有

$$v(x)=E_x v(X_{\tau^\varepsilon})\leqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon})+\varepsilon\leqslant V(x)+\varepsilon$$

是任意的，从而 $v(x)\leqslant V(x)$。

一般情形下，令 $g^b(x)=g(x)\wedge b$，则 $g^b\in\mathscr{L}(A^+, A^-)$，于是存在 $V^b(x)$ 为 $g^b(x)$ 之最小过份控制，记

$$v^b(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x g^b(X_\tau)$$

则由前段所证

$$V(x)\geqslant V^b(x)=v^b(x)$$

$v^b(x)$ 关于 b 单调一减，令 $v^*(x)=\lim\limits_{b\to\infty}v^b(x)$，则 $V(x)\geqslant v^*(x)$，往证 $v^*(x)=v(x)$。首先 $Tv^*(x)=\lim\limits_{b\to\infty}Tv^b(x)\leqslant v^*(x)$，可见 $v^*(x)$ 是 $g(x)$ 的过份控制，为证它是 g 之最小过份控制。设 f 是 g 之过份控制，则 $f(x)\geqslant g(x)\geqslant v^b(x)$，于是 $f(x)\geqslant v^b(x)$，$f(x)\geqslant v^*(x)$，因此 $v^*(x)=v(x)$，$V(x)\geqslant v(x)$，1)，2)，3)同时得证。而 $V(x)=v(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g(x)$，又从 $V(x)=V^*(x)=\lim\limits_{b\to\infty}v^b(x)=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g^b(x)$，4)得证。

注 5 设 $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{D}})$ 是 $\mathscr{T}(\overline{\mathscr{T}})$ 中进入 Borel 集初遇的全体，亦即 $\forall\ \tau\in\mathscr{D}$，存在 $B\in\mathscr{B}$，使 $\tau=\inf\{n\geqslant 0: X_n\in B\}$，则在 A^+ 且 A^- 条件下

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{D}}E_x g(X_\tau)=\sup_{\tau\in\overline{\mathscr{D}}}E_x g(X_\tau) \tag{3.38}$$

事实上，若令 $\tau^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0: V(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$，则 $\tau^\varepsilon\in\mathscr{D}$，在 $A^\pm$ 条件下

$$\overline{V}(x)=V(x)=E_xV(X_{\tau'})\leqslant E_xg(X_{\tau'})+\varepsilon$$

从而

$$\overline{V}(x)=\sup_{\varepsilon>0}E_xg(X_{\tau'})\leqslant\sup_{\tau\in\mathscr{D}}E_xg(X_\tau)\leqslant\overline{V}(x)$$

注 6 设 $g\in\mathscr{B}(A^+,A^-)$，那么我们只须对关于自然代数族 $(\mathscr{G}_n)$ 的停时类来考虑最优停止问题，这里 $n=(0,1,\cdots,n)$，事实上，由(3.38)式，我们只须对初遇时 $\tau\in\mathscr{D}$ 取上确界，而

$$(\tau=n)=(\omega:X_0\notin B,X_1\notin B,\cdots,X_{n-1}\notin B,X_n\in B)\in\mathscr{G}_n$$

所以

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}'}E_xg(X_\tau)$$

这里 $\mathscr{T}'=\{\tau\in\mathscr{T}:[\tau=n]\in\mathscr{G}_n,n=0,1,2,\cdots\}$。

注 7 设 $g\in\mathscr{L}$ 但 A^- 条件不满足，则 $V(x)$ 不一定是过份函数，但可证明 $V(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 中满足

$$f(x)\geqslant g(x)$$

及 $f(x)\geqslant\sup_{\tau\in C(g)}E_xf(X_\tau)$ 的最小函数。

事实上，在后面的定理 3.27 我们将证明当 $g\in\mathscr{L}$ 时 $V(x)$ 是 $g(x)$ 的过份控制，于是若 f 满足所述的条件，则 $f(x)\geqslant\sup_{\tau\in C(g)}E_xg(X_\tau)=V(x)$。

注 8 设 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，则 $E_xV(X_1)^-\leqslant E_xg(X_1)^-<\infty$，所以 $V(x)\geqslant E_xV(X_n)$，$n=0,1,2,\cdots$，于是 $V(x)\geqslant E_xV(X_\infty)\geqslant E_xg(X_\infty)$，故 $V(x)=g(x)\vee E_xg(X_\infty)\vee TV(x)$，因此 $V(x)$ 也是控制 $G(x)=g(x)\vee E_xg(X_\infty)$ 的最小过份函数。

现在来讨论在 A^-,A^+ 条件下的最优与最优规则。

定理 3.18 设 $g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，则

1) $\forall\ \varepsilon>0$，$\tau^\varepsilon\triangleq\inf\{n\leqslant0:V(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$ 是 (ε,V) 最优规则；

2) $\tau^0\triangleq=\inf\{n\geqslant0:V(X_n)\leqslant g(X_n)\}$ 是 $(0,\overline{V})$ 最优停时（广义规则）；

3) 如 $P_x(\tau^\varepsilon<\infty)=1$，则 τ^ε 是 $(0,V)$ 最优规则；

4) 如状态空间 E 是有限集，则 τ^0 是$(0,V)$的最优规则。

证明 1) 由引理 3.12 可见 $P_x(\tau^\varepsilon<\infty)=1$，而由定理 3.17 及引理 3.15 知 $V(x)$是 $g(x)$的最小过份控制，且 $V(x)=E_xV(X_{\tau^\varepsilon})$，从而 $E_xg(X_{\tau^\varepsilon})\geqslant V(x)-\varepsilon$，因此 τ^ε 是(ε,V)最优规则。

2) 由引理 3.11

$$
\begin{aligned}
V(x)&=E_xV(X_{\tau^0\wedge n})\\
&=E_xI_{(\tau^0<n)}V(X_{\tau^0})+E_xI_{(n\leqslant\tau^0<\infty)}V(X_n)+E_xI_{(\tau^0=\infty)}V(X_n)
\end{aligned}
$$

因为 $g\in L(A^-,A^+)$，$V(x)=\overline{V}(x)$，由(3.36)式，$\forall\ m\leqslant n$

$$
\begin{aligned}
\overline{V}(x)&\leqslant E_xI_{(\tau^0<n)}V(X_{\tau^0})+E_x[I_{(n\leqslant\tau^0<\infty)}E(\sup_{j\geqslant n}g(X_j)\mid\mathscr{F}_n)\\
&\quad+E_x[I_{(\tau^0=\infty)}E_x(\sup_{j\geqslant n}g(X_j)\mid\mathscr{F}_n)]\\
&\leqslant E_xI_{(\tau^0<n)}V(X_{\tau^0})+E_x(I_{(n\leqslant\tau^0\leqslant\infty)}\sup_{j\geqslant 0}g^+(X_j))\\
&\quad+E_xI_{(\tau^0=\infty)}E_x(\sup_{j\geqslant m}g(X_j)\mid\mathscr{F}_n)
\end{aligned}
$$

由于 $g\in L(A^+)$，应用 Faton 引理二次则得

$$\overline{V}(x)=V(x)\leqslant E_xI_{(\tau^0<\infty)}V(X_{\tau^0})+E_xI_{(\tau^0=\infty)}g(X_\infty)=E_xg(X_{\tau^0})$$

这表明 τ^0 是$(0,\overline{V})$最优。

3) 设 $P_x(\tau^0<\infty)=1$，则由 2)及 $V(x)=\overline{V}(x)$可知 τ^0 是$(0,V)$最优。

4) 令 $\Gamma_\varepsilon=\{x\in E:V(x)\leqslant g(x)+\varepsilon\}$，则 $\Gamma_\varepsilon\downarrow\Gamma_0$，如果 E 是有限集，则必存在 ε'，使对一切 $\varepsilon\leqslant\varepsilon'$，$\Gamma_\varepsilon=\Gamma_0$ 于是 $\tau^0=\tau^\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant\varepsilon'$，从而 $P_x(\tau^0<\infty)=1$，因而 τ^0 是$(0,V)$最优。证毕。

由上述的结论 2)可以看出在假定 A'_2 条件下，是 τ^0 是$(0,\overline{V})$最优的。

例 2 设 $g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，且$\forall\ x\in\{x\in E;Tg(x)\leqslant g(x)\}$，$Tg(X_1)\leqslant g(X_1)$ $P_x-a.s$ 成立，则$(g(X_n),\mathscr{F}_n,P_x)$属于单调情形，停止域 $\Gamma=\{Tg(x)\leqslant g(x)\}$，$\tau^0=\inf\{n\geqslant0;X_n\in\Gamma\}$是最优规则。

事实上，令 $\widetilde{X}_n=g(X_n)$为报酬序列，则 $E_x(\widetilde{X}_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=E_xg(X_{n+1})\mid\mathscr{F}_n]=E_{X_n}g(X_1)=Tg(X_n)$，如记 $A_n=\{\omega;Tg(X_n)\leqslant g(X_n)\}$，

则由条件 $P_x(A_1)=1$，$\forall A\in\sigma(X_n)$，存在 $B\in\mathscr{B}_1$，使 $A=X_n^{-1}(B)$，于是

$$
\begin{aligned}
& E_x I_A Tg(X_n) \\
&= E_x[E_x(I_A Tg(X_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})] \\
&= E_x[E_x(\theta_{n-1}I_{(w;X_1\in B)}Tg(X_1)\mid\mathscr{F}_{n-1})] \\
&= E_x[E_{X_{n-1}}I_{(w;X_1\in B)}Tg(X_1)] \\
&\leqslant E_x[E_{X_{n-1}}I_{(w;X_1\in B)}g(X_1)] \\
&= E_x I_{(w;X_n\in B)}g(X_n) \\
&= E_x I_A g(X_n)]
\end{aligned}
$$

所以 $Tg(X_n)\leqslant g(X_n)$，$P_x-a.s$，这表明 $(g(X_n),\mathscr{F}_n,P_x)$ 是单调情形。

停止域 $\Gamma\triangleq=\{x:V(x)\triangleq g(x)\}$，显然 $\Gamma\subseteq\{x:Tg(x)\leqslant g(x)\}$，另方面若 $Tg(x)\leqslant g(x)$，则有 $Qg(x)=g(x)$，于是不难证得 $Q^n g(x)=g(x)$，从而 $V(x)=g(x)$，所以 $\Gamma=\{x:Tg(x)\leqslant g(x)\}$，因此 $\tau^0=\inf\{n\geqslant 0;X_n\in\Gamma\}$ 是最优规则，此即 § 2.4 中的 s.

如同在第二章研究 C_n 中最优停止一样，下面讨论 n 后马氏链的最优停止问题，对 $n\geqslant 1$，记

$$\overline{\mathscr{F}}_n=\{\tau;\tau\in\tilde{\mathscr{F}}\text{ 且 }\tau\geqslant n\},\ \mathscr{F}_n=\overline{\mathscr{F}}_n\cap\mathscr{F}$$

$$\overline{C}_n(g)=\{\tau;\tau\in\overline{C}(g)\text{ 且 }\tau\geqslant n\},\ C_n(g)=\overline{C}_n(g)\cap\mathscr{F}$$

$$\bar{\gamma}_n(x)=\operatorname*{esssup}_{\tau\in\overline{C}_n(g)}E_x(g(X_\tau)\mid\mathscr{F}_n),\ \gamma_n(x)=\operatorname*{esssup}_{\tau\in C_n(g)}E_x(g(X_\tau)\mid\mathscr{F}_n)$$

$$\overline{V}_n(x)=\sup_{\tau\in\overline{C}_n(g)}E_x g(X_\tau),\ V_n(x)=\sup_{\tau\in C_n(g)}E_x g(X_\tau)$$

定理 3.19 设 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，则 $n\geqslant 0$

1) $V_n(x)=E_x V(X_n)$，$x\in E$；

2) $\gamma_n(x)=V(X_n)$，$x\in E$，$P_x-a.s.$；

3) $\overline{V}_n(x)=V_n(x)$，$x\in E$；

4) $\bar{\gamma}_n(x)=\gamma_n(x)$，$x\in E$.

如果 $g\in L(A^-,A^+)$，则

$$\tau_\varepsilon^n\triangleq\inf\{m\geqslant n;V(X_m)\leqslant g(X_m)+\varepsilon\},\ (\varepsilon\geqslant 0)\tag{3.39}$$

当 $\varepsilon>0$ 时，是(ε,V_n)最优的，亦即

$$E_x(g(X_{\tau_n^\varepsilon})\mid\mathscr{F}_n)\geqslant\gamma_n(x)-\varepsilon,x\in E,P_x-a.s \tag{3.40}$$

$$E_xg(X_{\tau_n^\varepsilon})\geqslant V_n(x)-\varepsilon$$

5) τ_n^0 是$(0,\bar{V}_n)$最优，且如 $P_x(\tau_n^0<\infty)=1$，则 τ_n^0 是$(0,V_n)$最优规则。

证明 由$g\in\mathscr{L}(A^-)$，由定理 3.17，$V(x)$为$g(x)$之最小过份控制，且$V(x)\in\mathscr{L}(A^-)$。因此由 Doob 停止定理，$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}_n$，$V(X_n)\geqslant E_x(V(X_\tau)\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E_x(g(X_\tau)\mid\mathscr{F}_n)$。从而

$$V(X_n)\geqslant\gamma_n(x)\geqslant\gamma_n(x) \tag{3.14}$$

$$E_xV(X_n)\geqslant\bar{V}_n(x)\geqslant V_n(x) \tag{3.42}$$

为证 1)，2)，3)，只须证明$V(X_n)\leqslant\gamma_n(x)$。为此先设$g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，那么$\forall\ \varepsilon>0$ 时，τ_n^ε 是一个停止规则（参见引理 3.12），且由引理 3.15

$$V(X_n)=E_{X_n}V(X_{\tau_0^\varepsilon})$$

因而 $Px-a.s$，有

$$V(X_n)=E_{X_n}g(X_{\tau_0^\varepsilon})+\varepsilon=E_x(g(X_{\tau_n^\varepsilon})\mid\mathscr{F}_n)+\varepsilon\leqslant\gamma_n(x)+\varepsilon \tag{3.43}$$

由 ε 之任意性立得$V(X_n)\leqslant\gamma_n(x)$。这样

$$\gamma_n(x)=V(X_n)$$

$$V_n(x)=E_xV(X_n)$$

$$\gamma_n(x)=\bar{\gamma}_n(x)$$

$$V_n(x)=\bar{V}_n(x)$$

获证。

对于一般情形，可如定理 3.17 证明的方法证明 $\gamma_n(x)\geqslant V(X_n)$，从而 $V_n(x)\geqslant E_xV(X_n)$，最后完成对 1)，2)，3)的证明。

由(3.43)及 1)2)3)可见 4)成立。

为证 5)，我们需要下述不等式

$$V(X_n)$$

$$\leqslant E_x(I_{(\tau_n^0<\infty)}g(X_{\tau_n^0})\mid\mathscr{F}_n)+E_x\{I_{(\tau_n^0=\infty)}\overline{\lim_n}g(X_n)\mid\mathscr{F}_n\}$$

$$=E_x(g(X_{\tau_n^0})\mid\mathscr{F}_n)$$

而它可由定理 3.18 之 2)的证明获得。证毕。

例 3 令 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量列，$P(\xi_i=+1)=p$，$P(\xi_i=-1)=q=1-p$，$X_0=x$，$X_n=x+\xi_1+\cdots+\xi_n$，其中 $x\in E=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，于是 $(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)_{n=0}^{\infty}$ 是一个齐次马氏链，其中 $\mathscr{F}_n=(X_1,\cdots,X_n)$，$P_x$ 表示初值为 x，由 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 导出的在 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$ 上概率分布。

令 $g(x)=\max(0,x)$，容易理解当 $p\geqslant q$ 时，$\tau^*=\infty$ 是 $(0,\overline{V})$ 最优停时，且 $\overline{V}(x)=+\infty$，事实上，当 $p\geqslant q$ 时，$\mu\triangleq E\xi_i=p-q\geqslant0$，因此由强大数定律，$\overline{\lim_{n\to\infty}}(X_n-x)=+\infty$，从而 $g(X_\infty)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n)=+\infty$，所以 $\tau^*=\infty$ 是 $(0,\overline{V})$ 最优的广义规则，且 $\overline{V}(x)=+\infty$. 现在设 $p<q$，令 $\tau_\gamma=\inf\{n\geqslant0:X_n\geqslant\gamma\}$，其中 $\gamma\geqslant0$，记 $P_\gamma(x)=P_x(\tau_\gamma<\infty)$。如引论(9)式所证，我们可证明 τ_γ 的母函数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}s^nP(\tau_\gamma=n)=\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}\right)^{\gamma-x},\quad 0\leqslant s\leqslant1$$

取 $s=1$，则

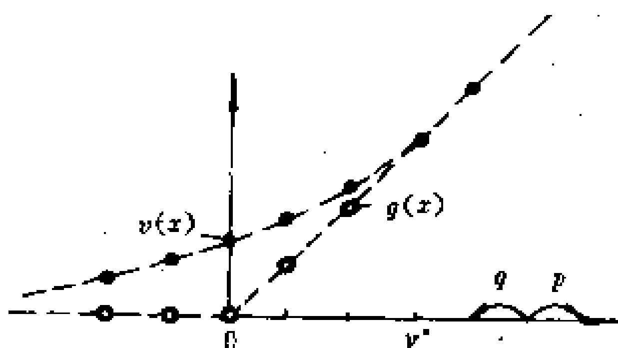
$$P_\gamma(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\gamma-x}, & 当\ \gamma\geqslant x\ 时\\ 1, & 当\ \gamma<x\ 时\end{cases}\tag{3.44}$$

记

$$f_\gamma(x)\triangleq E_xg(X_{\tau_\gamma})=\begin{cases}\gamma\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\gamma-x}, & x\leqslant\gamma\\ x, & x>\gamma\end{cases}\quad(\because\ \gamma\geqslant0)$$

记 $f^*(x)=\sup\limits_{\gamma\geqslant0}f_\gamma(x)$，取 $\gamma^*=-\dfrac{1}{\ln\dfrac{p}{q}}$，则 γ^* 是 $\gamma\left(\dfrac{p}{q}\right)^\gamma$ 的最大点，于是

$$f^*(x)=\begin{cases}\gamma^*\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\gamma^*-x}, & x\leqslant\gamma^*\\ x, & x>\gamma^*\end{cases}$$



容易验证：$f^*(x)$是$g(x)$的过份控制，由于$\bar{V}(x)$是$g(x)$的最小过份控制，又$f^*(x)\leqslant\bar{V}(x)$，所以$f^*(x)=\bar{V}(x)$，于是$\tau^*=\tau_{\gamma^*}$是$(0,\bar{V})$最优停时，但对$x<\gamma^*$，$P_x(\tau^*=\infty)>0$，所以$\tau^*$不是最优规则，容易看出$\bar{V}(x)=f^*(x)$是一个凹函数，如图。

如状态空间E是有限的，$|g(x)|<\infty$，$x\in E$，则由定理3.18，τ^0是$(0,\bar{V})$广义最优规则，下面的例4、例5说明了这一点。

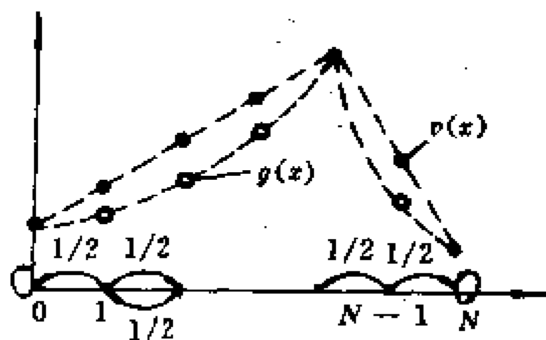
例4 设$E=\{0,1,2,\cdots,N\}$，转移概率$p(x,y)=P_x(X_1=y)$如下

$$p(0,0)=p(N,N)=1$$

$$p(i,i+1)=p(i,i-1)=\frac{1}{2}$$

这里$i=1,2,\cdots,N-1$，设$V(x)$是过份函数，则由$v(x)\geqslant E_xv(X_1)$，可得

$$v(x)\geqslant\frac{1}{2}(v(x+1)+v(x-1)),\quad x=1,2,\cdots,N-1$$



而$v(0)=g(0)$，$v(N)=g(N)$，因此报酬函数$g(x)$的最小过份控制就是从上跨接$g(x)$且满足$v(0)=g(0)$、$v(N)=g(N)$的凸函数（如图），最优规则便是停止在达到状态$g(x)=v(x)$的时刻。

当状态空间可列时，最优停时不一定存在。

例5 设 $E=\{0,1,\cdots\}$，$p(i,i+1)=1$，令 $g(x)\geqslant 0$ 是单调递增函数且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=k<\infty$.

此时 $\varphi(x)=E_x(\sup\limits_{n} g(X_n))\equiv k$，则 $G^{*}\varphi(x)\equiv k$，因此由引理3.15，最小过份控制 $v(x)\equiv k$，显然不存在最优规则，而 $\tau\equiv\infty$ 是 $(0,\bar{V})$ 最优停时，另一方面，$\tau^{\varepsilon}=\inf\{n\geqslant 0;X_n\geqslant k-\varepsilon\}$ 是 (ε,V) 最优规则，这里 $\varepsilon>0$.

下面的例子给出了当 A^{+} 条件不满足时，τ^{ε} 不再是 $(\varepsilon,\bar{V})$ 最优的例子。

例6 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，$p(0,0)=1$，$p(i,i+1)=p(i,i-1)=\dfrac{1}{2}$ $(i=1,2,\cdots)$，令 $g(0)=1$，$g(i)=i$，$(i\geqslant 1)$，我们可以证明此时 $E_x(\sup\limits_{n} g(X_n))=\infty$，$x=1,2,\cdots$。由引理3.10，可算得 $g(x)$ 的最小过份函数 $v(x)$：$v(0)=1$，$v(x)=x+1$，$x=1,2,\cdots$ 对 $0\leqslant\varepsilon<1$，$\Gamma_\varepsilon=\{0\}$，$P_x(\tau^{\varepsilon}<\infty)=1$，$x\in E$，因此 $E_x g(X_{\tau^{\varepsilon}})=1$，$x\in E$，但另一方面，$E_x g(X_\tau)=g(x)$，$x=2,3,\cdots$，这里 $\tau\equiv 0$，可见它比停止在 τ^{ε} 所得的收益为大。

下面两个例子表明 A^{-} 条件不成立时 $V(x)$ 不一定是 $g(x)$ 的最小过份控制。

例7 设 $E=\{0,2,2^2,\cdots\}$，$X=(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)$ 为马氏链，其中 $x\in E$，$n=1,2,\cdots$

$$X_{n+1}=2X_n\cdot\xi_{n+1}$$

这里 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是一列独立随机变量，$P(\xi_n=0)=\dfrac{1}{2}=P(\xi_n=1)$，$\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots X_n)$，$P_x$ 定义为初始值为 x 由 (ξ_n) 在 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)$ 产生的分布。

令 $g(x)=-x$，容易验证

$$E_x(\sup_n g^-(X_n))=E_x \sup_n X_n=+\infty, \quad x\neq 0$$

所以 A^- 条件不成立。

容易验证 $Tg(x)=g(x), x\in E$，所以 $g(x)$ 的最小过控制 $V(x)=g(x)=-x$. 但事实上，$V(x)\equiv 0$，令 $\bar{\tau}=\inf\{n: X_n=0\}$，因为 $P_x(\bar{\tau}<\infty)=1, x\in E$，故 $\bar{\tau}$ 是停止规则，且 $E_x g(X_{\bar{\tau}})=0$，因此 $\bar{\tau}$ 是最优规则。而 $V(x)\neq v(x)$，所以 $V(x)$ 不是 $g(x)$ 的最小过份控制，且 $E_x V(X_{\bar{\tau}})\leqslant v(x)=-x$，对于 $x\neq 0$ 不成立。

例 8 设 $X=(X_n, \mathscr{F}_n, P_x), n=1,2,\cdots, x\in E=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，$X_n=x+\xi_1+\cdots+\xi_n, n>0, X_0=x, \mathscr{F}_n=\sigma(\omega: X_0,\cdots,X_n)$。令 (ξ_n) 是独立随机变量列，且 $P(\xi_n=+1)=\frac{1}{2}=P(\xi_n=-1), n=1,2,\cdots$，令 $g(x)=x$，则 $Qg(x)=g(x)$，所以对任何 $n=1,2,\cdots, V^n(x)=Q^n g(x)=x$，而 $g(x)$ 之最小过控制，$V(x)=g(x)=x$，显然 $P_x(\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n=+\infty)=1$，因此 $V(x)=+\infty, x\in E$，可见 $V(x)$ 不是 g 的最小过控制，且 $V(x)\neq \lim_{n\to\infty} V^n(x)$。

§ 3.5 当 $g\in\mathscr{B}(a^-)$ 时值函数结构

当 A^- 不满足时，$V(x)$ 不一定是 $g(x)$ 的最小过份控制，我们将证明当 $g\in\mathscr{B}(a^-)$ 时，$V(x)$ 将是 $G(x)$ 的最小过份控制，其中

$$G(x)=g(x)\vee E_x g(X_\infty) \tag{3.43}$$

引理 3.20 1) 函数 $S(x)=\lim_{n\to\infty} Q^n G(x)$ 是 $G(x)$ 的最小过份控制；

2) $\overline{V}_G(x)=S(x), x\in E$，其中

$$\overline{V}_G(x)=\sup_{\tau\in\overline{C}(G)} E_x G(X_\tau), \tag{3.44}$$

$$\overline{C}(G)=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}}: E_x(G(X_\tau))^-<\infty\} \tag{3.45}$$

证明 1) 由 $G(X_1)\geqslant E_{X_1}(g(X_\infty))$，$E_xG(X_1)\geqslant E_xg(X_\infty)>-\infty$，可见 $G\in L$。于是由引理 3.9，$S(x)$是 $G(x)$的最小过份控制。

2) 先设 $G(x)\leqslant b<\infty$，由引理 3.15。若令 $\tilde{V}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}G^n\varphi(x)$，其中

$$G\varphi(x)=G(x)\vee T\varphi(x)$$

$$\varphi(x)=E_x(\sup_n G(X_n))$$

则 $\tilde{V}(x)\leqslant E_x\tilde{V}(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon})$，其中 $\tilde{\tau}^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0;\tilde{V}(X_n)\leqslant G(X_n)+\varepsilon\}$，由 $G\varphi(x)\geqslant QG(x)$，可见 $\tilde{V}(x)\geqslant S(x)$，从而

$$S(x)\leqslant\tilde{V}(x)\leqslant E_x(G(X_{\tilde{\tau}^\varepsilon}))+\varepsilon\leqslant\overline{V}_G(x)+\varepsilon$$

所以，$S(x)\leqslant\overline{V}_G(x)$。

一般情形下，可考虑 $G^b(x)=G(x)\wedge b$，由上所证 $S_b(x)\leqslant\overline{V}_{G^b}(x)\leqslant\overline{V}_G(x)$，这里 $S_b(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q^n(G^b(x))$。由单调性，$Q^nG^b(x)\leqslant\overline{V}_G(x)$，令 $b\to\infty$，则可归纳地证明 $\lim\limits_{b\to\infty}Q^nG^b(x)=Q^nG(x)$，所以 $Q^nG(x)\leqslant\overline{V}_G(x)$，再令 $n\to\infty$，便得：$S(x)\leqslant\overline{V}_G(x)$。

往证 $S(x)\geqslant\overline{V}_G(x)$，为此先证$(S^-(X_n))_{n=0}^\infty$一致可积。由马氏性

$$S(X_n)\geqslant G(X_n)\geqslant E_{X_n}g(X_\infty)=E_x[g(X_\infty)\mid\mathscr{F}_n]$$

于是

$$S^-(X_n)\leqslant E_x(g^-(X_\infty)\mid\mathscr{F}_n) \tag{3.46}$$

$S^-(X_n)$是一致可积族，由上鞅的 Doob 停止定理(A.18)，有

$$S(x)\geqslant E_xS(X_\tau)\geqslant E_xG(X_\tau)$$

所以 $S(x)\geqslant\overline{V}_G(x)$。

定理 3.21 设 $g\in\mathscr{B}(a^-)$，则

1) $\overline{V}(x)$是 $G(x)$的最小过份控制；

2) $\overline{V}(x)=\overline{V}_G(x)$；

3) $\overline{V}(x)=g(x)\vee E_xg(X_\infty)\vee T\overline{V}(x)$。

证明 往证 2)。由于 $G(x)\geqslant g(x)$，只须证 $\overline{V}(x)\geqslant\overline{V}_G(x)$，不妨设 $\overline{V}(x)<\infty$，首先可证明对 $x\in E$，$\overline{V}(x)<\infty$，有

$$g(X_\infty)=G(X_\infty) \qquad p_x-a.s. \tag{3.47}$$

事实上

$$\begin{aligned} G(X_\infty) &= \overline{\lim_{n\to\infty}} G(X_n) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} g(X_n) \vee E_{x_n} g(X_\infty) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \{g(X_n) \vee E_x[g(X_\infty) \mid \mathscr{F}_n]\} \\ &= g(X_\infty) \end{aligned}$$

为了证明 $\overline{V}(x)\geqslant\overline{V}_G(x)$，只须$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$，作一个 $\sigma_\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$\sigma_\tau\geqslant\tau$，使

$$E_xG(X_\tau)=E_xg(X_{\sigma_\tau}) \tag{3.48}$$

由(3.47)，只须证

$$E_xG(X_\tau)I_{(\tau<\infty)}=E_xg(X_{\sigma_\tau})I_{(\tau<\infty)} \tag{3.49}$$

令

$$\sigma_\tau(\omega)=\begin{cases}\tau(\omega), & \tau(\omega)<\infty \text{且} E_{X_\tau}g(X_\infty)\leqslant g(X_\tau) \\ +\infty, & \text{否则}\end{cases}$$

记 $A=\{\omega;\tau(\omega)<\infty$，且 $E_{X_\tau}g(X_\infty)\leqslant g(X_\tau)\}$，由马氏性

$$\begin{aligned} & E_xG(X_\tau)I_{(\tau<\infty)} \\ &= E_x(I_Ag(X_\tau)+I_{A^c}E_{X_\tau}g(X_\infty))I_{(\tau<\infty)} \\ &= E_x(I_Ag(X_\tau)+I_{A^c}g(X_\infty))I_{(\tau<\infty)} \\ &= E_xg(X_{\sigma_\tau})I_{(\tau<\infty)} \end{aligned}$$

(3.49)式获证，所以 $\overline{V}(x)=\overline{V}_G(x)$。由引理 3.20，便知 1)成立，3)是明显的。

注 9 在§5 中将证明，当 $g\in\mathscr{B}$ 时，$V(x)=\overline{V}(x)$. 因此由本定理，当 $g\in\mathscr{B}(a^-)$时

$$V(x)=g(x)\vee E_xg(X_\infty)\vee TV(x) \qquad (\text{参见注 8})$$

注 10 由(3.47)式及 $V(x)=\overline{V}(x)$是 G 的最小过份控制，故当 $P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$ 时，有

$$-\infty < E_x\overline{V}(X_\infty) \leqslant E_x\overline{V}(X_\tau) \leqslant E_x\overline{V}(X_\sigma) \leqslant \overline{V}(x)$$

(3.50)

且如果 f 是 $\mathscr{B}$ 及可测函数且控制 g，且 $\forall\ \tau \in \bar{C}(g)$

$$E_x f(X_t) \leqslant f(x) \qquad (3.51)$$

则从 $E_x g(X_\tau) \leqslant f(x)$ 可得 $\overline{V}(x) \leqslant f(x)$，所以由(3.50)须知 $\overline{V}(x)$ 是满足(3.51)的控制 $g(x)$ 的最小函数。

3.6 正则函数：A 条件下值函数的结构与最优

定义 3.4 设 $R \subset \overline{\mathscr{T}}$，函数 $f \in \mathscr{B}$ 称为是 R 正则的，如果 $\forall\ \tau \in R$，$E_x f(X_\tau)$ 有意义，且对一切满足 $P_x(\tau \geqslant \sigma) = 1$ 的 $\tau, \sigma \in R$，有

$$E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leqslant f(X_\sigma) \quad P_x-a.s \quad x \in E \qquad (3.52)$$

如果 f 是 R 正则，且 $\forall\ x \in E$，$f(x) \geqslant g(x)$，则称 f 为 g 之 R 正则控制函数，简称 $\mathscr{T}$ 正则为正则。

如设 f 为 g 之 R 正则控制函数，且对任一个 g 的 R 正则控制函数 h，有 $f(x) \leqslant h(x)$，则称 f 为 g 之最小 R 正则控制函数。

当 $g \in \mathscr{B}(A^-)$ 时，g 之最小正则控制函数与 g 之最小过份控制函数是同一的。事实上，若 f 为 g 之最小过份控制，则由引理 3.5，f 为 g 之正则控制。如另有 φ 为 g 之最小正则控制，则 $f \geqslant \varphi$. 另一方面，由正则性可导致过份性，所以 $f \leqslant \varphi$. 因此 $g \in \mathscr{B}(A^-)$ 时，两者是同一的。例 7、例 8 表明当 A^- 条件不成立时，过份函数不一定正则，值函数 $V(x)$ 不一定是 g 之最小过份控制。

下面的定理将证明：当 $g \in \mathscr{B}(A^+)$ 时，$V(x)$ 是 g 的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则控制，§6 将证明当 $g \in \mathscr{B}$ 时，$V(x)$ 是 g 的最小 $\bar{C}(g)$ 正则控制。

定理 3.22 设 $g \in \mathscr{B}(A^+)$，则

1) $V(x)$ 是 $g(x)$ 的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则控制；

2) $V(x) = \overline{V}(x)$；

3) $V(x)=g(x)\vee TV(x)$;

4) $V(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to+\infty}Q^n g_a^b(x)$ (3.53)

其中，$g_a^b(x)=(g(x)\wedge b)\vee a, a\leqslant 0, b>0$.

证明 1) 令 $g_a(x)=g(x)\vee a, a\leqslant 0, \overline{V}_a(x)=\sup_{\tau\in\overline{\mathscr{T}}}E_x g_a(X_\tau)$，并记 $V_*(x)=\lim_{a\to-\infty}\overline{V}_a(x)$。显然

$$V_*(x)\geqslant\overline{V}(x)\geqslant V(x)\geqslant g(x)>-\infty$$

由于 $g_a(x)\in L(A^-)$，由定理 3.17

$$\overline{V}_a(x)=V_a(x)=g_a(x)\vee TV_a(x) \tag{3.54}$$

因 $V_a(x)\downarrow V_*(x)$ 及 $E_x(\sup_{n\geqslant 0}g^+(X_n))<\infty$，由单调收敛定理得

$$V_*(x)=g(x)\vee TV_*(x) \tag{3.55}$$

由(3.54)知 $V_a(x)$是过份的且属于 $\mathscr{L}(A^-)$，由引理 3.5 可知，$\forall\ \tau,\sigma\in\overline{\mathscr{T}}, P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$ 有

$$E_x(V_a(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V_a(X_\sigma) \tag{3.56}$$

从而 $E_xV_a(X_\tau)\leqslant E_xV_a(X_\sigma)\leqslant V_a(x)<\infty$($\because g\in\mathscr{B}(A^+)$)，而 $V_*(x)\leqslant V_a(x)$，故 $E_xV_*(X_\tau)$对任何 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$ 有意义。在(3.56)中令 $a\to-\infty$，便知 $V_*(x)$是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则函数。

2) 为证明 $V_*(x)=\overline{V}(x)=V(x)$，只须证明 $V_*(x)\leqslant V(x)$，为此令

$$\sigma_a^\varepsilon=\inf\{m\geqslant 0: V_*(X_m)\leqslant g_a(X_m)+\varepsilon\}$$

$$\tau_a^\varepsilon=\inf\{m\geqslant 0: V_a(X_m)\leqslant g_a(X_m)+\varepsilon\}$$

$$\tau_*^\varepsilon=\inf\{m\geqslant 0: V_*(X_m)\leqslant g(X_m)+\varepsilon\}$$

并证明$\forall\ \varepsilon>0$

$$P_x(\tau_*^\varepsilon<\infty)=1 \tag{3.57}$$

且

$$V_*(x)\leqslant E_xV_*(X_{\tau_*^\varepsilon}) \tag{3.58}$$

如上述两式获证，则 $V_*(x)\leqslant E_xg_*(X_{\tau_*^\varepsilon})+\varepsilon$，从而 $V_*(x)\leqslant V(x)$。

函数 $g_a\in\mathscr{B}(A^-,A^+)$，由定理 3.17，$V_a(x)$是 $g_a(x)$的最小过份

控制，由引理 3.12

$$P_x(\tau_a^\varepsilon<\infty)=1, \quad x\in E \tag{3.59}$$

而从推论 3.16

$$V_a(x)=E_xV_a(X_{\tau_a^\varepsilon}) \tag{3.60}$$

显然 $\sigma_b^\varepsilon\leqslant\sigma_a^\varepsilon\leqslant\tau_a^\varepsilon$，$(a\leqslant b\leqslant 0)$，由引理 3.5

$$E_xV_a(X_{\tau_a^\varepsilon})\leqslant E_xV_a(X_{\sigma_b^\varepsilon})\leqslant V_a(x)$$

由(3.60)

$$V_a(x)=E_xV_a(X_{\sigma_b^\varepsilon}), \quad a\leqslant b\leqslant 0$$

令 $a\to-\infty$，则由 A^+ 条件得

$$V_*(x)=E_xV_*(X_{\sigma_b^\varepsilon}), \quad \varepsilon>0, b\geqslant 0 \tag{3.61}$$

由 σ_b^ε 的定义

$$\begin{aligned}
&-\infty\\
&<V_*(x)\\
&\leqslant E_xg_b(X_{\sigma_b^\varepsilon})+\varepsilon\\
&=E_xg_b(X_{\sigma_b^\varepsilon})I_{[g(X_{\sigma_b^\varepsilon})\leqslant b]}+E_xg_b(X_{\sigma_b^\varepsilon})I_{[g(X_{\sigma_b^\varepsilon})>b]}+\varepsilon\\
&\leqslant bP_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon})\leqslant a)+C_x
\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant C_x\leqslant E_x(\sup\limits_j g^+(X_j))+\varepsilon<\infty$，于是

$$P_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon})\leqslant b)\leqslant[C_x-V_*(x)]/(-b)\to 0(b\to-\infty) \tag{3.62}$$

往证(3.57)式。注意到在 $\{\omega:g(X_{\sigma_b^\varepsilon})>b\}$ 上

$$g(X_{\sigma_b^\varepsilon})+\varepsilon=g_b(X_{\sigma_b^\varepsilon})+\varepsilon\geqslant V_*(X_{\sigma_b^\varepsilon})\}$$

所以在 $\{\omega:g(x_{\sigma_b^\varepsilon})>b\}$ 上，从而 $\sigma_b^\varepsilon\geqslant\tau_*^\varepsilon$，从而 $\sigma_b^\varepsilon=\tau_*^\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}
&P_x(\tau_*^\varepsilon<\infty)\\
&\geqslant P_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon})>b,\tau_b^\varepsilon<\infty)\\
&=P_x(g(X_{X_{\sigma_b^\varepsilon}})>b)\to 1(b\to-\infty)
\end{aligned}$$

其中第二步是由于 $P_x(\sigma_b^\varepsilon<\infty)\geqslant P(\tau_b^\varepsilon<\infty)=1$。

往证(3.58)式，由(3.62)，存在一个子列 (b_j)，$b_j\to-\infty$，并 P_x

一$a.s$地有

$$\lim_{j\to\infty} I_{[g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})\leqslant b_j]}(\omega)=0$$

由(3.61)式

$$V_*(x)=E_x I_{[g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})>b_j]} V_*(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})+E_x I_{[g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})\leqslant b_j]}$$

$$V_*(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})=E_x I_{[g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})>b_j]} V_*(X_{\tau^\varepsilon_*})+E_x I_{g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})\leqslant b_j]} V_*(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})$$

由A^+条件及 Fatou 引理

$$V_*(x)\leqslant E_x V_*(X_{\tau^\varepsilon_*})$$

于是(3.58)得证，从而$V_*(x)=\overline{V}(x)=V(x)$。由(3.55)知 3)成立。

4) 定理的最后结论可由下面的引理 3.23～引理 3.24 给出。

引理 3.23 设$g\in\mathscr{B}(A^+)$，$\varphi(x)=E_x(\sup\limits_s g(X_s))$，$G\varphi(x)=g(x)\vee T\varphi(x)$，则

$$V(x)=\lim_{s\to\infty} G^s\varphi(x) \tag{3.63}$$

证明 令$\bar{v}(x)=\lim\limits_{s\to\infty} G^s\varphi(x)$，并记

$$\varphi_a(x)=E_x(\sup_s g_a(X_s))$$

$$G_a\varphi_a(x)=g_a(x)\vee T\varphi_a(x)$$

显然$G_a^s\varphi_a(x)\geqslant G^s\varphi(x)$，因为$g_a\in\mathscr{B}(A^-,A^+)$，由引理 3.15，$V_a(x)\triangleq\sup\limits_{\tau\to\mathscr{T}} E_x g_a(X_\tau)=\lim\limits_{s\to\infty} G_a^s\varphi_a(x)$。

由定理 3.22 之证明

$$V(x)=\lim_{a\to\infty} V_a(x) \tag{3.64}$$

因此$V(x)\geqslant\lim\limits_{s\to\infty} G^s\varphi(x)=\bar{v}(x)$。而由(3.55)式

$$GV(x)=g(x)\vee TV(x)=V(x)$$

因此

$$V(x)=G^s V(x)\leqslant G^s\varphi(x)，于是 V(x)\leqslant\bar{v}(x)。所以$$

$$V(x)=\bar{v}(x)=\lim_{s\to\infty} G^s\varphi(x)$$

注 11 由定理 3.22 及本引理，$\forall\ g\in\mathscr{B}(A^+)$

$$V(x)=\lim_{a\to-\infty} V_a(x)=\lim_{a\to-\infty}\lim_{s\to\infty} G_a^s\varphi_a(x)$$

(3.63)的结果只要求 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，而引理 3.13，3.15 的同样式子要求 $g\in\mathscr{B}(A^-,A^+)$。

引理 3.24　1)设 $g\in B$，则

$$V(x)=\lim_{b\to\infty}V^b(x) \tag{3.65}$$

$$V(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x) \tag{3.66}$$

其中，$V^b(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x g^b(X_\tau)$，$g^b(x)=g(x)\wedge b$。

2) 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，则

$$V(x)=\lim_{a\to-\infty}V_a(x) \tag{3.67}$$

且

$$V(x)=\begin{cases}\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)\\ \lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{b\to\infty}Q^n g_a^b(x)\\ \lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)\end{cases} \tag{3.68}$$

证明　由(3.64)式，$V(x)=\lim\limits_{a\to-\infty}V_a(x)$，而 $g_a(x)\in L$，故由引理 3.10 之(3.30)式，

$$V(x)=\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\lim_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)=\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}Q^n g_a^b(x)$$

为证 1)及(3.68)之第三式，先证(3.65)式，令

$$v^*(x)=\lim_{b\to\infty}V^b(x)$$

显然 $v^*(x)\leqslant V(x)$。另一方面，对 $\tau\in C(g)$，则 $E_x[g^b(X_\tau)]^-<\infty$，由单调收敛定理得

$$E_x g^b(X_\tau)\uparrow E_x g(X_\tau)\qquad(b\to\infty)$$

但 $E_x g^b(X_\tau)\leqslant v^b(x)\leqslant v^*(x)$，故 $E_x g(X_\tau)\leqslant v^*(x)$，所以 $V(x)\leqslant v^*(x)$，从而(3.65)式得证。由(3.68)之第二式，$V^b(x)=\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)$。所以

$$V(x)=\lim_{b\to\infty}V^b(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}G^n g_a^b(x)$$　　　　证毕

下面的定理推广了定理 3.18。

定理 3.25　设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$，则

1) $\forall\ \varepsilon>0, \tau^{\varepsilon}=\inf\{n\geqslant 0: V(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$是$(\varepsilon,V)$最优规则；

2) $\tau^0\triangleq\inf\{n\geqslant 0: V(X_n)\geqslant g(X_n)\}$是$(0,\overline{V})$最优停时；

3) 如 $P_x(\tau^0<\infty)=1$，则 τ^0 是$(0,V)$最优规则；

4) 为了 τ^0 是$(0,V)$最优规则，只需

$$\lim_{n\to\infty} g(X_n)=-\infty \qquad P_x-a.s \quad x\in E$$

证明 由引理 3.23，$V(x)=\tilde{v}(x)\triangleq=\lim_{n\to\infty}G^n\varphi(x)$，而由引理 3.14，$P_x(\tau^{\varepsilon}<\infty)=1$，于是由

$$E_x g(X_{\tau^{\varepsilon}})\geqslant E_x V(X_{\tau^{\varepsilon}})-\varepsilon\geqslant V(x)-\varepsilon$$

1)—3)得证。4)是明显的。

注 12 设 $g\in\mathscr{B}(A^+)$

$$\gamma_n(x)=\operatorname*{esssup}_{\tau\in C_n(g)}E_x(g(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$V_n(x)=\sup_{\tau\in C_n(g)}E_x g(X_\tau)$$

则如同定理 3.19，也有

$$V_n(x)=E_x V(X_n)$$

$$\gamma_n(x)=V(X_n)$$

证明 由 $V(x)$的 $\overline{\mathscr{F}}$ 正则性，易证 $\gamma_n(x)\leqslant V(X_n)$。往证相反的不等式，如 $g\in L(A^+,A^+)$，则如同定理 3.19，$V(X_n)\leqslant\gamma_n(x)$成立。对于一般情形，令 $g_a(x)=g(x)\vee a$，则 $V(x)=\lim_{a\to-\infty}V_a(x)$，其中 $V_a(x)$是相应于 $g_a(x)$的值函数，于是

$$V(X_n)\leqslant V_a(X_n)\leqslant\operatorname*{esssup}_{\tau\in C_n(g)}E_x(g(X_\tau)\vee a\,|\,\mathscr{F}_n)$$

令 $a\to-\infty$，由单调收敛定理得

$$V(X_n)\leqslant\operatorname*{esssup}_{\tau\in C_n(g)}\lim_{a\to-\infty}E_x[g(X_\tau)\vee a)\,|\,\mathscr{F}_n]=\gamma_n(x)$$

§ 3.7 一般情形下值函数的正则性

定理 3.26 设 $g\in\mathscr{B}$，则

1) $V(x)$是$g(x)$的最小$\overline{C}(g)$正则控制；

2) $V(x)=\overline{V}(x)$；

3) $V(x)=\lim\limits_{b\to\infty}\lim\limits_{a\to-\infty}\lim\limits_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)$；

4) 如果$g\in\mathscr{L}$，则$V(x)=g(x)\vee TV(x)$。

证明 1) 由引理 3.24，$V(x)=\lim\limits_{b\to\infty}V^b(x)$，注意到$g^b(x)\in\mathscr{B}(A^+)$，由定理 3.22，$\forall\ \tau,\sigma\in\overline{C}(g)$，$P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，$x\in E$，有

$$E_x(V^b(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V^b(X_\sigma) \tag{3.69}$$

因为$V^b(x)\geqslant -g^-(x)$，而$E_x(V^b(X_\tau)^-)\leqslant E_x(g(X_\tau))^-<\infty$，故在(3.69)式中令$b\to\infty$，则得$V(x)$是$\overline{C}(g)$正则的；

2) 令$\tau\in\overline{C}(g)$，则

$$E_x g^b(X_\tau)\leqslant\overline{V}^b(x)=V^b(x)\leqslant V(x)$$

令$b\to\infty$，则$E_x g(X_\tau)\leqslant V(x)$，于是 2)得证，若另有$f$为$g$之$\overline{C}(g)$正则控制，则$\forall\ \tau\in\overline{C}(g)$

$$E_x g(X_\tau)\leqslant E_x f(X_\tau)\leqslant f(x)$$

于是$\overline{V}(x)=V(x)\leqslant f(x)$，可见$V(X)$是$g(x)$的最小$\overline{C}(g)$控制；

3) 设$g\in\mathscr{L}$，则$\tau\equiv 1\in C(g)$，于是由(3.69)式，$V(x)\geqslant E_x V(X_1)=TV(x)$，从而

$$V(x)\geqslant g(x)\vee TV(x)$$

而另一方面，由$g^b(x)\in\mathscr{B}(A^+)$及定理 3.22，$V^b(x)\leqslant g^b(x)\vee TV^b(x)$，令$b\to\infty$则得

$$V(x)\leqslant g(x)\vee TV(x)$$

于是 4)得证，3)则由引理 3.24 而得。

3.8 值函数 $V^N(x)$与 σ^N 的收敛性

§2 讨论了有限情形，证明了在$c^N(g)$中，$V^N(x)=Q^N g(x)$，且

$\sigma^N=\inf\{0\leqslant n\leqslant N: g(X_n)=V^{N-n}(X_n)\}$是最优规则。当 $N\to\infty$时，存在极限

$$V^*(x)=\lim_{N\to\infty}V^N(x),\ \sigma^*=\lim_{N\to\infty}\sigma^N$$

而且 $V^{N+1}(x)=g(x)\vee TV^N(x)$, $g\in L$，则

$$V^*(x)=g(x)\vee TV^*(x)$$

且 $V^*(x)\leqslant V(x)$，所以自然要问何时 $V(x)=V^*(x)$，何时 σ^* 是$(0,V)$或$(0,\overline{V})$最优？例 8 表明，一般说来 $V(x)\neq V^*(x)$。

定理 3.27 设 $g\in\mathscr{L}$，则

1) $V(x)$是 $g(x)$的最小 $\overline{C}(g)$正则控制，且是 $g(x)$的过份控制；

2) $V^*(x)=\lim\limits_{N\to\infty}V^N(x)$是 g 的最小过份控制。

证明 1)是定理 3.26 之 1)与 4)的结论；

2)由于 $V^N(x)$是 g 的过份控制，故 $V^*(x)$也是 g 的过份控制，若 f 是 g 的另一过份控制，则 $f(x)\geqslant g(x)\vee Tf(x)\geqslant Qg(x)$，从而 $f(x)\geqslant Q^Ng(x)$, $f(x)\geqslant V^*(x)$，因此 $V^*(x)$是 g 的最小过份控制。

何时 $V(x)=V^*(x)$呢？

定理 3.28 1) 如果 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，则 $\overline{V}(x)=V(x)=V^*(x)$；

2) 如果 $g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，则 $\sigma^*\triangleq\lim\limits_{N\to\infty}\sigma^N$ 是$(0,\overline{V})$最优；当 $\sigma^*<\infty$, $P_x-a.s$ 成立时，σ^*是$(0,V)$最优规则；

3) $\sigma^*=\inf\{n\geqslant 0: V^*(X_n)=g(X_n)\}$。

证明 1) 由定理 3.27，$V^*(x)$是 $g(x)$的最小过控制，而由定理 3.27 知 $V(x)=\overline{V}(x)$是 $g(x)$的最小过份控制，所以 $V(x)=\overline{V}(x)=V^*(x)$；

2) 在$[\sigma^*<\infty]$上，$\lim\limits_{N\to\infty}g(X_{\sigma^N})=g(X_{\sigma^*})$，由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}&\overline{V}(x)=V^*(x)\\=&\lim_{N\to\infty}E_xg(X_{\sigma_N})\\\leqslant&E_x\overline{\lim_{N\to\infty}}g(x_{\sigma^N})\end{aligned}$$

$$\leqslant E_x g(X_{\sigma^*}) I_{(\sigma^*<\infty)} + E_x \overline{\lim_n} g(X_n) I_{(\sigma^*=\infty)}$$

$$= E_x g(X_{\sigma^*})$$

因此 σ^* 是$(0,\bar{V})$最优的，而当 $P_x(\sigma^*<\infty)=1$ 时，上式中第二项为0，从而 σ^* 是$(0,V)$最优规则；

3）令 $\tilde{\sigma}=\inf\{n\geqslant 0: V^*(X_n)=g(X_n)\}$。显然从 $V^N(X_n)\leqslant V^*(X_n)$，可知 $\sigma^N\leqslant\tilde{\sigma}$，于是 $\sigma^*\leqslant\tilde{\sigma}$，往证 $\sigma^*\geqslant\tilde{\sigma}$. 令 $\omega_0\in[\tilde{\sigma}=n]$，则 $g(X_i(\omega_0))<V^*(X_i(\omega_0))$，$0\leqslant i\leqslant n-1$，因此对充分大的 N(依赖于 ω_0)，$g(X_i(\omega_0))<V^{N-i}(X_i(\omega_0))$. 于是 $\sigma^N(\omega_0)\geqslant n$，$\sigma^*(\omega_0)\geqslant\tilde{\sigma}(\omega_0)$；如果 $\tilde{\sigma}(\omega_0)=\infty$，则对一切 $i\geqslant 0$，$g(X_i)<V^*(X_i)$. 于是对充分大的 N 及 $n\leqslant N$，$\sigma^N(\omega_0)>n$，因而 $\sigma^*(\omega_0)>n$，于是 $\sigma^*(\omega_0)=\infty$，$\tilde{\sigma}\leqslant\sigma^*$ 成立。证毕。

注 12 这里 σ^* 即定理 3.18 中的 τ^0.

定理 3.29 设 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，并且假定存在最优规则，且 $V(x)<\infty$，$x\in E$，则 σ^* 必是最小的最优规则。

证明 因为 τ^* 是最优规则，$E_x g(X_{\tau^*})>-\infty$，且 $V(x)=E_x g(X_{\tau^*})\leqslant E_x V(X_{\tau^*})$，由定理 3.27，$V(x)$是 $C(g)$正则的，故 $E_x V(X_{\tau^*})\leqslant V(x)<\infty$，从而

$$-\infty<E_x g(X_{\tau^*})\leqslant E_x V(X_{\tau^*})=V(x)<\infty$$

从而 $g(X_{\tau^*})=V(X_{\tau^*})\ P_x-a.s$，$x\in E$. 由于 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，$V(x)=\bar{V}(x)=V^*(x)$，因而

$$\sigma^*=\inf\{n\geqslant 0: V^*(X_n)=g(X_n)\}$$
$$=\inf\{n\geqslant 0: V(X_n)=g(X_n)\}$$

可见 $\sigma^*\leqslant\tau^*$，由引理 3.5，$E_x V(X_{\tau^*})\leqslant E_x V(X_{\sigma^*})$. 所以

$$V(x)=E_x g(X_{\tau^*})\leqslant E_x V(X_{\tau^*})\leqslant E_x V(X_{\sigma^*})=E_x g(X_{\sigma^*})$$

这表明 σ^* 是最小最优规则。

注 13 如果定理中 τ^* 是广义最优规则，则是最小最优的广义规则。

注 14　在 $g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$ 条件下，$K_0=\inf\{n\geq 0: g(X_n)>TV(X_n)\}$ 是最大最优的广义规则。事实上

$$E_x(\gamma_{n+1}(x)\mid\mathscr{F}_n)=E_x(V(X_{n+1})\mid\mathscr{F}_n)=E_{X_n}V(X_1)=TV(X_n)$$

因此由定理 2.45 及引理 2.59 可知 K_0 是最大最优的广义规则。

§3.9　函数方程 $f(x)=g(x)\vee Tf(x)$ 的解

函数方程

$$f(x)=g(x)\vee Tf(x) \tag{3.70}$$

的解就是 $g(x)$ 的过份控制，它的最小解就是最小过份控制，当 $g\in B(A^-)$ 时，$V(x)$ 就是(3.70)的最小解，当 $g\in\mathscr{L}$ 时，(3.70)的最小解为 $V^*(x)\triangleq\lim\limits_{N\to\infty}V^N(x)$ 它不一定等于 $V(x)$。而定理 3.26 表明 $V(x)$ 总是(3.70)的解，因此当(3.70)的解唯一时，它的解便是 $V(x)$。所以为了求得 $V(x)$，自然要问何时(3.70)的解唯一？而当(3.70)的解不唯一时，哪一个是 $V(x)$？

我们将证明(3.70)的解总是某种特殊形式最优停止问题的值函数，因此它确是最优停止问题的特征方程。

记 $P(n,x,\Gamma)=P_x(X_n\in\Gamma)$ 为齐次马氏链 (X_n) 的转移函数，令 $\mu(n,x,\Gamma)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}P(i,x,\Gamma)$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，$n=1,2,\cdots$

假定在可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 上存在一个非负测度 μ，使得对任何 $\mathscr{B}$ 可测函数 f，有

$$\int_E f(y)\mu(n,x,dy)\to\int_E f(y)\mu(dy)\,(n\to\infty),\quad x\in E \tag{3.71}$$

现在来讨论(3.70)解的唯一性问题。

定理 3.30　设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是(3.70)的两个解，都属于 $\mathscr{L}$，且

在某个 $\mathscr{B}$ 可测集$\triangle\subseteq E$ 上重合，同时

$$\sup_{x\in E}|f_1(x)-f_2(x)|<\infty \tag{3.72}$$

则当 $\mu(E\setminus\triangle)<1$ 时，$f_1(x)\equiv f_2(x),x\in E$.

证明 记 $r(x)=|f_1(x)-f_2(x)|$，由(3.70)易证

$$r(x)\leqslant Tr(x) \tag{3.73}$$

事实上，不妨设 $f_1(x)>f_2(x)$，如果 $Tf_1(x)\leqslant g(x)$或 $g(x)<Tf_2(x)$，则 $f_1(x)=g(x)$或 $f_2(x)=Tf_2(x)$. 在前一种情形，将导致 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$的矛盾；在后一种情形，可得 $f_1-f_2=T(f_1-f_2)$，(3.73)获证。现在设 $Tf_1>g\geqslant Tf_2$，从而 $g\vee Tf_1-Tf_1=0\leqslant g\vee Tf_2-Tf_2$，(3.73)也成立，于是

$$r(x)\leqslant T^ir(x)=\int r(y)P(i,x,dy),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$r(x)\leqslant\int r(y)\mu(n,x,dy)$$

令 $n\to\infty$，则

$$\sup_{x\in E}r(x)\leqslant\int_E r(y)\mu(dy)\leqslant\sup_{y\in E}r(y)\cdot\mu(E-\triangle)$$

由 $\mu(E-\triangle)<1$，推得 $r(x)\equiv0$。证毕。

推论 3.31 如$\forall\ x\in E,P(1,x,\triangle^c)=p<1$，则在有界可测函数中(3.70)的解唯一。

证明 因为 $\mu(n,x,\triangle^c)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}p^i\to\mu(\triangle^c)<1$。

推论 3.32 如 g 有界，f 是(3.70)的有界解，且在 $\mathscr{B}$ 可测集$\triangle$上 $f=g$，$\mu(E\setminus\triangle)<1$，则 f 是 g 的最小过份控制。

证明 因为 f 与 $V(x)$都适合(3.70)，而且 $V(x)$是(3.70)的最小解，故在$\triangle$上，$g(x)=f(x)\geqslant V(x)\geqslant g(x)$，因此由定理 3.30 知 $f\equiv V$ 为 g 之最小过份控制。

下面的定理给出(3.70)解的唯一性另一种判别法。

定理 3.33 设 f_1,f_2 是(3.70)的两个 $\mathscr{B}$ 可测的解，且

$$E_x(\sup_n|f_1(X_n)-f_2(X_n)|)<\infty, x\in E \qquad (3.74)$$

$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\triangle_\varepsilon\in\mathscr{B}$，使

i) 当$x\in\triangle_\varepsilon$时，$|f_1(x)-f_2(x)|<\varepsilon$;

ii) P_x(有无限多个$n, X_n\in\triangle_\varepsilon$)$=1, x\in E$

则$f_1(x)\equiv f_2(x), x\in E$.

证明 记$r(x)=|f_1(x)-f_2(x)|$，考虑过程$R=(r(X_n),\mathscr{F}_n, P_x)_{n=0}^{\infty}, x\in E$，由(3.73)以及$Tr(X_{n-1})=E_{X_{n-1}}r(X_1)=E_x(r(X_n)|\mathscr{F}_{n-1})$，可见

$$0\leqslant r(X_{n-1})\leqslant E_x(r(X_n)|\mathscr{F}_{n-1})$$

这表明R是非负下鞅，由(3.74)，$\lim_{n\to\infty}r(X_n)$存在，由ii)可知$\underline{\lim}_{n\to\infty}r(X_n)=0, P_x-a.s$，而$0\leqslant r(x)\leqslant T^n r(x)=E_x r(X_n)$。由Fatou引理，$\forall\ x\in E$

$$0\leqslant r(x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x r(X_n)\leqslant E_x(\overline{\lim_{n\to\infty}}r(X_n))=0$$

推论 3.34 令$\triangle=\bigcap_{\varepsilon>0}\triangle_\varepsilon$，且$P_x$(存在无限多个$n$使$X_n\in\triangle$)$=1$，则在定理的条件下，$f_1\equiv f_2$.

下面讨论(3.70)有多个解的情形$V(x)$的特征。

定理 3.35 设$g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，$f\in\mathscr{L}(A^+)$为(3.70)的解，则$f(x)\equiv V(x), x\in E$的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(X_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n) \qquad (3.75)$$

证明 必要性。由定理3.17，V是g之最小过份控制，因此由引理3.12，(3.75)成立。

充分性。置$\tau^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0: f(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$，则由(3.75)易知，$P_x(\tau^\varepsilon<\infty)=1$，由$f\in L(A^+)$，故$f(x)<\infty$. 由引理3.11，$E_x f(X_{\tau^\varepsilon\wedge n})=f(x)$。令$n\to\infty$，由Fatou引理，$E_x f(X_{\tau^\varepsilon})\geqslant f(x)$，于是

$$V(x)\geqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon})-\varepsilon\geqslant E_x f(X_{\tau^\varepsilon})-\varepsilon\geqslant f(x)-\varepsilon$$

因此$V(x)\geqslant f(x)$，而$g\in\mathscr{L}(A^-)$，V是g之最小过份控制，故$V(x)\leqslant f(x)$，所以$f(x)=V(x), x\in E$. 证毕。

到现在为止，我们总假定 A_2' 条件成立，即假定 $g(X_\infty)=\overline{\lim_{n\to\infty}} g(X_n)$，现在假定 $g(X_\infty)=\eta$，η 是 Φ_∞ 可测的随机变量，其中 $\Phi_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n$，而 $\Phi_n=\sigma(X_n,X_{n+1},\cdots)$，且假定 $E_x\eta^-<\infty$，$x\in E$，令

$$\overline{V}_\eta(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x(g(X_\tau)I_{(\tau<\infty)}+\eta I_{(\tau=\infty)})$$

我们将证明，只要将 $g(x)$ 改为 $\bar{g}(x)=g(x)\vee E_x\eta$，则 $\overline{V}_\eta(x)$ 便是 $\bar{g}(x)$ 的值函数。

定理 3.36 设 $g\in\mathscr{L}(A^-)$，$E_x\eta^-<\infty$，$x\in E$，则

$$\overline{V}_\eta(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x\bar{g}(X_\tau) \tag{3.76}$$

且

$$\overline{V}_\eta(x)=g(x)\vee T\overline{V}_\eta(x) \tag{3.77}$$

证明 由定理 3.26

$$\widetilde{V}(x)\triangleq\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x\bar{g}(X_\tau)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x\bar{g}(X_\tau)$$

令

$$\sigma_\tau(\omega)=\begin{cases}\tau(\omega), & g(X_\tau)\geqslant E_{X_\tau}\eta;\\ +\infty, & \text{否则}\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x)&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x\{g(x_\tau)I_{(g(x_\tau)\geqslant E_{X_\tau}\eta)}+E_{X_\tau}\eta I_{(g(x_\tau)<E_{X_\tau}\eta)}\}\\&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_xg(x_\tau)I_{(g(x_\tau)\geqslant E_{X_\tau}\eta)}+E_x\eta I_{(g(x_\tau)<E_{X_\tau}\eta)}\\&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}[E_xg(x_\tau)I_{(\sigma_\tau<\infty)}+E_x\eta I_{(\sigma_\tau=\infty)}]\\&\leqslant\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x(g(x_\sigma)I_{\sigma<\infty}+\eta I_{\sigma=\infty})=\overline{V}_\eta(x)\end{aligned}$$

另一方面，因为 $\bar{g}(x)\geqslant E_x\eta>-\infty$，于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\bar{g}(X_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x(\eta\,|\,\mathscr{F}_n)\geqslant\eta$$

于是

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(x)&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x(\bar{g}(X_\tau)I_{(\tau<\infty)}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\bar{g}(X_n)I_{(\tau=\infty)})\\&\geqslant\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x(g(X_\tau)I_{(\tau<\infty)}+\eta I_{(\tau=\infty)})=\overline{V}_\eta(x)\end{aligned}$$

所以 $\bar{V}(x)=\bar{V}_\eta(x)$，(3.76)得征。

往证(3.77)式，由于 $\bar{g}\in\mathscr{L}(A^-)$，由定理 3.17

$$\bar{V}_\eta(x)=\bar{V}(x)=\bar{g}(x)\vee T\bar{V}_\eta(x)=g(x)\vee E_x\eta\vee T\bar{V}_\eta(x)$$

但 $\bar{V}_\eta(x)\geqslant g(x)\vee E_x\eta$，故 $T\bar{V}_\eta(x)\geqslant TE_x\eta=E_x\eta$. 所以

$$\bar{V}_\eta(x)=g(x)\vee T\bar{V}_\eta(x)$$ 证毕

上面定理表明 $\bar{V}_\eta(x)$满足方程(3.70)，下面定理表明(3.70)的解总可以表示为某个 $\bar{V}_\eta(x)$。

定理 3.37 设 $g\in\mathscr{L}(A^-,A^+)$，且 $f\in\mathscr{L}(A^+)$满足(3.70)，则它可表示为

$$f(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x(g(X_\tau)I_{(\tau<\infty)}+\eta I_{(\tau=\infty)}) \tag{3.78}$$

其中，$\eta=\lim\limits_{n\to\infty}f(X_n)$。

证明 因为 f 是过份函数，且 $f\in\mathscr{L}(A^-)$，因此极限 $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}f(X_n)$存在，令 $\bar{g}(x)=g(x)\vee E_x\eta$，往证

$$f(x)=\bar{g}(x)\vee Tf(x) \tag{3.79}$$

由 Fatou 引理可知 $f(x)\geqslant E_x\lim\limits_{n\to\infty}f(X_n)$，因此

$$Tf(x)=E_xf(X_1)\geqslant E_x(E_{X_1}\lim_{n\to\infty}f(X_n))=E_x\eta$$

且

$$\bar{g}(x)\vee Tf(x)=g(x)\vee E_x\eta\vee Tf(x)=g(x)\vee Tf(x)=f(x)$$

往证

$$\lim_{n\to\infty}f(X_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\bar{g}(X_n)\quad P_x-a.s\quad x\in E \tag{3.80}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}(E_{X_n}\lim_{k\to\infty}f(X_k))\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x(\theta_n\lim_{k\to\infty}f(X_k)\mid\mathscr{F}_n)\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x(\lim_{k\to\infty}f(X_k)\mid\mathscr{F}_n)\\&=\eta\end{aligned}$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{g}(X_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(g(X_k)\vee E_{X_n}\lim_{k\to\infty}f(X_k))=\eta=\lim_{n\to\infty}f(X_n)$$

由于 $\tilde{g}\in L(A^-,A^+)$，$f\in L(A^+)$，从定理 3.35 即知，$f(x)=\tilde{V}(x)\triangleq \sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_x\tilde{g}(X_\tau)=\tilde{V}_g(x)$

定理得证。

定理 3.26 表明，当 $g\in\mathscr{B}$ 时，$V(x)$是 g 之最小 $\overline{C}(g)$正则控制，因此在解方程(3.70)时，可用它来辨认哪一个解是 $V(x)$，下面的定理给出方程(3.70)的 $\overline{C}(x)$正则控制的特征。

定理 3.38 设 $g\in\mathscr{B}(a^-)$，f 是(3.70)的解，如果它又是 $g(x)$ 的 $\overline{C}(g)$正则控制，则

$$f(x)=g(x)\vee E_xg(X_\infty)\vee Tf(x) \tag{3.81}$$

式中 $g(X_\infty)=\overline{\lim_{n\to\infty}}g(x_n)$；反之(3.81)的解必是(3.70)的 $\overline{C}(g)$正则控制的解。

证明 如果 f 是 g 之 $\overline{C}(g)$正则控制，那么由 $g\in B(a^-)$，可见 $\infty\in\overline{C}(g)$，由正则性得 $E_xg(X_\infty)\leqslant E_xf(X_\infty)\leqslant f(x)$，因此(3.70)必满足(3.81)。反之，若 f 满足(3.81)，则

$$f(x)\geqslant E_xg(X_\infty)\geqslant -E_x\overline{\lim_{n\to\infty}}g^-(X_n)$$

令 $\eta=-\lim_{n\to\infty}g^-(X_n)$，则 $f(x)\geqslant E_x\eta$，于是

$$f(X_n)\geqslant E_{X_n}\eta=E_x(\eta|\mathscr{F}_n)\quad P_x-a.s\quad x\in E$$

可见$(f(X_n),\mathscr{F}_n,P_x)$是控制一个正则鞅的上鞅，于是 Doob 停止定理成立，由此即得 $f(x)$是 $g(x)$的 $\overline{C}(g)$正则控制。

往证(3.81)的解也满足(3.70)，设 $x\in E$，而 $E_xg(X_\infty)<\infty$，则由

$$Tf(x)=E_xf(X_1)\geqslant E_xf(X_\infty)\geqslant E_xg(X_\infty)$$

可见(3.81)的解必满足(3.70)；如 $E_xg(X_\infty)=\infty$，则由(3.81)，$f(x)=+\infty$；而且从 $Tf(x)\geqslant E_xg(X_\infty)=\infty$，可见(3.70)成立。

§3.10 随机化停时与停时的充足类

由§3.4注6看出，对于马氏链的最优停止问题，我们只要考虑关于 $\mathscr{G}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$ 的停时类，这个事实引导我们讨论下述问题。

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$X=(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)$，$n\in\mathscr{N}$（全体自然数）为取值在状态空间 $(E,\mathscr{B})$ 上的马氏链，记 $(\mathscr{T}(\mathscr{F}))$ 为关于 $(\mathscr{F}_n)$ 一停止规则的类，则

$$V(x)=\sup E_x g(X_\tau)$$

其中上确界取遍使得 $E_x g(X_\tau)$ 有意义的 $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F})$。

定义 3.5 假设 $\mathscr{F}$ 的子代数族 $\mathscr{F}^*=(\mathscr{F}_n^*)$，$n\in N$ 满足

i) $\mathscr{F}_n^*\subseteq\mathscr{F}_{n+1}^*$，　$\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}_n^*\subseteq\mathscr{F}$；

ii) 假设 $P_x^*(A)$ 是定义在 $\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n^*)$ 上概率测度，且 $\forall A\in\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)$，有

$$P_x^*(A)=P_x(A) \tag{3.82}$$

则称关于 $(\mathscr{F}_n^*)$ 的停时类 $\mathscr{T}(\mathscr{F}^*)$ 为 $\mathscr{T}(\mathscr{F})$ 的随机化，于是 $\mathscr{T}(\mathscr{F}^*)\supseteq\mathscr{T}(\mathscr{F})$，如果记

$$V^*(x)=\sup E_x g(X_\tau)$$

这里上确界取遍使得 $E_x g(X_\tau)$ 有意义的 $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F}^*)$。

显然 $V^*(x)\geqslant V(x)$，注意到定理3.26之3)

$$V(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)$$

$$V^*(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}Q^{*n} g_a^b(x)$$

其中，$Q^*g(x)=g(x)\vee E_x^* g(X_1)$。

由(3.82)可知，$E_x^* g(X_1)=E_x g(X_1)$，于是 $V^*(x)=V(x)$，因此

我们证明了

定理 3.39 设 $g \in \mathscr{B}$，则 $V^*(x)=V(x)$，亦即随机化停时并不改变值函数。

显然如此，停时的随机化还是有意义的。

例如，对某个 $x\in E$，$V(x)=+\infty$，最优停止规则不一定属于 $\mathscr{T}(\mathscr{F})\triangleq\mathscr{T}$，但却属于 $\mathscr{T}(\mathscr{F}^*)$，事实上由 $V(x)=+\infty$，必存在一列 $(\tau_i): i\in\mathscr{N}$，$\tau_i\in\mathscr{T}(\mathscr{F})$，使得 $+\infty=V(x)=\sup\limits_i E_x g(X_{\tau_i})$，不失一般性，假定 $E_x g(X_{\tau_i})\geqslant 2^i$.

设 $\rho=\rho(\omega)$ 是一个可测随机变量，取值 $i=1,2,\cdots$，且 $P(\rho(\omega)=i)=2^{-i}$，此时①

$$P_x^*([\rho(\omega)=i])\cap A)=P_x(A)2^{-i}$$

这里 $A\in\sigma(\bigcup\limits_s\mathscr{F}_s)$，定义随机化的时间

$$\tau^*(\omega)=\tau_i(w),\quad \text{当 } \omega\in[\omega:\rho(\omega)=i]\text{时}$$

则显然有

$$E_x^* g(x_{\tau^*})=\sum_{\tau=1}^{\infty}E_x g(X_{\tau_i})2^{-i}=+\infty$$

又如我们要寻找一个停时 τ，使 $E_x f(X_\tau)=c$，但是假定在 $\mathscr{T}(\mathscr{F})$ 中没有一个停时满足上式，而却存在 τ_1,τ_2 使 $E_x f(X_{\tau_1})=a<c$，$E_x f(X_{\tau_2})=b>c$，我们可取这样的随机化停时：设 $\rho(\omega)$ 是一个 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量，满足

$$P_x^*(\rho(\omega)=1)=\frac{b-c}{b-a}$$

$$P_x^*(\rho(\omega)=2)=\frac{c-a}{b-a}$$

令 $\tau^*(\omega)=\tau_i(\omega)$，如要 $\omega\in[\rho(\omega)=i]$，$i=1,2$；那么只要 $P_x^*([\rho(\omega)=i]\cap A)=P_x^*(A)\cdot P_x^*(\rho(\omega)=i)$，就有 $E_x^* f(X_{\tau^*})=C$.

---

① 或者假定 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是够"丰富"的，或者用新空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})$ 代替 $(\Omega,\mathscr{F})$，其中 $\tilde{\Omega}=\Omega\times\Omega^*$，$\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\times\mathscr{F}^*$ 而 $(\Omega^*,\mathscr{F}^*)$ 是由随机化样本 ω^* 组成的可测空间。

沿着随机化停时(停时类的扩大)的反方向讨论问题,我们自然要提出停时充足类的问题。

定义 3.6 设非降 σ 代数 $G=(\mathscr{G}_n)$, $n\in\mathscr{N}$, 满足 $\mathscr{G}_n\subseteq\mathscr{F}_n$, 称 $\mathscr{T}(G)\triangleq\{\tau$ 是关于 G 的停止规则$\}$为停时充足类是指

$$\sup_{\tau\in\mathscr{T}(G)} E_x g(X_\tau)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F})} E_x g(X_\tau)$$

定理 3.40 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n,P_x)$, $n\in\mathscr{N}$ 是一个马氏链, $g\in B(A^+)$, $G=(\mathscr{G}_n)$, $n\in\mathscr{N}$ 是一个非降代数族, $\mathscr{G}_n\subseteq\mathscr{F}_n$, $n\in\mathscr{N}$, 如果

i) $g(X_n)$是 $\mathscr{G}_n$ 是可测的, $n\in\mathscr{N}$;

ii) 对于任一个 $\mathscr{G}_{n+1}$ 可测的随机变量 $Z=Z(\omega)$, $E_x|Z|<\infty$, $x\in E$ 有

$$E_x(Z|\mathscr{F}_n)=E_x(Z|\mathscr{G}_n)\quad P_x-a.s\ x\in E, n\in\mathscr{N} \tag{3.83}$$

则 $\mathscr{T}(G)$便是停时的充足类。

证明 由定理 3.22

$$V(x)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{n\to\infty}Q^n g_a^b(x)$$

由 1)及 2), $V(X_n)$是 $\mathscr{G}_n$ 是可测的,由定理 3.25, $\forall\ \varepsilon>0$, , $\tau^\varepsilon\triangleq\inf\{n\geqslant0: V(X_n)\leqslant g(X_n)+\varepsilon\}$是$(\varepsilon, V)$最优的。由于 $g(X_n)$, $V(X_n)$都是 $\mathscr{G}_n$ 可测的,因此 $\tau^\varepsilon\in\mathscr{T}(\mathscr{F})$,由 $\varepsilon>0$ 的任意性

$$\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F})} E_x g(X_\tau)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F})} E_x g(X_\tau)$$

所以 $\mathscr{T}(\mathscr{G})$是停时充足类。

推论 3.41 设 $X=(X',X'')=((X_n',X''_n),\mathscr{F}_n,P_{x',x''})$, $n\in\mathscr{N}$ 是一个以$(E'\times E'',\mathscr{B}'\times\mathscr{B}'')$为状态空间的马氏过程,假定报酬函数 $g(x',x'')$独立于 x''(或更准确地说,它是 $\mathscr{B}'\times\{\Phi,E''\}$可测的),且属于 $B(A^+)$,又设 X' 本身是一个马氏过程,则 $\mathscr{T}(\mathscr{F}')$是一个停时充足类,其中 $\mathscr{F}'=\mathscr{F}'_n$, $(\mathscr{F}'_n)=\sigma(\omega: X'_0,\cdots,X'_n)$,因此

$$\begin{aligned}V(x',x'')&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F})} E_{x',x''}g(X'_\tau,X''_\tau)\\&=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{F}')} E_{x',x''}g(X'_\tau,X''_\tau)\end{aligned}$$

此时 $V(x',x'')$ 与 x'' 是无关的。

§3.11 带观察费用的最优停止

许多统计应用问题导致要讨论带观察费用的马氏链的最优停止。

设在第 n 步的报酬函数为

$$G_{\gamma}(n;X_0,\cdots,X_n)=\begin{cases}\alpha^n g(X_n)-\sum_{s=0}^{n-1}\alpha^s C(X_s), & n\geqslant 1\\ g(X_0), & n=0\end{cases}$$

(3.84)

其中 $0<\alpha<1$，并设 $g(x),C(x)\in\mathscr{B}$，$C(x)\geqslant 0$，为简单起见，还假定

$$|g(x)|\leqslant G<\infty,E_xC(X_n)<\infty,\quad n=0,1,2,\cdots \quad (3.85)$$

记

$$\mathscr{T}(\alpha,C)=\{\tau\in\mathscr{T}:E_x\sum_{s=0}^{\tau-1}\alpha^s C(X_s)<\infty,x\in E\}$$

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(\alpha,C)}E_x\{\alpha^\tau g(X_\tau)-\sum_{s=0}^{\tau-1}\alpha^s C(X_s)\} \quad (3.86)$$

定义 3.7 称 $f\in\mathscr{B}$ 为 $g\in\mathscr{B}$ 的 (α,C) 过份控制是指，对一切 $x\in E$

$$\alpha Tf(x)-C(x)\leqslant f(x)$$

且

$$f(x)\geqslant g(x)$$

定理 3.42 设 $f(x),g(x)$ 满足(3.85)，$0<\alpha\leqslant 1$，则

1) $V(x)$ 是 $g(x)$ 的最小 (α,C) 过份控制；

2) $V(x)=g(x)\vee(\alpha TV(x)-C(x))$；

3) $V(x)=\lim_{n\to\infty}Q^n_{(\alpha,C)}g(x)$，式中 $Q_{(\alpha,C)}f(x)=f(x)\vee(\alpha Tf(x)-$

$C(x))$;

4) $\forall\ \varepsilon>0, \tau^{\varepsilon}\triangleq\inf\{n\geqslant 0: \alpha^{n}V(X_n)\leqslant\alpha^{n}g(X_n)+\varepsilon\}$是类$\mathscr{T}(\alpha,C)$中$\varepsilon$最优停时；

5) 如$P_x(\sum_{S=0}^{\infty}\alpha^{S}C(X_S)=\infty)=1, x\in E$，则$P_x(\tau^0<\infty)=1$，$\tau^0$是$\mathscr{T}(\alpha,C)$中最优规则。

证明 记$v(x)=\lim_{n\to\infty}Q^{n}_{(\alpha,C)}g(x)$，可以证明$v(x)$是$g(x)$的最小$(\alpha,C)$过份控制。事实上，$V(x)\geqslant g(x)$是明显的，而由单调收敛定理易证它是$(\alpha,C)$过份的，如$f(x)$是$g(x)$的$(\alpha,C)$过份控制，则$Q_{(\alpha,C)}f(x)=f(x)$，所以$f(x)=Q^{n}_{(\alpha,c)}f(x)\geqslant Q^{n}_{(\alpha,c)}g(x)$，$f(x)\geqslant v(x)$。从$Q^{n}_{(\alpha,c)}g(x)=g(x)\vee Q^{n-1}_{(\alpha,c)}g(x)$，不难得出

$$v(x)=g(x)\vee(\alpha Tv(x)-C(x))$$

为了证明$V(x)=v(x)$，先证对一切$\tau\in\mathscr{T}(\alpha,c)$，有

$$E_x[\alpha^{\tau}(v(X_\tau))-\sum_{S=0}^{\tau-1}\alpha^{S}c(X_S)]\leqslant v(x) \tag{3.87}$$

首先$\{V(X_n),\mathscr{F}_n,P_x\}$，$n\in\mathscr{N}$构成所谓的$(\alpha,c)$上鞅，即$E_x|(v(X_n)|<\infty$

$$\alpha E_x(v(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)-C(X_n)\leqslant v(X_n) \tag{3.88}$$

事实上，$|v(x)|\leqslant G<\infty$，而

$$\begin{aligned}&\alpha E_x(v(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)-C(X_n)\\ &=\alpha E_{X_n}v(X_1)-C(X_n)\\ &=\alpha Tv(X_n)-C(X_n)\\ &\leqslant V(X_n)\end{aligned}$$

设$\tau\in\mathscr{T}(\alpha,c)$，则由$(\alpha,c)$上鞅的性质

$$E_x(\alpha^{\tau\wedge N}v(X_{\tau\wedge N})-\sum_{S=0}^{(\tau\wedge N)-1}\alpha^{S}C(X_S)\leqslant v(x), N<\infty \tag{3.89}$$

(3.89)式可用类似于对有界停时的 Doob 停止定理的证明方

法加以证明(请读者补足)。再由控制收敛定理,令 $N\to\infty$,便得

$$E_x(\alpha^\tau g(X_\tau)-\sum_{S=0}^{\tau-1}\alpha^S C(X_S))\leqslant E_x(\alpha^\tau v(X_\tau)-\sum_{S=0}^{\tau-1}\alpha^S C(X_S))\leqslant v(x)$$

于是 $V(x)\leqslant v(x)$,为证明相反的不等式,引入

$$\tau^\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0:\alpha^n v(X_n)\leqslant\alpha^n g(X_n)+\varepsilon\}$$

参照引理 3.12 的证明,取

$$\psi_n=\sup_{j\geqslant n}[\alpha^j g(X_j)-\sum_{s=0}^{j-1}\alpha^s c(X_S)]$$

用 θ_n 表示 n 步推移算子,则

$$\psi_n=\alpha^n(\theta_n\psi_0)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S C(X_S)$$

令

$$\begin{aligned}\varphi_n&=E_x(\psi_n|\mathscr{F}_n)\\&=\alpha^n E_{X_n}\psi_0-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S C(X_S)\\&=\alpha^n\varphi(X_n)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S C(X_S)\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)=E_x\psi_0$,显然 $T\varphi(x)=E_xE_{X_1}\psi_0\leqslant\dfrac{1}{\alpha}E_x\psi_1<\infty$,$\varphi(x)\geqslant g(x)$,又

$$\alpha T\varphi(x)-C(x)\leqslant E_x\psi_1\leqslant\varphi(x)$$

所以 φ 是 g 的(α,c)过份控制,因而 $\varphi(x)\geqslant v(x)$。

对 $n\geqslant m$,$E_x(\psi_m|\mathscr{F}_n)\geqslant E_x(\psi_n|\mathscr{F}_n)=\varphi_n\geqslant\alpha^n v(X_n)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S C(X_S)$。令 $n\to\infty$,则

$$\psi_m\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}(\alpha^n v(X_n)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S C(X_S))$$

再令 $m\to\infty$,便得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\alpha^n g(X_n)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S(X_S))\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(\alpha^n v(X_n)-\sum_{S=0}^{n-1}\alpha^S(X_S))$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha^n g(X_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha^n v(X^n)\quad P_x-a.s.\quad x\in E$$

从而 $P_x(\tau^\varepsilon<\infty)=1, x\in E, \varepsilon>0$，现在来证明 $\tau^\varepsilon\in\mathscr{T}(\alpha,c)$，即证明

$$E_x(\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon-1}\alpha^S C(X_S))<\infty \tag{3.90}$$

如同引理 3.11，由于 $|v(x)|<G$ 以及它是 (α,c) 过份控制，因而

$$v(x)=E_x[\alpha^{\tau^\varepsilon\wedge n}v(X_{\tau^\varepsilon\wedge n})-\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon\wedge n-1}\alpha^S C(X_S)]$$

$$\leqslant E_x\alpha^{\tau^\varepsilon}v(X_{\tau^\varepsilon})I_{(\tau^\varepsilon<n)}-E_x\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon-1}\alpha^s c(X_S)I_{(\tau^\varepsilon<n)}+E_x\alpha^n v(X_n)I_{(\tau^\varepsilon\geqslant n)}$$

$$\tag{3.91}$$

从而

$$E_x(\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon-1}\alpha^S C(X_S)I_{\tau^\varepsilon<n})\leqslant 3G<\infty$$

令 $n\to\infty$，则(3.90)获证，即 $\tau^\varepsilon\in\mathscr{T}(\alpha,c)$。

再从(3.91)式中令 $n\to\infty$，得

$$v(x)\leqslant E_x(\alpha^{\tau^\varepsilon}v(X_{\tau^\varepsilon})-\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon-1}\alpha^S C(X_S))$$

$$\leqslant E_x(\alpha^{\tau^\varepsilon}g(X_{\tau^\varepsilon})-\sum_{S=0}^{\tau^\varepsilon-1}\alpha^s C(X_S))+\varepsilon$$

所以 $v(x)\leqslant V(x)$，1)—4)得到了证明。

如 $P_x(\tau^0<\infty)=1$，则类似于(3.31)式

$$v(x)=E_x(\alpha^{\tau^0\wedge n}v(X_{\tau^\varepsilon\wedge n})-\sum_{S=0}^{\tau^0\wedge n-1}\alpha^S C(X_S)$$

由 Fatou 引理得

$$V(x)=v(x)$$
$$\leqslant E_x(\alpha^{\tau^0}v(X_{\tau^0})-\sum_{S=0}^{\tau^0-1}\alpha^S C(X_S))$$
$$=E_x(\alpha^{\tau^0}g(X_{\tau^0})-\sum_{S=0}^{\tau^0-1}\alpha^S C(X_s))$$

又因为 $E_x(\sum_{S=0}^{\tau^0-1}\alpha^S C(X_S))\leqslant E_x\alpha^{\tau^0}g(X_{\tau^0})-v(x)<\infty$，故 $\tau^0\in\mathscr{T}(\alpha,c)$，这表明 $P_x(\tau^0<\infty)=1$ 时，τ^0 是 $\mathscr{T}(\alpha,c)$中最优规则。

往证 5)。如有某一 $x_0\in E$，使 $P_{x_0}(\tau^0=\infty)>0$，则从 $P_{x_0}(\sum_{S=0}^{\infty}\alpha^S C(X_S)=\infty)=1$，可得 $V(x_0)=v(x_0)=-\infty$ 与 $v(x_0)\geqslant g(x_0)>-\infty$ 矛盾，证毕。

带费用的最优停止问题在某些时候也可化为不带费用的问题。

定理 3.43　设 $C(x)\geqslant 0$，且

$$E_x(\sum_{S=0}^{\infty}\alpha^S C(X_S))<\infty,x\in E \tag{3.92}$$

则

$$V(x)=\sup E_x\alpha^\tau G(X_\tau)-f(x) \tag{3.93}$$

其中，$f(x)=E_x(\sum_{S=0}^{\infty}\alpha^S C(X_S))$，$G(x)=g(x)+f(x)$。

证明　令 $\xi=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s C(X_s)$，则对于 $\tau\in\mathscr{T}$

$$\theta_\tau\xi=\alpha^{-\tau}\sum_{s=\tau}^{\infty}\alpha^s c(X_s)$$

由强马氏性

$$f(x)=E_x\xi=E_x(\sum_{s=0}^{\tau-1}\alpha^s c(X_s)+\sum_{s=\tau}^{\infty}\alpha^s c(X_s))$$
$$=E_x(\sum_{s=0}^{\tau-1}\alpha^s c(X_s)+E_x\alpha^\tau\theta_\tau\xi$$

$$=E_x(\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n c(X_n))+E_x\alpha^\tau f(X_\tau)$$

$$=E_x(\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n c(X_n))+E_x\alpha^\tau G(X_\tau)-E_x\alpha^\tau g(X_\tau)$$

于是

$$\sup E_x\alpha^\tau G(X_\tau)=\sup(\alpha^\tau g(X_\tau)-\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n c(X_n))+f(x)$$

所以

$$V(x)=\sup E_x\alpha^\tau G(X_\tau)-f(x)$$

例 9　设 $\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是一列独立的随机变量，并且具有相同的均匀分布，$E|\xi|<\infty$，对 $x\in R$，令

$$X_n=\max(x,\xi_1,\cdots,\xi_n),\quad X_0=x \tag{3.94}$$

$$V(x)=\sup E_x(\alpha^\tau X_\tau-C\sum_{S=0}^{\tau-1}\alpha^S) \tag{3.95}$$

其中，C 为非负常数，$0<\alpha\leqslant 1$，上确界取遍一切使得 $E_x(\alpha^\tau X_\tau-C\sum_{S=0}^{\tau-1}\alpha^S)^-<\infty,x\in E$ 的停时。

显然，$X=(X_n,\mathscr{G}_n,P_x)$，$n\geqslant 0$，构成一个马氏链，这里 $\mathscr{G}_n=\sigma(\omega:\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\mathscr{G}_0=(\Omega,\Phi)$，$P_x$ 是在 $\mathscr{G}=\sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{G}_n)$ 上由 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 导出的概率测度。

记 γ 为方程

$$E(\xi-r)^+=\frac{(1-\alpha)r+c}{\alpha} \tag{3.96}$$

的唯一的根，令 $g(x)=x$，则

$$\begin{aligned}&[\alpha Tg(x)-c]-g(x)\\&=\alpha E(x\vee\xi)-x-C\\&=\alpha E(x\vee\xi-x)-x(1-\alpha)-c\\&=\alpha E(\xi-x)^+-x(1-\alpha)-c\end{aligned}$$

所以

$$\{x: \alpha Tg(x)-c\}-g(x)\leqslant 0\}=\{x: x\geqslant \gamma\}$$

由此如 $x\in[x: x\geqslant \gamma]$，则对任何 n，$X_n\geqslant \gamma$，亦即

$$\alpha Tg(X_n)-C\leqslant g(X_n) \quad P_x-a.s$$

这就是单调情形，因此由例 2 可知，若令

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0: X_n\geqslant \gamma\}$$

如果 $P_x(\tau_0<\infty)=1, x\in R$，则它便是最优规则。

第四章　连续参数过程的最优停止

前三章讨论了随机报酬序列的最优停止问题，现在讨论连续参数报酬过程的最优停止问题，这无论在理论上或实际的应用上都是很有必要的。一方面，许多实际的问题中报酬用连续时间的随机过程来刻划是比较确切的；另一方面，连续时间最优停止的研究，使得最优停止的研究更加深入，应用也更加广泛。为此我们需要关于连续参数的鞅论，过程投影理论以及马尔可夫过程等近代概率论的一系列重要的结果。当然，在应用中我们又需将参数离散化，所以连续与离散的相互转化是一个值得研究的问题。

虽然连续情形与离散情形的某此结果是类似的，但必须注意它们的证明方法是大不相同的，始终抓住二者的差异这个实质对于掌握连续时间最优停止理论是十分必要的。

在离散情形，若有停时列 $\sigma_n \to \sigma < \infty \quad a.s.$，则可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} X_{\sigma_n} = X_\sigma \quad a.s.$，这是因为在 $[\sigma = m]$ 上，当 n 充分大时，σ_n 取值为 m，而 $[\sigma < \infty]$ 是可列个集合 $[\sigma = m]$ 的并，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} X_{\sigma_n} \quad a.s.$，但是在连续参数情形，不对过程的轨道 X_t 作某些假定，就没有上面的极限的等式。

又如两个过程 X 与 Y，如对一切参数 t，$X_t = Y_t \quad a.s.$，则对于取离散值的停时 τ，容易得出，$X_\tau = Y_\tau \quad a.s.$，而对连续参数就没有这样的关系，这些都是由于在连续参数的情形，τ 取值于一个不可列集而造成的。

§ 4.1 记号与基本假设

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个完备的概率空间，$\{\mathscr{F}_t; t\in\mathscr{R}_+\}$是$\mathscr{F}$的一族非降子$\sigma$代数族(这里$\mathscr{R}_+$表示全体非负实数)，满足所谓的通常条件：

$$\text{每个 } \mathscr{F}_t \text{ 完备，且右连续，即} \bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_t. \tag{4.1}$$

记

$$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{t\in\mathscr{R}_+}\mathscr{F}_t) \tag{4.2}$$

称二元函数$\{X(t,w); t\in\mathscr{R}_+, w\in\Omega\}$为一随机过程，是指对任何$t\in\mathscr{R}_+$，$X(t,\omega)$是$\mathscr{F}$可测的随机变量，随机过程$\{X(t,w); t\in\mathscr{R}_+, w\in\Omega\}$也可方便地写为$X_t(w)$，$X_t$或$X(t)$。

设$\{X_t; t\in\mathscr{R}_+\}$十为一随机过程，称它是可测的，如果作为$(t,\omega)$的函数，$X_t(\omega)$为$\mathscr{B}(\mathscr{R}_+)\times\mathscr{F}$可测的；称$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$适应过程，如果对任何$t\in\mathscr{R}_-$，$X_t$为$\mathscr{F}_t$可测；称$(X_t)$为$(\mathscr{F}_t)$循序(可测)过程，如果对一切$t\in R_+$，$X$限于$[0,t]\times\Omega$为$\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$可测。

显然$(\mathscr{F}_t)$循序过程是可测过程，且是$(\mathscr{F}_t)$适应的过程。

称过程(X_t)是右连续的，如果对一切$\omega\in\Omega$，轨道$X(\cdot,\omega)$为$\mathscr{R}_+$上右连续函数，称(X_t)为右连左极过程，如果$\forall\ \omega\in\Omega$，$X\in X(\cdot,\omega)$右连续，且$\forall\ t>0$，左极限$X_{t^-}(\omega)=\lim\limits_{s<t,s\to t}X_s(\omega)$存在且有穷，$\mathscr{R}_+\times\Omega$上由全体右连左极$(\mathscr{F}_t)$适应过程产生的$\sigma$代数，称为可选$\sigma$代数，记为$\mathscr{O}$，$\mathscr{O}$可测过程称为可选过程。

称两个过程$X=(X_t)$与$Y=(Y_t)$互为修正，是指$\forall\ t\in R_+$，$X_t=Y_t a.s$；称为是无区别的，如果$\{(t,\omega): X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$在$\Omega$上的投影是一个零概(率)集。

$\mathscr{R}_+\times\Omega$ 上的集合，称为是不足道集，是指它在 Ω 上的投影为零概集。

定义 4.1 设 $X=(X_t)$，是两个随机过程，称 X 是 Y 的控制并记为 $X\geqslant Y$，是指 $\{(t,\omega):X_t(\omega)<Y_t(\omega)\}$ 为一个不足道集。

本章中 $X\geqslant Y$，$X=Y$，$X<Y$，均是指上述式子不成立的 (t,ω) 全体为不足道集。

本章还需要下面有关鞅论与随机过程论的定理，我们以单独编号的命题形式列出。

命题 1 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备，则一切右连续的适应过程为可选过程。([3],5.22)

命题 2 设 (X_t) 为一循序过程，X_∞ 为一 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量，则对任何停时 T

$$X_T=X_T I_{[T<\infty]}+X_\infty I_{[T=\infty]}$$

为 $\mathscr{F}_T$ 可测的随机变量，其中

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:A\cap[T\leq t]\in\mathscr{F}_t\}$$ ([3],4.14 及注)

截口定理我们将屡次用到。

命题 3(截口定理) 设 A 是可选集，则对任意 $\varepsilon>0$，存在停时 T，使得

i) $[[T]]\subset A$

ii) $P(T<\infty)\geqslant P(\pi(A))-\varepsilon$

这里 $\pi(A)$ 是 A 在 Ω 上的投影，$[[T]]=\{(t,\omega):t=T(\omega)\}$。([3],5.2)

命题 4 设 $X=(X_t)$，$Y=(Y_t)$ 是两个可选过程，如果对每个有界停时 T，$X_T=(\geqslant)Y_T$，$a.s.$，则 X 与 Y 无区别。(相应地 $X\geqslant Y$)([3],5.5,5.6)

命题 5 设 $Y=(Y_t)$ 是一个循序过程，则必存在可选过程 $X=(X_t)$，使得对一切有限停时 τ，有 $X_\tau=Y_\tau$，$a.s.$

证明 记 $A=\{(t,\omega):Y_t(\omega)<\infty\}$，令

$$X_t(w)=\begin{cases}\dfrac{Y_t(w)}{1+Y_t(w)}, & (t,w)\in A\\ 0, & (t,w)\notin A\end{cases}$$

则 $X=(X_t)$ 是有界(循序)可测过程,由可选投影定理([3],(6.2)),存在可选过程 $U=(U_t)$,使对一切有限停时 τ,$X_\tau=U_\tau$,$a.s$,即当 $Y_\tau<\infty$时

$$Y_\tau/(1+Y_\tau)=U_\tau$$

而当 $Y_\tau=\infty$时,$U_\tau=1$,令

$$X_t(\omega)=\begin{cases}U_t(\omega)/(1-U_t(\omega), & U_t(w)<1\\ \infty, & U_t(\omega)=1\end{cases}$$

则$\forall\ B\in\mathscr{B}(R)$

$$\{\omega;X_t(\omega)\in B\}$$

$$=\{U_t<1\}\cap\{\frac{U_t}{1-U_t}\in B\}\cup\{U_t=1\}\cap\{\infty\in B\}\in\mathscr{O}$$

可见 X 仍是可选过程,$\forall\ \tau<\infty$,当 $Y_\tau<\infty$时,$U_t<1$,$X_\tau=Y_\tau a.s$;而当 $Y_\tau=\infty$时,$U_\tau=1$,$X_\tau=\infty$于是命题获证。

命题 6　设$(\mathscr{F}_t)$右连续,则一切$(\mathscr{F}_t)$鞅有右连续的适应修正。([3],9 系)

命题 7　设(X_t)为一致可积上鞅(或鞅),其几乎所有轨道右连续,则当 $s\to\infty$时,$X_s\xrightarrow{a.s.\text{且}L^1}X_\infty$,且$(X_t)_t\in\overline{\mathscr{R}}_+$为上鞅(或鞅)。对任何停时 $\rho\leqslant T$,有 $E(X_t|\mathscr{F}_\rho)\leqslant X_\rho$　$a.s.$ 这里 $X_s\xrightarrow{L^1}X_\infty$是指 $E|X_s-X_\infty|\to 0(S\to\infty)$,而 $\overline{\mathscr{R}}_+=\mathscr{R}_+\cup\{\infty\}$。([3],3.11 及 3.21)

命题 8　设$\{X_n,\mathscr{F}_n\}_{n\in-\mathscr{N}}$为上鞅,如果 $\lim\limits_{n\to-\infty}EX_n<\infty$,则$(X_n)$一致可积,且$X_n\xrightarrow{a.s.\text{且}L^1}X_{-\infty}(n\to-\infty)$。([3],2.21)这里,$-\mathscr{N}$表示负整数的全体。

设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_t\}$为(适应)报酬过程,为了使对每个停时 τ,X_τ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测,必须假设 X 为一个循序过程,由命题 4,5 可知,

在讨论 $\sup EX_\tau$ 的最优停止问题中，不妨假定 X 为一个可选过程。

今后，我们将假定报酬过程 $X=(X_t)$ 是一个可选过程，且假定 A_2' 条件成立

$$X_\infty=\limsup_{t\to\infty}X_t \tag{4.3}$$

于是 X_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的随机变量，因而对任何停时 τ，X_τ 是可测的随机变量。记

$$\overline{\mathscr{T}}=\{\tau\text{ 为 }\overline{\mathscr{R}}_+\text{值的随机变量，且}\forall\ t\in\mathscr{R}_+,\{\tau\in t\}\in\mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{T}=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}},\text{且 }\tau<\infty\quad a.s\}$$

$$\mathscr{T}_B=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}},\text{且存在常数 }C,\text{使 }\tau\leqslant C\}$$

$$\overline{\mathscr{T}}_t=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}},\text{且 }\tau\geqslant t\},\mathscr{T}_t=\overline{\mathscr{T}}_t\cap\mathscr{T}$$

$$\overline{C}_t=\{\tau\in\overline{\mathscr{T}}:\tau\geqslant t,\text{且 }EX_\tau^-<\infty\},C_t=\overline{C}_t\cap\mathscr{T}$$

显然，我们只需在 $\overline{C}_t,\overline{C}_0$ 或 C_t,C_0 中讨论最优停止问题。为此令

$$\overline{V}_t=\sup_{\tau\in\overline{C}_t}EX_\tau,$$

并称它们分别为报酬过程 X 在 $\overline{C}_t$ 或 C_t 中的值。

称 τ 为 $\overline{C}_t$ 或(C_t)中的最优停时（或最优规则），如果 $EX_\tau=\overline{V}_t$（或 V_t）；τ 为 $\overline{C}_t$(或 C_t)中的 ε 最优停时（或 ε 最优规则），如果 $EX_\tau\geqslant\overline{V}_t-\varepsilon$(或 $V_t-\varepsilon$)。

过程 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_t\}$满足假设 A 是指存在一致可积鞅 $U=\{U_t,\mathscr{F}_t,t\in R_+\}$，使得对一切$(t,\omega)$，成立 $X(t,\omega)\leqslant U(t,\omega)$；如果$-X$ 满足假设 A，则称 X 满足假设 B.

§4.2 可选强上鞅与正则性

定义 4.2 称可选过程 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_t\}$为可选强上鞅，如果对一切 $\tau,\sigma\in\mathscr{T}_B,\tau\geqslant\sigma\quad a.s.$ 有 $EX_\tau^-<\infty$，且 $E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant X_\sigma$

a. s.

这里"强"的含义是指对 $\mathscr{T}_B$ 中停时，总成立 Doob 停止定理，如无特别指明，本节中所谓的上鞅(或鞅，下鞅)均是指常义的上鞅(或鞅，下鞅)。

显然，常义的右连续上鞅是可选强上鞅。

引理 4.1 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_+\}$ 是可选强上鞅，则对于任何停时 T，$X^T=\{X_{t\wedge T},\mathscr{F}_t,t\in R_+\}$ 仍是可选强上鞅。

证明 首先由 X 可选，$X_{t\wedge T}$ 为 $\mathscr{F}_{t\wedge T}\subseteq\mathscr{F}_t$ 可测的，设 $\tau,\sigma\in\mathscr{T}_B$，且 $\tau\geqslant\sigma$，则 $\tau\wedge T\geqslant\sigma\wedge T$，且均为有界停时，所以

$$E(X_\tau^T\mid\mathscr{F}_\sigma)=E(X_{\tau\wedge T}\mid\mathscr{F}_\sigma)\leqslant X_{\sigma\wedge T}=X_\sigma^T,\quad a.s.$$

这表明 X^T 是可选强上鞅。

引理 4.2 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_t\}$ 为可选过程，且对一切有界停时 T，$E|X_T|<\infty$ 如果对一切有界停时的降序列 (T_n)，$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T_n}$ 存在(允许为 $\pm\infty$)，则 X 几乎所有轨道在 R_+ 上存在右极限(允许为 $\pm\infty$)。([3]4.45)

引理 4.3 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in R_t\}$ 为可选强上鞅，且 $EX_0<\infty$，则对任何有界停时 T，$X_{T+}\leqslant X_T$ a. s.

证明 因为 $X=(X_t)$ 是可选强上鞅，对 $T\in\mathscr{T}_B$，$EX_T^-<\infty$，又 $EX_t<EX_0<\infty$，因此 $E|X_T|<\infty$，考虑任一列有界停时 $T_n\downarrow T$，则 $\{X_{T_n},\mathscr{F}_{T_n},n\in\mathscr{N}_+\}$ 构成一个反向上鞅，且 $\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T_n}\leqslant EX_0<\infty$，由引理 4.2，$X$ 的几乎所有轨道在 R_+ 上存在右极限。由于 $E(X_{T_n}|\mathscr{F}_T)\leqslant X_T$，而由命题 8，$(X_{T_n})$ 一致可积，从而 $E(X_{T_n}|\mathscr{F}_T)\xrightarrow{P}E(X_{T+}|\mathscr{F}_T)=X_{T+}$，于是存在子列 (T_{n_k})，使 $\lim\limits_{k\to\infty}E(X_{T_{n_k}}|\mathscr{F}_T)=X_{T+}$，所以 $X_{T+}\leqslant X_T$ a. s. …

定义 4.3 称过程 $X=(X_t)$ 的轨道是几乎右半上连续的，如果存在 $P(A)=0$，对一切 $\omega\in A^c$

$$\limsup_{s\to t,s>t}X_s\leqslant X_t \tag{4.4}$$

由引理 4.3 可见，对可选强上鞅 $X=(X_t)$，只要 $EX_0<\infty$，则它的轨道是几乎右半上连续的。

事实上，若令 $Y_t=\limsup\limits_{s\to t, s>t} X_s$，则它是可选过程，为证 $Y_t\leqslant X_t$，只须证对任何有界停时 τ，$Y_T\leqslant X_T$，取 $\tau_n(\omega)\downarrow\tau(\omega)$，则

$$Y_\tau=E(Y_\tau|\mathscr{F}_\tau)=E(\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\lim_{n\to\infty}E(X_{\tau_n}|\mathscr{F}_\tau)\leqslant X_\tau$$

定义 4.4 设 X 是一个可选强上鞅，$X_\infty=\limsup\limits_{t\to\infty} X_t$，$\mathscr{M}\subset\overline{\mathscr{T}}$ 为一停时类，如果 $\forall\ \tau,\sigma\in\mathscr{M}$，$\tau\geqslant\sigma$，$EX_\tau$ 存在且

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant X_\sigma$$

则称 X 是 $\mathscr{M}$ 正则的上鞅，特别称 $\mathscr{T}$ 正则为正则。

特别要注意这里的可选强上鞅与一般文献中的定义并不一致，比如在 DELLACHERIE 与 MEYER 的"概率与位势 B"的附录中，要求可选强上鞅对一切 $T\in\mathscr{T}_B$，X_T 可积，而这里只要求 $EX_T<\infty$，关于正则性，我们也只要求上述 EX_τ 存在。所以可称之为广义可选强上鞅，但为简单起见，省掉了"广义"二字。

引理 4.4 设 $X=(X_t)$是可选强上鞅，$EX_0<\infty$且满足假设 B，则 X 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的可选强上鞅。

证明 设 $U=(U_t)$为一致可积鞅，$X\geqslant U$，令 $Y=(y_t)$为 U 的右连续适应修正(命题 6)，则 Y 可选，且由 Y 的一致可积性，存在极限 $y_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}y_t$ $a.s.$ $\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$E(y_\infty|\mathscr{F}_\tau)=y_\tau$ 记 D 为有理数集，则 $\forall\ r\in D$

$$X_r\geqslant U_r=Y_r$$

由 X 的右半上连续性，$\forall\ t\in R_+$，$X_t\geqslant X_{t+}\geqslant Y_t$，令 $V_t=X_t-Y_t$，则(V_t)是一个非负的可选强上鞅。$\forall\ \sigma,\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$\tau\geqslant\sigma$，$a.s$，$A\in\mathscr{F}_\sigma$

$$\int_{A\cap(\sigma\leqslant k)}V_{\tau\wedge K}\leqslant\int_{A\cap(\sigma\leqslant k)}V_\sigma \tag{4.5}$$

令 $k\to\infty$，对左式用 Fatou 引理，对右式用单调收敛定理，则得

$$\int_{A\cap(\sigma<\infty)}V_\tau\leqslant\int_{A\cap(\sigma<\infty)}V_\sigma \tag{4.6}$$

由 $V_t \geqslant 0$，存在极限 $V_\infty = \lim_{t\to\infty} V_t$，且 $V_\infty = X_\infty - Y_\infty$，在$[\sigma=\infty]$上，$V_\tau = V_\sigma = V_\infty$。因此

$$\int_{A\cap(\sigma=\infty)} V_\tau = \int_{A\cap(\sigma=\infty)} V_\sigma \tag{4.7}$$

由(4.6)(4.7)可知：$\forall\ A \in \mathscr{F}_\sigma$

$$\int_A V_\tau \leqslant \int_A V_\sigma$$

于是(V_t)是正则的，因此 $X=(X_t)$为 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则。

引理 4.5 设 $X_N = \{X_N(t), \mathscr{F}_t, t\in\mathscr{R}_+\}$，$N=1,2,\cdots$是一列递减的正则可选强上鞅，令 $X(t)=\inf_N X_N(t)$，如果$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，$EX_\tau$ 存在，则$\forall\ \tau,\sigma\in\mathscr{T}$，$\tau\geqslant\sigma$ 有

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant X_\sigma \tag{4.8}$$

证明 由 $X(t)=\inf_N X_N(t)$，至少表明过程 X 与右边的过程是无区别的，因此存在 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)=0$，当 $\omega\in A^c$ 时，$X(t)\equiv\inf_N X_N(t)$，对一切 t 成立，因此对任何 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，当 $\omega\in A^c$ 时，$X(\tau)=\inf_N X_N(\tau)$. 或者说

$$X(\tau)=\inf_N X_N(\tau) \qquad a.s. \tag{4.9}$$

$\forall\ \tau,\sigma\in\mathscr{T}$，$EX(\tau)$存在，$E(X(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)$有意义，且

$$\begin{aligned}
&E(X(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\\
&=E(\inf_N X_N(\tau,\omega)|\mathscr{F}_\sigma)\\
&\leqslant\inf_N E(X_N(\tau,\omega)|\mathscr{F}_\sigma)\\
&\leqslant\inf_N X_N(\sigma,\omega)=X(\sigma) \qquad a.s.
\end{aligned}$$

引理得证。

§4.3 Snell 包的存在性

在离散数情形，我们定义报酬(X_n)的 Snell 包

$$\gamma_n = \operatorname*{esssup}_{\tau \in C_n} E(X_\tau | \mathscr{F}_n) \qquad a.s. \tag{4.10}$$

且证明了 $\Gamma=(\gamma_n)$是控制 $X=(X_n)$的最小 C 正则上鞅，且$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$

$$\gamma_\tau = \operatorname*{esssup}_{\rho \in C_\tau} E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau) \qquad a.s. \tag{4.11}$$

但如果在连续情形也照(4.10)定义

$$\gamma_t = \operatorname*{esssup}_{\tau \in C_t} E(X_\tau | \mathscr{F}_t) \qquad a.s \tag{4.12}$$

此时相应的(4.11)式并不一定成立，现在我们从另一角度入手，即把 Snell 包定义为控制报酬过程的最小正则上鞅。

定义 4.5 称正则的可选强上鞅，$\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$是控制 X 的最小正则可选强上鞅（简称 MRS）是指 $\Gamma\geqslant X$，且如果另有正则的可选强上鞅 $\Gamma^{\gamma}\geqslant X$，则必 $\Gamma\geqslant\Gamma^{\gamma}$

下述的主要定理(4.6)，描述了 Snell 包(即 MRS)的存在性。

定理 4.6 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$是可选过程，如果下面两个条件之一成立，则必存在 X 的 MRS

i) $EX_\infty^-<\infty$，且 X 的几乎所有轨道右半上连续；

ii) $\forall\ T\in\mathscr{T}$，存在 $\rho\in\mathscr{T}$，$\rho\geqslant T$，使 $EX_\rho^-<\infty$.

先证明

引理 4.7 定理 4.6 中条件 i)蕴含条件 ii)。

证明 由 $EX_\infty^-<\infty$及$(\mathscr{F}_t)$的右连续，不妨假定 $E(X_\infty^-|\mathscr{F}_t)$是右连续的适应过程。(否则取其右连续适应修正)。$\forall\ \varepsilon>0$，令

$$\rho=\inf\{t\geqslant T: X_t\geqslant -E(X_\infty^-|\mathscr{F}_t)-\varepsilon\} \tag{4.13}$$

则 $\rho\in\overline{\mathscr{T}}$，且 $T\leqslant\rho<\infty$ $a.s.$，事实上，若 $P(\rho=\infty)>0$。这表明在$[\rho=\infty]$上，$X_t^-\geqslant E(X_\infty^-|\mathscr{F}_t)+\varepsilon$，令 $t\to\infty$便得矛盾. 由 ρ 的定义，可证

$$X_{\rho+}\geqslant -E(X_\infty^-|\mathscr{F}_\rho)-\varepsilon \tag{4.14}$$

事实上，由 ρ 的定义，对固定的 ω，存在一列 $\rho_i(\omega)\downarrow\rho(\omega)$，使 $X_{\rho_i}(\omega)\geqslant -E(X_\infty^-|\mathscr{F}_{\rho_i})-\varepsilon$，记

$$y_i = -E(X_\infty^-|\mathscr{F}_{\rho_i})$$

则$\{y_i\}_{i\in\mathcal{N}_+}$是一个反向上鞅，一致可积且存在极限$y_\infty=\lim\limits_{i\to\infty}y_i$，因而

$$y_\infty=-E(X_\infty^-|\mathscr{F}_{\rho+})=-E(X_\infty^-|\mathscr{F}_\rho)$$

而$X_{\rho_i}(\omega)\to X_{\rho+}(\omega)$，所以(4.14)获证。

由于X的几乎所有轨道右半上连续，所以$a.s$地有

$$X_\rho\geqslant X_{\rho+}\geqslant -E(X_\infty^-|\mathscr{F}_\rho)-e$$

从而

$$EX_\rho>-\infty$$

证毕

为了证明定理4.6，我们分两步。

引理4.8 设X是一个上一致有界的可选过程(即存在常数b，使对一切(t,ω)，$X_t(\omega)\leqslant b$)，且$\forall\ T\in\mathscr{T}$，存在$\rho\in\mathscr{T}$，$\rho\geqslant T$，使$EX_\rho^-<\infty$，则必存在X的MRS.

证明 $\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，令

$$_T\gamma=\text{esssup}\{E(X_\rho|T_T);\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant T\}\tag{4.15}$$

由本质上确界定义，存在一列$\{\tau_k'\}\subset\mathscr{T}$，$\tau_k'\geqslant T$，使得

$$_T\gamma=\sup_K E(X'_{\tau_k}|\mathscr{F}_T)\tag{4.16}$$

对τ_1'存在$\tau'\in\mathscr{T}$，$\tau'\geqslant\tau_1'$，使$EX_{\tau'}^-<\infty$，令

$$\tau_1=\tau',\tau_k=\tau'_{k-1},\quad k=2,3,\cdots$$

则$_T\gamma=\sup\limits_k E(X_{\tau_k}|\mathscr{F}_T)$，且$E_T\gamma^-\leqslant EX_{\tau_1}^-<\infty$. 再令

$$\rho_1=\tau_1,\rho_{k+1}=\rho_kI_{B_k}+\tau_{k+1}I_{B_k^c},\quad k=1,2,\cdots$$

其中，$B_k=\{E(X_{\rho_k}|\mathscr{F}_T)\geqslant E(X_{\tau_{k+1}}|\mathscr{F}_T)\}$，于是

$$E(X_{\tau_1}|\mathscr{F}_T)\leqslant E(X_{\rho_k}|\mathscr{F}_t)\uparrow{}_T\gamma\tag{4.17}$$

于是对$\mathscr{T}$中停时$T_1\leqslant T_2$，存在中停时列$\{\sigma_k\}$，$\sigma_k\geqslant T_2$，且$E(X_{\sigma_k}|\mathscr{F}_{T_2})\uparrow{}_{T_2}\gamma$，$EX_{\sigma_1}^-<\infty$，由条件期望的单调收敛定理

$$E(_{T_2}\gamma|\mathscr{F}_{T_1})=\lim_{k\to\infty}E(X_{\sigma_k}|\mathscr{F}_{T_1})\leqslant{}_{T_1}\gamma\tag{4.18}$$

$\forall\ t\in R_+$，令

$$y_t={}_t\gamma\tag{4.19}$$

因为存在$\tau'\geqslant t$，使$EX_{\tau'}^-<\infty$，故$Ey_t^-\leqslant EX_{\tau'}^-<\infty$，又$Ey_t\leqslant b$，故

(y_t)是常义的上鞅。对于取离散值(即可列多个值)的停止规则 T

$$y_T = {}_T\gamma \quad a.s \tag{4.20}$$

由(4.18)式,对取离散值的停止规则 $T_2 \geqslant T_1$,有

$$E(y_{T_2} | \mathscr{F}_{T_1}) \leqslant y_{T_1} \qquad a.s. \tag{4.21}$$

为了证明(4.21)对取连续值的停止规则成立,令

$$y_t^1 = \lim_{s \downarrow t, s \in D} y_s \qquad t \in \mathscr{R}_+ \tag{4.22}$$

其中 D 是二进制有理数集,那么(y_t^1)就是 $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$适应的右连续上鞅([3]3.5),由引理 4.3,$y_t^1 \leqslant y_t \quad a.s.$ 从而(y_t^1)是可选强上鞅,令

$$\Gamma = Y^1 \vee X \tag{4.23}$$

其中 $\Gamma = (\gamma_t)$,$Y = (y_t^1)$,$X = (X_t)$,往证 Γ 是正则的可选强上鞅,且 $\forall\ \tau \in \mathscr{T}$,$\gamma_\tau = {}_\tau\gamma \quad a.s.$

为此对 $\tau, \sigma \in \mathscr{T}$,$\tau \geqslant \sigma$ 令 $\tau^{(n)}\sigma^{(n)}$均是 D 值停止变量,$\tau^{(n)} \downarrow \tau$,$\sigma^{(n)} \downarrow \sigma$,则

$$y_{\tau^{(n)}}^1 = y_{\tau^{(n)}} = {}_{\tau^{(n)}}\gamma$$

由 $E({}_{\tau(n)}\gamma | \mathscr{F}_\tau) \leqslant {}_\tau\gamma$ 及 Fatou 引理得·

$$y_\tau^1 \leqslant \liminf_{n \to \infty} E(y_{\tau^{(n)}}^1 | \mathscr{F}_\tau) \leqslant {}_\tau\gamma \quad a.s.$$

从而 $\gamma_\tau \leqslant {}_\tau\gamma \quad a.s.$ (4.24)

考虑 $\mathscr{T}$ 中停时,$\rho > \tau$,则由(4.18)式

$$\begin{aligned} & y_{\tau^{(n)}}^1 I_{[\rho \geqslant \tau^{(n)}]} \\ = & y_{\tau^{(n)}} I_{[\rho \geqslant \tau^{(n)}]} \\ = & {}_{\tau^{(n)}}\gamma I_{[\rho \geqslant \tau^{(n)}]} \\ \geqslant & E({}_\rho\gamma | \mathscr{F}_{\tau^{(n)}}) I_{[\rho \geqslant \tau^{(n)}]} \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$,得

$$y_\tau^1 \geqslant E({}_\rho\gamma | \mathscr{F}_t) \geqslant E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau)$$

从而 $y_\tau^1 \geqslant \operatorname*{esssup}_{\rho \in \mathscr{T}, \rho > \tau} E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau)$,因此

$$\gamma_\tau = Y_\tau^1 \vee X_\tau \geqslant {}_\tau\gamma \tag{4.25}$$

联合(4.24)与(4.25)式,则

$$\gamma_\tau = {}_\tau\gamma = \operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau} E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau) \tag{4.26}$$

下证 Γ 的正则性,对 $\tau>\sigma$,考虑到

$$\begin{aligned}
&E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_{\sigma^{(n)}})\\
&=E(\tau^\gamma|\mathscr{F}_{\sigma^{(n)}})\\
&\leqslant {}_{\sigma^{(n)}}\gamma I_{[\tau\geqslant\sigma^{(n)}]}+{}_\tau\gamma I_{[\tau<\sigma^{(n)}]}\\
&=y_{\tau^{(n)}} I_{[\tau\geqslant\sigma^{(n)}]}+{}_\tau\gamma I_{[\tau<\sigma^{(n)}]}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

对 $\tau\in\mathscr{T}$,由引理的条件存在 $\tau'\in\mathscr{T},\tau'\geqslant\tau$,使 $EX_{\tau'}^-<\infty$;故

$$E\gamma_\tau^-\leqslant E_\tau\gamma^-\leqslant E_{\tau'}\gamma^-\leqslant EX_{\tau'}^-<\infty$$

又 X 上一致有界,故 $E|\gamma_\tau|<\infty$,在(4.27)中令 $n\to\infty$,得

$$E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant y_\sigma^1 I_{[\tau<\sigma]}+{}_\tau\gamma I_{[\tau\leqslant\sigma]}=y_\sigma^1\leqslant\gamma_\sigma$$

从而 Γ 是正则的,最后往证 Γ 的最小性,如令 $\Gamma'=(\gamma_t')$为控制 X 的另一正则上鞅,则$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$,且 $\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}$ 有

$$E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)\leqslant E(\gamma'_\rho|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\gamma'_\tau$$

于是$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B,\gamma_\tau\leqslant\gamma_\tau'$ 由截口定理(命题 3),则 $\Gamma\leqslant\Gamma'$,所以 Γ 是控制 X 的最小正则上鞅。

引理 4.9 设 X 满足定理 4.6 之条件 2),令

$$X^b(t,\omega)=X(t,\omega)\wedge b,\quad b\geqslant 0 \tag{4.28}$$

$\gamma^b(t)$为 $X^b(t)$之 MRS,则 $\gamma(t)=\sup\limits_{b\geqslant0}\gamma^b(t)$是 X 之 MRS.

证明 $\forall\ \tau\in\mathscr{T}$,存在 $\tau'\in\mathscr{T},\tau'\geqslant\tau$,使 $EX_{\tau'}^-<\infty$,因此

$$\begin{aligned}
&E\gamma(\tau)^-\leqslant E\gamma^b(\tau)^-\leqslant E\gamma^b(\tau')^-\\
&\leqslant EX^b(\tau')^-\leqslant EX^0(\tau')^-=EX_{\tau'}^-<\infty
\end{aligned}$$

由单调收敛定理

$$\begin{aligned}
&E(\gamma(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\\
&=\lim_{b\to\infty}E(\gamma^b(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\\
&\leqslant\lim_{b\to\infty}\gamma^b(\sigma)=\gamma(\sigma)
\end{aligned}$$

因此 $\Gamma=\gamma(t)$是控制 X 的正则强上鞅。

往证 Γ 的最小性，如 Γ^{γ} 是另一个控制 X 正则强上鞅，则由于 $\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，$\gamma'(\tau)\leqslant X^b(\tau)$，故可知 $\gamma'(\tau)\leqslant\gamma(\tau)$，由截口定理得

$$\Gamma^{\gamma}\geqslant\Gamma$$

证毕

定理 4.6 的证明：

由引理 4.7，只须在条件 ii) 下给出证明，令 $X^b(t,\omega)=X(t,\omega)\wedge b$，则它单调增，由引理 4.8，对每个 b（可以认为 $b\in\mathscr{N}_+$），存在 Γ^b 为 $X(-\infty,b)$ 的 MRS，再由引理 4.9，$\Gamma=\lim\limits_{b\to+\infty}\Gamma^b$ 便是 X 的 MRS.

证毕

注 1 上述引理 4.8 中关于 X 上一致有界的假设只是为了证明 $E\gamma_t^+<\infty$ 及 $E\gamma_\tau<\infty$，所以若改 X 为满足假设 A，结论也成立。

下面的定理给出下一致有界过程

$$X_a(t,\omega)=X(t,\omega)\vee a,\qquad a\leqslant 0 \tag{4.29}$$

的 MRS 与 X 之 MRS 之间的关系。

定理 4.10 设可选过程 X 满足假设 A，其几乎所有轨道右半上连续，$\Gamma_a=\{\gamma_a(t)\}$ 为 X_a 之 MRS

$$\gamma_t^*=\inf_{a\leqslant 0}\gamma_a(t) \tag{4.30}$$

如对每个 $\tau\in\mathscr{T}_B$，$E\gamma_\tau^{*-}<\infty$，则 $\Gamma^*=\{\gamma_t^*,\mathscr{T}_t,t\in R_+\}$ 是 X 之 MRS.

注 2 在给出本定理的证明之前，我们首先指出本定理只需对 $X\leqslant 0$ 予以证明，事实上，由满足假设 A，则存在一致可积鞅 $U=(U_t)$，使 $U\geqslant X$，考虑可选过程 $\{(X_t-U_t)\vee a;t\in\mathscr{R}_+\}$，由于 $\forall\ \sigma\in\mathscr{T}$，$E((X_\sigma-U_\sigma)\vee a)\geqslant a>-\infty$，由定理 4.6 之 ii)，存在 $\triangle_a$ 为 $\{(X_t-U_t)\vee a;t\in\mathscr{R}_+\}$ 之 MRS，如果本定理对 $X\leqslant 0$ 成立，则 $\triangle=\inf\limits_{a\leqslant 0}\triangle_a$ 便是 $X-U$ 之 MRS. 由注 1 可知存在 Γ 为 X 之 MRS，于是 $\Gamma=\triangle+U=\inf\limits_{a\leqslant 0}\triangle_a+U\}$，因为 $\triangle_a\geqslant(X-U)\vee a$，故 $\triangle_a+U\geqslant X\vee(a+U)\geqslant X_a$，所以 $\triangle_a+U\geqslant\Gamma_a\geqslant\Gamma$，因此 $\Gamma\geqslant\Gamma^*\geqslant\Gamma$，$\Gamma=\Gamma^*$.

下面假定 $X\leqslant 0$.

引理 4.11　在定理 4.10 的条件下，Γ^* 是可选的正则上鞅。

证明　因为 $X_a(t,\omega)\leqslant 0$，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，$E\gamma_\tau^{*-}\leqslant 0$，因此由引理 4.5 及定理 4.10 的条件，故 Γ^* 是可选的正则上鞅。

引理 4.12　在定理 4.10 的条件下，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，令

$$\tau^{(n)}=\tau+\frac{1}{n}$$

则 $\forall\ -a,n\in N_+$

$$\gamma_a(\tau)\leqslant E(\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\tau^{(n)}}X_a(s)\vee\gamma_a(\tau^{(n)})\,|\,\mathscr{F}_\tau)\quad a.s.\qquad(4.31)$$

证明　记

$$h_n(\tau)=\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\tau^{(n)}}X_a(s)\vee\gamma_a(\tau^{(n)})$$

$$\beta(t)=\gamma_a(t)I_{[\tau^{(n)}\leqslant t]}+E(h_n(\tau)\,|\,\mathscr{F}_t)I_{[\tau\leqslant t<\tau^{(n)}]}$$

由于 $a\leqslant X_a(t)\leqslant 0$，$E|h_n(\tau)|\leqslant 2|a|<\infty$，常义鞅 $E(h_n(\tau)|\mathscr{F}_t)$ 可以看成是右连续的适应修正，再注意到随机区间 $[[\tau^{(n)},+\infty[[$ 及 $[[\tau,\tau^{(n)}[[$ 均属于可选 σ 代数 $\mathscr{O}$，因此 $\{\beta(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 是可选过程，往证它是正则的强上鞅。为此设 $T,\sigma\in\mathscr{T}$，$T\geqslant\sigma$，则

$$\begin{aligned}
&E(\beta(T)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\\
&=E\{I_{[\tau^{(n)}\leqslant T]}\gamma_a(T)+I_{[\tau\leqslant T<\tau^{(n)}]}E(h_n(\tau)\,|\,\mathscr{F}_T)\,|\,\mathscr{F}_\sigma\}\\
&\leqslant I_{[\tau^{(n)}\leqslant\sigma]}\gamma_a(\sigma)+E\{(I_{\tau\leqslant\sigma<\tau^{(n)}})h_n(\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma\}\\
&\leqslant I_{[\tau^{(n)}\leqslant\sigma]}\gamma_a(\sigma)+I_{[\tau\leqslant\sigma<\tau^{(n)}]}E(h_n(\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\\
&=\beta(\sigma)
\end{aligned}$$

这里要注意 $\gamma_a(T)\leqslant 0$，$h_n(\tau)\leqslant 0$.

由 $E\gamma_a(\tau)^-\leqslant|a|<\infty$，因而 $E(\beta(\tau))^-\leqslant|a|<\infty$，所以 $\{\beta(t)\}$ 是一个正则上鞅。

记 $\beta=\{\beta(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，$X_a=\{X_a,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 则 $\beta\geqslant X_a$ 从而 $\beta\geqslant\Gamma_a$，其中 $\Gamma_a=\{\gamma_a(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，如果(4.31)式不成立，即存在 $\tau\in\mathscr{T}$，使得 $P(C)>0$，这里 $C=\{\beta(\tau)<\gamma_a(\tau)\}$，于是 $C\subset\pi([[\tau]]\cap A)$，这里 $A=\{(t,\omega),\beta(t)<\gamma_a(t,\omega)\}$，从而 $P(\pi(A))\geqslant P(C)>0$，这与 $B\geqslant\Gamma_a$ 矛盾。

引理 4.13 在定理 4.10 的条件下，对 $\tau\in\mathscr{T}$，若令 $\gamma^*(\tau+)=\lim\limits_{t\downarrow\tau}\gamma(t)$，则 $\gamma^*(\tau)=X(\tau)\vee\gamma^*(\tau+)$。

证明 由于 $X\leqslant 0,\gamma_a^+=0$，由条件期望的 Fatou 引理(见附录定理 A.8)及引理 4.12

$$\begin{aligned}&\gamma^*(\tau)\\&=\lim_{a\to-\infty}\gamma_a(\tau)\\&\qquad\leqslant\limsup_{a\to-\infty}E(\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\tau^{(n)}}X_a(s)\vee\gamma_a(\tau^{(n)})|\mathscr{F}_\tau))\\&\qquad\leqslant E(\sup_{\tau\leqslant s\leqslant\tau^{(n)}}X(s)\vee\gamma^*(\tau^{(n)})|\mathscr{F}_\tau)\end{aligned}$$

再一次应用条件期望的 Fatou 引理，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma^*(\tau^{(n)})=\gamma^*(\tau+)$ 及 $\limsup\limits_{\tau\leqslant s,s\to\tau}X(s)\leqslant X(\tau)$，则

$$\begin{aligned}\gamma^*(\tau)&\leqslant E(X(\tau)\vee\gamma^*(\tau+)|\mathscr{F}_\tau)\\&=X(\tau)\vee\gamma^*(\tau+)\quad a.s.\end{aligned}$$

因为 Γ^*，X 都是可选过程，且 $\Gamma^*\geqslant X$，因此 $\gamma^*(\tau)\geqslant X(\tau)$，由引理 4.11，$\{\gamma^*(\tau^{(n)})\}$ 是反向上鞅，且 $\lim\limits_{n\to\infty}E\gamma^*(\tau^{(n)})\leqslant E\gamma^*(\tau)\leqslant 0$，$\{\gamma^*(\tau^{(n)})\}$ 一致可积，所以

$$\gamma^*(\tau+)=\lim_{n\to\infty}E(\gamma^*(\tau^{(n)})|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\gamma^*(\tau)$$

联合上面的式子，便知

$$\gamma^*(\tau)=\gamma^*(\tau+)\vee X(\tau)\quad a.s.\tag{4.32}$$

本引理得证。

引理 4.14 在定理 4.10 的条件下，Γ^* 在集合 $\{(t,\omega):\gamma^*(t,\omega)>X(t,\omega)\}$ 上轨道右连续。

证明 令 $\Gamma^*_+=\{\gamma^*(t_+),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，往证 Γ^*_+ 是右连续强上鞅，为此 $\forall\ \tau,\sigma\in\mathscr{T}_B$，$\tau>\sigma$，取 $\tau_n\downarrow\tau$，$\sigma_m\downarrow\sigma$，对充分大的 m，$\sigma_m<\tau_n$。由于 Γ^* 是正则的，有

$$E(\gamma^*(\tau_n)|\mathscr{F}_{\sigma_m})\leqslant\gamma^*(\sigma_m)$$

对反向上鞅 $\{\gamma^*(\tau_n)\}$，$\{\gamma^*(\sigma_m)\}$ 分别令 $m,n\to\infty$，则

$$E(\gamma^*(\tau_+)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma^*(\sigma_+)$$ （请读者补证）

由(4.32)及命题5

$$\Gamma^*=\Gamma^*_+\vee X \tag{4.33}$$

从而在 $\Gamma^*>X$ 上，$\Gamma^*=\Gamma^*_+$，Γ^* 右连续。

引理 4.15 在定理 4.10 的条件下，令 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，是控制 X 的可选正则上鞅，且假定

$$\Gamma=\Gamma_+\vee X \tag{4.34}$$

令

$$\tau^\varepsilon(t)=\inf\{s\geqslant t:X_s\geqslant\gamma_s-\varepsilon\},\varepsilon\geqslant0 \tag{4.35}$$

则当 $\tau^\varepsilon(t)<\infty$ a.s.，且 $\forall\ t\in R_+$ 及 $\varepsilon>0$

$$E(\gamma(\tau^\varepsilon(t))|\mathscr{F}_t)\geqslant\gamma_t \tag{4.36}$$

时，Γ 为控制 X 之 MRS.

证明 只须证明 Γ 是控制 X 的最小正则上鞅，为此设 $\tilde{\Gamma}$ 是另一控制 X 的可选正则上鞅，对 $\varepsilon>0$ 及 $t\in R_+$，有

$$\gamma(\tau^\varepsilon(t))\leqslant\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t))+\varepsilon\quad[\tau^\varepsilon(t)<\infty]\quad a.s. \tag{4.37}$$

事实上，由(4.35)式，在$[\tau^\varepsilon(t)<\infty]$上存在 $s_i\downarrow\tau^\varepsilon(t)$，使

$$\tilde{\gamma}(s_i)\geqslant X(s_i)\geqslant\gamma(s_i)-\varepsilon$$

于是 $\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t)_+)\geqslant\gamma(\tau^\varepsilon(t))_+)-\varepsilon$，由于 Γ 满足：$\Gamma=\Gamma_+\vee X$，可见在$\{\gamma(\tau^\varepsilon(t))>X(\tau^\varepsilon(t))\}$上，$\gamma(\tau^\varepsilon(t)_+)=\gamma(\tau^\varepsilon(t))$，于是

$$\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t)\geqslant\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t)_+))\geqslant\gamma(\tau^\varepsilon(t))-\varepsilon \tag{4.38}$$

其中第一个不等式是因为 $X\leqslant0$,，蕴含着 $E\tilde{\gamma}\leqslant0$，仿引理 4.3 而得。

由(4.34)式，在$[\gamma(\tau^\varepsilon(t))=X(\tau^\varepsilon(t))]$上，$\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t))\geqslant X(\tau^\varepsilon(t))\geqslant\gamma(\tau^\varepsilon(t))-\varepsilon$，从而由(4.36)式

$$\gamma_t\leqslant E(\tilde{\gamma}(\tau^\varepsilon(t))|\mathscr{F}_t)+\varepsilon\leqslant\tilde{\gamma}_t+\varepsilon\quad a.s. \tag{4.39}$$

往证 $\Gamma\leqslant\tilde{\Gamma}$，即证

$$A=\{(t,\omega):\quad X(t,\omega)\leqslant\tilde{\gamma}(t,\omega)<\gamma(t,\omega)\}$$

为不足道集。设其不然，则由截口定理，存在停时 τ，使$[[\tau]]\subset A$，

且 $P(\tau<\infty)>0$，取常数 C，使 $P(\tau\leqslant C)>0$ 令 $S=\tau\wedge C$，则 S 为有界停时，且在 $[\tau\leqslant C]$

$$\tilde{\gamma}(S)<\gamma(S) \tag{4.40}$$

但在 A 上，$\Gamma>X$，如同引理 4.14，Γ 的轨道在 A 上右连续，因此由(4.39)式，对 $S\in\mathscr{T}_B$

$$\gamma(S)=\gamma(S_+)=\lim_{t_i\downarrow s}\gamma(t_i)\leqslant\lim_{t_i\downarrow s}\tilde{\gamma}(t_i)+\varepsilon$$

ε 是任意的，于是 $\gamma(S)\leqslant\tilde{\gamma}(S)$，与(4.40)矛盾，所以 $\Gamma\leqslant\tilde{\Gamma}$.

引理 4.16　设 X 是有界可选过程，$\Gamma=(\gamma_t)$ 为 X 之 MRS，$\tau^\varepsilon(t)$ 如(4.35)，则 $\{\gamma(s\wedge\tau^\varepsilon(t)),\mathscr{F}_s,s\geqslant t\}$ 是一可选的强鞅。

证明　为方便计，记 $\tau=\tau^\varepsilon(t)$，由引理 4.1，$\{\gamma(s\wedge\tau),\mathscr{F}_s,s\geqslant t\}$ 是可选的强上鞅，往证它是强下鞅，即只要证 $\forall\ T\geqslant\rho\geqslant t, T,\rho\in\mathscr{T}$ 有

$$E(\gamma(T\wedge\tau)\,|\,\mathscr{F}_\rho)\geqslant\gamma(\tau\wedge\rho) \tag{4.41}$$

由于

$$I_{[\tau\leqslant\rho]}E(\gamma(T\wedge\tau)\,|\,\mathscr{F}_\rho)=I_{[\tau\leqslant\rho]}\gamma(\tau\wedge T)=I_{[\tau\leqslant\rho]}\gamma(\tau)$$

所以只要证

$$I_{[\tau>\rho]}E(\gamma(T\wedge\tau)\,|\,\mathscr{F}_\rho)\geqslant I_{[\tau>\rho]}\gamma(\rho) \tag{4.42}$$

令 $\delta_u=E(\gamma(\tau\wedge T)\,|\,\mathscr{F}_u)$，$u\geqslant t$，$\triangle=\{\delta_u,\mathscr{F}_u,u\geqslant t\}$，将 δ_u 看成是一致可积鞅 $E(\gamma(\tau\wedge T)\,|\,\mathscr{F}_u)$ 的右连续适应修正，因此 $\triangle$ 是一个可选的正则鞅. 为证(4.42)，只要证 $\triangle\geqslant X$. 用反证法，即设 $\{(u,\omega):X_u-\delta_u>0\}\cap[[t,\tau[[$ 是非不足道集. 因为 X,δ 有界，因此存在最小的常数 c，使 $X-\triangle\leqslant c$，于是可取 $0<\alpha<c\wedge\varepsilon$，使得

$$A=\{(u,\omega):0<c-\alpha\leqslant X_u-\delta_u\leqslant c\}\cap[[t,\tau[[$$

是一个非不足道集. 因为 $\triangle+c$ 仍是可选的正则上鞅，且控制 X，因而 $\triangle+c\geqslant\Gamma$，于是当 $(u,\omega)\in A$ 时，$X_u-\delta_u\geqslant c-\alpha\geqslant\gamma_u-\delta_u-\alpha$，即 $X_u\geqslant\gamma_u-\varepsilon$，从而 $\tau\leqslant u$，这表明 $A\subset[[\tau,\infty[[$，矛盾. 这就证明了 $\{\gamma(\tau\wedge s),\mathscr{F}_s,s\geqslant t\}$ 是可选的强鞅。

引理 4.17　在定理 4.10 的条件下，$\forall\ t\in R+$ 及 $\varepsilon>0$，令

$$\tau^* = \inf\{s \geqslant t; X_s \geqslant \gamma_s^* - \varepsilon\} \tag{4.43}$$

则 $\tau^* < \infty \quad a.s$ 且

$$E(\gamma^*(\tau^*) | \mathscr{F}_t) \geqslant \gamma_t^* \tag{4.44}$$

证明 令

$$\tau_N = \inf\{s \geqslant t; \quad X_{-N}(s) \geqslant \gamma_{-N}(s) - \varepsilon\} \tag{4.45}$$

$$\sigma_N = \inf\{s \geqslant t; X_{-N}(s) \geqslant \gamma_s^* - \varepsilon\} \tag{4.46}$$

显然对 $M \geqslant N, t \leqslant \sigma_N \leqslant \sigma_M \leqslant \tau_M < \infty \quad a.s.$ X_m 是有界过程，由引理 4.16，对 $s \geqslant t$

$$\begin{aligned} \gamma_{-M}(t) &\geqslant E(\gamma_{-M}(\sigma_N \wedge s) | \mathscr{F}_t) \\ &\geqslant E(\gamma_{-M}(\tau_M \wedge s) | \mathscr{F}_t) = \gamma_{-M}(t) \end{aligned}$$

由于 $X_{-M} \downarrow$ 且 $\leqslant 0 (M \to \infty)$，于是 $\gamma_{-M} \downarrow$ 且 $\leqslant 0$，令 $M \to \infty$，得

$$E(\gamma^*(\sigma_N \wedge s) | \mathscr{F}_t) = \gamma_t^* \quad a.s. \tag{4.47}$$

在集合 $\{X(\sigma_N(\omega), \omega) > -N\}$ 上，可证

$$X(\sigma_N(\omega), \omega) + \varepsilon = X_{-N}(\sigma_N(\omega), \omega) + \varepsilon \geqslant \gamma^*(\sigma_N) a.s \tag{4.48}$$

事实上，由于 $\gamma^*(\sigma_N) = \gamma^*(\sigma_N +) \vee X(\sigma_N)$，因此在 $\{\gamma^*(\sigma_N) = X(\sigma_N)\}$ 上，(4.48)自然成立，而在 $\{\gamma^*(\sigma_N) > X(\sigma_N)\}$ 上，由(4.46)及 X 的轨道几乎右半上连续性可证(4.48)。

由(4.48)式，在 $\{X(\sigma_N(\omega, \omega) > -N\}$ 上，$\tau \leqslant \sigma_N$，而由 X 的几乎所有轨道右半上连续及引理 4.14 知，$\gamma^*(\tau^*) \leqslant X(\tau^*) + \varepsilon \leqslant X_{-N}(\tau^*) + \varepsilon$，因之 $\sigma_N \leqslant \tau^* \quad a.s$，从而在 $\{X(\sigma_N(\omega), \omega) > -N\}$ 上，$\sigma_N = \tau^*$，于是

$$\begin{aligned} &P(\tau^* < \infty) \\ &\geqslant P(\tau^* < \infty, X(\sigma_N) > -N) \\ &= P(\sigma_N < \infty, X(\sigma_N) > -N) \\ &= P(X(\sigma_N) > -N) \end{aligned} \tag{4.49}$$

由(4.47)并注意到 $X \leqslant 0$

$$-\infty < E\gamma_t^* \leqslant E\gamma^*(\sigma_N) \leqslant E(X_{-N}(\sigma_N)) + \varepsilon$$

$$=EX_{-N}(\sigma_N)I_{\{X_{-N}(\sigma_N)\leqslant -N\}}+EX_{-N}(\sigma_N)I_{[X_{-N}(\sigma_N)>-N]}+\varepsilon$$

$$\leqslant -NP(X_{-N}(\sigma_N)\leqslant -N)+\varepsilon$$

从而 $P(X_{-N}(\sigma_N)\leqslant -N)\leqslant\frac{\varepsilon-E\gamma_t^*}{N}\to 0(N\to\infty)$，由(4.49)，便知 $P(\tau^*<\infty)=1$.

往证(4.44)式，为此先证

$$\gamma_t^*=E(\gamma^*(\tau^*\wedge s)|\mathscr{F}_t) \tag{4.50}$$

由于$\{\gamma_t^*\}$是正则上鞅，$\gamma_t^*\geqslant E(\gamma^*(\tau\wedge s)|\mathscr{F}_t)$我们只须证明 $E\gamma_t^*\leqslant E\gamma^*(\tau^*\wedge s)$，由(4.47)式

$$E\gamma_t^*=\lim_{N\to\infty}\sup E\gamma^*(\sigma_N\wedge s)$$

$$\leqslant E(\limsup_{N\to\infty}\gamma^*(\sigma_N\wedge s))$$

$$\leqslant E(\limsup_{N\to\infty}\gamma^*(\tau^*\wedge s))I_{[X(\sigma_N)>-N]}$$

$$+\limsup_{N\to\infty}\gamma^*(\sigma_N\wedge s)I_{[X(\sigma_N)\leqslant -N]}$$

$$=E(\gamma^*(\tau^*\wedge s))$$

因此(4.50)式得证。

由于 $\tau^*<\infty$ $a.s$，且 $\Gamma^*\leqslant 0$，由条件期望的 Fatou 引理(4.8)

$$E(\gamma^*(\tau^*)|\mathscr{F}_t)=$$

$$E(\limsup_{s\to\infty}\gamma^*(\tau^*\wedge s)|\mathscr{F}_t)$$

$$\geqslant\limsup_{s\to\infty}E(\gamma^*(\tau^*\wedge s)|\mathscr{F}_t)=\gamma_t^*$$

(4.44)式得证，引理证毕。

定理 4.10 的证明：由引理 4.11 及 4.14 知 Γ^* 是可选的正则上鞅，$\Gamma^*=\Gamma^*_+\vee X$，由引理 4.17，可知引理 4.15 的条件(4.35)，(4.36)成立，从而 Γ^* 是控制 X 的 MRS，证毕。

注 3 注 2 指出定理 4.10 只需对 $X\leqslant 0$ 予以证明，所以引理 4.11—4.17 都是在 $X\leqslant 0$ 的假设下证明的，但正如注 2 所指出，这些引理对于满足假设 A 的 X 仍然成立。

注 4 X 的几乎所有轨道右半上连续的假设对引理 4.13 是

重要的。

结合定理 4.6，引理 4.8 及定理 4.10，有下面的二重极限定理

定理 4.18 设 X 可选，几乎所有轨道右半上连续，且$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，存在 $\tau'\geqslant\tau$，$\tau'\in\mathscr{T}$，使 $EX_{\tau'}^{-}<\infty$，则存在 X 的 MRS 过程 $\Gamma=\{\gamma(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$

$$\gamma(t)=\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}\gamma_a^b(t) \tag{4.51}$$

其中 $\Gamma^b=\{\gamma_a^b(t),F_t,t\in R_+\}$ 为 $X_a^b=(X\vee a)\wedge b$ 之 MRS.

证明 X_a^b 为有界可选过程，由定理 4.6，存在它的 MRS 过程 Γ_a^b，固定 b，令

$$\gamma^b(t)=\inf_{a\leqslant0}\gamma_a^b(t)$$

$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，由于 $(\gamma_a^b(\tau))^-\uparrow(\gamma^b(\tau))^-$，$E(\gamma_0^b(\tau))^-<\infty$，由单调收敛定理

$$\begin{aligned}&E(\gamma^b(\tau))^-\\ \leqslant&\lim_{a\to-\infty}E(\gamma_a^b(\tau'))^-\\ \leqslant&\lim_{a\to-\infty}E(X_a^b(\tau'))^-\\ \leqslant&EX_{\tau'}^-+b\\ <&\infty\end{aligned}$$

于是由定理 4.10，$\Gamma^b=\{\gamma^b(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 为 $X^b=X\wedge b$ 之 MRS，再令 $b\to\infty$，由引理 4.9，便知 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 是 X 之 MRS.

定理 4.19 设 X 满足定理 4.18 的条件，且 $E\operatorname{esssup}_t X_t^-<\infty$，则对 X 的 MRS 过程 $\Gamma=\{\gamma_t\}$，有

$$\gamma(\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.52}$$

其中 $\tau\in\mathscr{T}_B$ 且 $EX_\tau^-<\infty$.

证明 首先可证：$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$

$$\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau}E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau}E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.53}$$

式中 $C_\tau=\{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau,$ 且 $EX_\rho^-<\infty\}$，显然，(4.53)之左边≥其右边。另一方面，若 $\rho'\in\mathscr{T},\rho'\geqslant\tau$ 而 $EX_{\rho'}^-=+\infty$，则 $P(E(X_{\rho'}|\mathscr{F}_\tau)=-\infty)>0$，记 $B=\{E(X_{\rho'}|\mathscr{F}_\tau)=-\infty\}$，令 $\tilde{\rho}=I_B\cdot\tau+I_{B^c}\rho'$，易知 $\tilde{\rho}\geqslant\tau,\tilde{\rho}\in\mathscr{T}$，且 $EX_{\tilde{\rho}}^-\geqslant EX_{\rho'}I_{B^c}-EX_\tau^-I_B>-\infty$，于是 $\tilde{\rho}\in C_\tau$，而

$$E(X_{\tilde{\rho}}|\mathscr{F}_\tau)=I_{B^c}E(X_{\rho'}|\mathscr{F}_\tau)+I_B\cdot X_\tau\geqslant E(X_{\rho'}|\mathscr{F}_\tau)$$

因此

$$\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)$$

对于上一致有界过程 $X^b=X\wedge b$，由引理 4.8

$$\gamma^b(\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\tag{4.54}$$

显然

$$\gamma^b(\tau)\geqslant\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\tag{4.55}$$

另一方面，$\forall\ \rho\in C_\tau$

$$X_{\rho\wedge n}^-\leqslant X_\rho^-+X_n^-I_{[\rho>n]}$$

在 $E\operatorname*{esssup}_t X_t^-<\infty$ 下，$(X_{\rho\wedge n}^-)$关于 n 一致可积，因此

$$\begin{aligned}&E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\\ \leqslant&\liminf_{n\to\infty}E(X_{\rho\wedge n}\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\\ \leqslant&\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\end{aligned}$$

由(4.54)式及(4.53)式

$$\gamma^b(\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\in C_\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)$$

所以

$$\gamma^b(\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\in C_\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)$$

对于一般的过程 X，有

$$\begin{aligned}&\gamma(\tau)=\lim_{b\to\infty}\gamma^b(\tau)\\ =&\lim_{b\to\infty}\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}E(X_\rho\wedge b|\mathscr{F}_\tau)\\ \leqslant&\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)\end{aligned}$$

往证相反的不等式，$\forall\ \rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau$，由 Γ 的正则性

$$\gamma(\tau)\geqslant E(\gamma(\rho)\,|\,\mathscr{F}_\tau)\geqslant E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)$$

所以

$$\gamma(\tau)\geqslant \underset{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)$$

于是

$$\gamma(\tau)= \underset{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)$$

注 5　本定理的证明中没有用到单调下降的极限(定理 4.10)，因此不必假定 X 的轨道右半上连续。

定理 4.20　设 X 可选，且$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B,EX_\tau^-<\infty$，则存在控制 X 的最小强上鞅 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，且$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$

$$\gamma_\tau= \underset{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.56}$$

证明　首先可类似于(4.53)式证明：$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$

$$\underset{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\tau}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)= \underset{\rho\in C_\tau\cap\mathscr{T}_B}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.57}$$

对上一致有界过程 $X\wedge b$ 及有界停时应用引理 4.8，即$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，取

$$_\tau\gamma^b= \underset{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\wedge b\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.58}$$

同样可证(4.18)式。类似地令

$$\Gamma^b=Y'\vee X \tag{4.59}$$

则

$$\gamma_\tau^b=Y'_\tau\vee X_\tau= \underset{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\wedge b\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.60}$$

且易证 Γ^b 是控制取 X^b 的最小强上鞅，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B,\gamma_\tau^b={}_\tau\gamma^b\quad a.s.$，令

$$\Gamma=\lim_{b\to\infty}\Gamma^b \tag{4.61}$$

则由 $\gamma_\tau^b\leqslant \underset{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau)$，可知

$$\gamma_\tau\leqslant \underset{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}{\text{esssup}}\ E(X_\rho\,|\,\mathscr{F}_\tau) \tag{4.62}$$

对任何 $\rho\in C_\tau\cap\mathscr{T}_B$，由 $E(X_\rho\wedge 0)^-=EX_\rho^-<\infty$，由单调收敛定

理及由 $\gamma_\tau \geq E(X_\rho \wedge b | \mathscr{F}_\tau)$ 可知 $\gamma_\tau \geq E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau)$，所以

$$\gamma_\tau \geq \operatorname*{esssup}_{\rho \in \mathscr{T}_B \cap C_\tau} E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau) \tag{4.63}$$

从而

$$\gamma_\tau = \operatorname*{esssup}_{\rho \in \mathscr{T}_B \cap C_\tau} E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau) = \operatorname*{esssup}_{\rho \geq \tau, \rho \in \mathscr{T}_B} E(X_\rho | \mathscr{F}_\tau) \tag{4.64}$$

下面的引理来自于 Mertens[33].

引理 4.21 设 $\Gamma = \{\gamma_t, \mathscr{F}_t, t \in \mathscr{R}_+\}$ 是可选强上鞅，如对每个 $\tau \in \mathscr{T}$，$\sup\limits_{\sigma \in \mathscr{T}} E\gamma^-_{\tau \wedge \sigma} < \infty$，则 $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma_t$ a.s. 存在。

引理 4.22 设 X 为可选过程，$\forall\, t \in \mathscr{R}_+$，$EX_t^- < \infty$，且 $\forall\, \tau \in \mathscr{T}$，存在 $\tau' \geq \tau$，$\tau' \in \mathscr{T}$，使 $EX_{\tau'} < \infty$，则对 X 之 MRS 过程，$\Gamma = \{\gamma_t, \mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 有

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = \limsup_{t \to \infty} X_t \tag{4.65}$$

$$E\gamma(0) = \sup\{EX_\tau, \tau \in \Gamma\} \tag{4.66}$$

证明 由定理 4.6，存在之 MRS 过程 $\Gamma = \{\gamma(t), \mathscr{F}_t, t \in \mathscr{R}_+\}$，$\forall\, \tau \in \mathscr{T}$，存在 $\tau' \in \mathscr{T}$，$\tau' \geq \tau$，使得 $EX^-_{\tau'} < \infty$，因此 $\forall\, \sigma \in \mathscr{T}$

$$E\gamma^-_{\tau \wedge \sigma} \leq E\gamma^-_\tau \leq E\gamma^-_{\tau'} \leq EX^-_{\tau'} < \infty$$

于是由引理 4.21，$\lim\limits_{t \to \infty} \gamma_t$ a.s. 存在。

由于 $\forall\, t \in R_+$，$\gamma_t \geq X_t$，因此

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) \geq \limsup_{t \to \infty} X_t \triangleq X_\infty \tag{4.67}$$

另一方面，对 $X^b = X \wedge b$ 以及它的 MRS 过程 $\Gamma^b = \{\gamma^b(t), \mathscr{F}_t, t \in R_+\}$，我们可证

$$\lim_{t \to \infty} \gamma^b(t) \leq X_\infty \wedge b$$

事实上，$\gamma^b(t) = \operatorname*{esssup}_{\rho \geq t, \rho \in \mathscr{T}} E(X_\rho \wedge b | \mathscr{F}_t) \leq E(\operatorname*{esssup}_{u \geq s}(X_u \wedge b) | \mathscr{F}_t)$，其中 $s \leq t$. 注意到 $\operatorname*{esssup}_{u \geq s}(X_u \wedge b) \leq b$ 以及 $(\operatorname*{esssup}_{u \geq s}(X_u \wedge b))^- \leq (X_s \wedge b)^- \leq X_s^-$，令 $t \to \infty$，则得

$$\lim_{t \to \infty} \gamma^b(t) \leq \operatorname*{esssup}_{u \leq s}(X_u \wedge b)$$

再令 $s\to\infty$，便得

$$\lim_{t\to\infty}\gamma^b(t)\leqslant X_\infty\wedge b \tag{4.68}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t$，$\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t^b$ a. s. 存在，因此由(4.68)式

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_t=\liminf_{t\to\infty}\inf_{s\geqslant t}\gamma_s=\liminf_{t\to\infty}\inf_{s\geqslant t}\lim_{b\to\infty}\gamma_s^b=\lim_{b\to\infty}\liminf_{t\to\infty}\inf_{s\geqslant t}\gamma_s^b$$
$$\leqslant\lim_{b\to\infty}(X_\infty\wedge b)=X_\infty \tag{4.69}$$

联合(4.67)式，便知(4.65)式成立。

由于 $\gamma(0)=\operatorname*{esssup}\limits_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant 0}E(X_\rho|\mathscr{F}_0)=\sup\limits_{\rho\in\mathscr{T}}EX_\rho$，所以

$$E\gamma(0)=\gamma(0)=\sup\{EX_\rho;\rho\in\mathscr{T}\}$$

注 6 在(4.69)式证明的第三个等号中，我们应用了下述事实：若 a_{mn} 关于 m 及 n 均为单调不降，则

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}a_{mn}=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}a_{mn} \tag{4.70}$$

上面的 $\mathscr{F}_0=\{\Phi,\Omega\}$ 为平凡的 σ 代数。

下面的定理讨论 Snell 包的 $\overline{\mathscr{T}}$ 或 $\overline{C}_0$ 正则性。

定理 4.23 1) 设 X 可选满足假设 B，则存在 X 之 MRS 过程 Γ，如 $E\gamma(0)<\infty$，则它还是最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的；

2) 设 X 可选，满足假设 A，其几乎所有轨道右半上连续，且 $\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，$EX_t^-<\infty$，则存在之 MRS 过程，且是最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的。

证明 1) 由 X 满足假设 B，由定理 4.6 及注 7，存在 MRS 过程，再由引理 4.4，它是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，再由注 8，便知它是最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的；

2) $\forall\ a\leqslant 0$，记 $X_a=X\vee a$，相应的 MRS 过程是存在的，记为 $\Gamma_a=\{\gamma_a(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，令 $\gamma(t)=\inf\limits_{a\leqslant 0}\gamma_a(t)$，因为$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，存在 C 使 $\tau\leqslant C$，而 $E\gamma(c)^-\leqslant EX_c^-<\infty$，由注 1 之(4.9)式，$E\gamma(\tau)^-\leqslant E\gamma(c)^-<\infty$，因此由定理 4.10，$\Gamma=\{\gamma(t)\}$是 X 之 MRS.

由(4.8)式，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，$\gamma(\tau)=\inf\limits_{a\leqslant 0}\gamma_a(\tau)$. 过程 $X_a=X\vee a$ 满足引理 4.22 的条件，因此

$$\limsup_{t\to\infty} X_a(t) = \lim_{t\to\infty} \gamma_a(t) \triangleq \gamma_a(\infty)$$

于是

$$\gamma(\infty) \leqslant \lim_{a\to\infty} \gamma_a(\infty)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\lim_{t\to\infty} \sup(X(t) \vee a) = X(\infty)$$

所以

$$X(\infty) = \gamma(\infty) = \inf_{a\leqslant 0} \gamma_a(\infty) \quad a.s$$

因此，$\forall\ \tau \in \overline{\mathscr{T}}$

$$\gamma(\tau) = \inf_{a\leqslant 0} \gamma_a(\tau) \tag{4.71}$$

$\forall\ \tau, \sigma \in \overline{\mathscr{T}}, \tau \geqslant \sigma\quad a.s.$，由于$\{X_a(t)\}$满足假设$B$，由1)可知$E(\gamma_a(\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma) \leqslant \gamma_a(\sigma)$，由于过程$X$满足假设$A$，$E\gamma_0(\tau)^+ < \infty$，令$a \to -\infty$，则

$$E(\gamma(\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma) \leqslant \gamma(\sigma)$$

所以Γ是$\overline{\mathscr{T}}$正则的，由下面的注8可知它是最小$\overline{\mathscr{T}}$正则的。

注7 若过程满足假设B，则定理4.6的条件ii)满足。

注8 设$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{N}$为停时类，如果$X$是最小$\mathscr{M}$正则且$\mathscr{N}$正则的可选强上鞅，则$X$必是最小$\mathscr{N}$正则的可选强上鞅。

定理4.24 设X为可选过程，$\forall\ \tau \in \mathscr{T}$，存在$\tau' \in \mathscr{T}, \tau' \geqslant \tau$，使$EX_{\tau'}^- < \infty$，$\Gamma$为$X$之MRS，且$E\gamma(0) < \infty$，则有Belmann方程

$$\Gamma = \Gamma + \vee X \tag{4.72}$$

其中，$\Gamma + = \{\gamma(t+), \mathscr{F}_t, t \in \mathscr{R}_+\}$，$\gamma(t+) = \lim_{s\in D, s\downarrow t} \gamma(s)$.

证明 i) 设$\tau, \sigma \in \mathscr{T}_B, \tau \geqslant \sigma, \tau_n \downarrow \tau, \sigma_m \downarrow \sigma$为有界停时列。由$E\gamma(0) < \infty$，$(\gamma_{\tau_n})$一致可积，于是

$$E\gamma(\tau+)^- \leqslant \lim E\gamma(\tau_n)^- \leqslant E\gamma(\tau_1)^- < \infty$$

不妨设$\tau_n \geqslant \sigma_m$，因为，$E(\gamma(\tau_n)\,|\,\mathscr{F}_{\sigma_m}) \leqslant \gamma(\sigma_m)$，而对固定的$n$

$$E|\gamma(\tau_n)| \leqslant E\gamma(0) + 2E\gamma(\tau_1)^- < \infty$$

令$m \to \infty$，则得$E(\gamma(\tau_n)\,|\,\mathscr{F}_\sigma) \leqslant \gamma(\sigma+)$，再令$n \to \infty$，便得$E(\gamma$

$(\tau+)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma(\sigma+)$，这表明$\Gamma+$也是可选强上鞅。

ii) 由引理 4.3，则 $\Gamma+\leqslant\Gamma$.

iii) 往证 $\Gamma+\vee X$ 是控制 X 的正则上鞅。为此设 $\tau,\sigma\in\mathscr{T},\tau\geqslant\sigma,\tau_n\downarrow\tau,\sigma_n\downarrow\sigma$，则

$$E(\gamma(\tau+)\vee X(\tau)|\mathscr{F}_{\sigma_n})\leqslant E(\gamma(\tau)|\mathscr{F}_{\sigma_n})\leqslant\gamma(\sigma_n) \quad (4.73)$$

$\forall\ \tau_1\in\mathscr{T}$，存在 $\tau'\in\mathscr{T},\tau'\geqslant\tau_1$，使 $EX_{\tau'}^-<\infty$，故

$$\begin{aligned}&E|\gamma(\tau+)\vee X(\tau)|\\ \leqslant&E(\gamma(\tau+)\vee X(\tau))+2E(\gamma(\tau+)\vee X(\tau))^-\\ &\leqslant 2E\gamma(0)+2\liminf_{n\to\infty}E\gamma(\tau_n)^-\\ \leqslant&2E\gamma(0)+2EX_{\tau'}^-<\infty\end{aligned}$$

在(4.73)中令 $n\to\infty$，则

$$E(\gamma(\tau+)\vee X(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma(\sigma+)\vee X(\sigma)$$

从而 $\Gamma+\vee X$ 是控制 X 的正则强上鞅，于是 $\Gamma+\vee X\geqslant\Gamma$，另一方面，由 ii)，$\Gamma+\vee X\leqslant\Gamma$，所以 $\Gamma=\Gamma+\vee X$.

回顾我们得到的关于 snell 包的结论：

设 X 可选，且满足定理 4.6 条件 ii)$EX_\infty^-<\infty$且几乎所有轨道右半上连续或 X 满足假设 B 均可推出它)，则存在控制 X 的最小正则的可选上鞅，即 MRS 过程，也称为 snell 包。

由定理 4.23，当 X 满足假设 B 时或者满足 A 且轨道右半上连续、$\forall\ t,EX_t^-<\infty$时，则 X 之 MRS 过程还是最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，对于(最小)$\overline{\mathscr{T}}$ 正则的 MRS 过程 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，易证$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$

$$\gamma_\tau=\operatorname*{esssup}_{\rho\in\mathscr{T},\rho\geqslant\tau}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau) \quad (4.73)$$

为了要有(4.51)式所表示的极限关系

$$\gamma_t=\lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to-\infty}\gamma_a^b(t)$$

对 X 的轨道右半上连续的假设是重要的。

(4.72)式表明：一般地说 Γ 不是右连续的过程。

显然 $\mathscr{T}$ 正则必 C_0 正则，$\overline{\mathscr{T}}$ 正则必 $\overline{C}_0$ 正则，由定理 4.6 的证

明，如 X 满足是上述定理 4.6 之条件 ii)，则 $\gamma_t=\sup\limits_{b\geq 0}\gamma^b(t)$，其中 $\{\gamma^b(t)\}$ 为 $\{X^b(t)\}$ 之 MRS. 定理 4.23 表明 $\{\gamma^b(t)\}$ 是正则的，于是 $\forall\ \sigma,\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$\tau\geq\sigma$，有

$$E(\gamma^b(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma^b(\sigma) \tag{4.74}$$

如果 $\sigma,\tau\in\overline{C}_0$，则由于 $E(\gamma^0(\tau))^-\leqslant EX_\tau^-<\infty$，令 $b\to\infty$，可得

$$E(\gamma(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma(\sigma) \tag{4.75}$$

所以 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in R_+\}$，是 $\overline{C}_0$ 正测的；，如果 $EX_\infty^-<\infty$，则由于 $E(\gamma^0(\tau))^-\leqslant E(\gamma^0(\infty))\ \leqslant EX_\infty<\infty$，同样可在(4.74)中令 $b\to\infty$，而得(4.75)式，所以 Γ 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 可正则的。由注 8，则可知在 $EX_\infty^-<\infty$ 下，Γ 是最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的 MRS 过程。

为了建立 Γ 的最小 C_0 正则性，我们需要对报酬过程加一些条件。

定理 4.25　设 X 可选，满足定理 4.6 之条件 ii)，且 $\mathscr{T}_B\subseteq C_0$，则 X 之 MRS 过程 Γ 是最小 C_0 正则且最小 $\overline{C}_0$ 正则的可选强上鞅。

证明　由(4.26)及(4.53)式，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$

$$X(\tau)=\operatorname*{esssup}_{\rho\in C_\tau}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau) \tag{4.76}$$

如果 $\tilde{\Gamma}$ 是另一个控制 X 的 C_0 正则的可选强上鞅，则由 $\mathscr{T}_B\subseteq C_0$，$\forall\ \rho\in C_\tau\subseteq C_0$ 及 $\tau\in\mathscr{T}_B$，有

$$\tilde{\gamma}(\tau)\geqslant E(\tilde{\gamma}(\rho)|\mathscr{F}_\tau)\geqslant E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)$$

所以由(4.76)，$\tilde{\gamma}(\tau)\geqslant\gamma(\tau)$，由命题 4 便知 $\tilde{\Gamma}\geqslant\Gamma$，这表明 Γ 是控制 X 的最小 C_0 正则可选强上鞅。再由注 8，Γ 也是控制 X 的最小 $\overline{C}_0$ 正则的可选强上鞅。　　证毕

定理 4.26　设 X 可选，几乎所有轨道右半上连续，且满足定理 4.6 之条件 ii)，如对于 X 的 MRS 过程 $\Gamma=(\gamma_t)$，$E\gamma(0)<\infty$，则 $\forall\ G\subseteq\mathscr{F}_t$，有

$$E(\gamma_t|G)=\operatorname*{esssup}_{\sigma\in C_t}E(X_\sigma|G)=\operatorname*{esssup}_{\sigma\in\overline{C}_t}E(X_\sigma|G) \tag{4.77}$$

特别有 $\gamma_t=\bar{\gamma}_t$，$a.s$，$V_t=\overline{V}_t=E\gamma_t$，其中 $\bar{\gamma}_t=\operatorname*{esssup}\limits_{\sigma\in\overline{C}_t}E(X_\sigma|\mathscr{F}_t)$。

证明 由定理 4.6,存在 X 的 MRS 过程 Γ,且由(4.75)式,它是 $\bar{C}_u$ 正则的。$\forall\ \sigma\in\bar{C}_t$,由于 $\gamma_t\geqslant E(\gamma_\sigma|\mathscr{F}_t)\geqslant E(X_\sigma|\mathscr{F}_t)$,可得

$$E(\gamma_t|G)\geqslant\operatorname*{esssup}_{\sigma\in\bar{C}_t}E(X_\sigma|G) \tag{4.78}$$

另一方面,记 $\{\gamma^b(t)\}$ 为 $\{X^b(t)\}$ 之 MRS,令

$$\tau_b^\varepsilon(t)=\inf\{s\geqslant t:X_s^b\geqslant\gamma_s^b-\varepsilon\} \tag{4.79}$$

$$\tau^\varepsilon(t)=\inf\{s\geqslant t:X_s\geqslant\gamma_s-\varepsilon\} \tag{4.80}$$

则由引理 4.17,$\tau_b^\varepsilon(t)<\infty\quad a.s.$,于是 $\tau^\varepsilon(t)\leqslant\tau_b^\varepsilon(t)<\infty\ a.s.$ 而由(4.44)式,$E(\gamma^b(\tau_b^\varepsilon(t))|\mathscr{F}_t)\geqslant\gamma_t^b$,于是

$$\begin{aligned}\gamma_t^b&\leqslant E(\gamma^b(\tau_b^\varepsilon(t)|\mathscr{F}_t)\\&\leqslant E(\gamma^b(\tau^\varepsilon(t)|\mathscr{F}_t)\\&\leqslant E(\gamma(\tau^\varepsilon(t)|\mathscr{F}_t)\end{aligned} \tag{4.81}$$

令 $b\to\infty$,则

$$\gamma_t\leqslant E(\gamma(\tau^\varepsilon(t))|\mathscr{F}_t) \tag{4.82}$$

由于 X 的右半上连续性及(4.72)式

$$E(\gamma_t|G)\leqslant E(X(\tau^\varepsilon(t))|G)+\varepsilon\leqslant\operatorname*{esssup}_{\sigma\in C_t}E(X_\sigma|G)+\varepsilon \tag{4.83}$$

ε 是任意的,联合(4.78)式,则

$$E(\gamma_t|G)=\operatorname*{esssup}_{\sigma\in C_t}E(X_\sigma|G)=\operatorname*{esssup}_{\sigma\in\bar{C}_t}E(X_\sigma|G) \tag{4.84}$$

特别取 $G=\mathscr{F}_t$,则

$$\gamma_t=\operatorname*{esssup}_{\sigma\in\bar{C}_t}E(X_\sigma|\mathscr{F}_t)\triangleq\bar{\gamma}_t \tag{4.85}$$

由 γ_t 的定义,显然有 $E\gamma_t\geqslant V_t$. 另外由(4.53)式,存在一列$(\rho_n)\subset c_t$,使得 $\gamma_t=\sup E(X\rho_n|\mathscr{F}_t)$。对任意的 $\rho_1,\rho_2\in c_t$,令

$$\rho_1'=\rho_1,\ \rho_2'=I_A\rho_1'+I_{A^c}\rho_2$$

其中 $A=\{w:E(X_{\rho_1}|\mathscr{F}_t)\geqslant E(X_{\rho_2}|\mathscr{F}_t)\}$. 那么

$$E(X_{\rho_2'}|\mathscr{F}_t)\geqslant\max(E(X_{\rho_1}|\mathscr{F}_t),E(X_{\rho_2}|\mathscr{F}_t))$$

于是存在一个停时序列$(\rho_n')\subset c_t$,使 $E(X_{\rho_n'}|\mathscr{F}_t)\uparrow\gamma_t$. 由单调收敛

定理

$$E\gamma_t = \lim EX_{\rho_n} \cdot \subseteq V_t$$

从而 $E\gamma_t = V_t$，同理可证 $E\bar{\gamma}_t = \bar{V}_t$. 故

$$V_t = E\gamma_t = E\bar{\gamma}_t = \bar{V}_t。\qquad (4.86)$$

注 9　[36]中定理 4 断言，在 X 可选，$EX_t^- < \infty (\forall\ t \in \mathscr{R}_+)$ 的条件下，则存在最小 C_0 正则的可选强上鞅，在[36]的证明中，作者在建立了 $V = V + \vee X$ 后就断言 V 是最小 C_0 正则是没有根据的。

§4.4　用有限参数逼近连续参数问题

现在讨论用取离散值(二进制有理数值)的参数过程对连续参数过程的逼近。

设 X 是一个可选的(报酬)过程，具右半下连续性，即 $\forall\ t \in \mathscr{R}_+$

$$\liminf_{s \to \infty, s > t} X(s) \geqslant X(t) \qquad (4.87)$$

且 $\forall\ t \in \mathscr{R}_+$

$$EX_t^- < \infty \qquad (4.88)$$

令 q 是固定的二进制有理数，$q \geqslant 0$，取自然数 N 充分大，使 $q \leqslant N$，且 $q = \frac{k}{2^N}$，记 $V^N = \{\gamma^N(t), \mathscr{F}_t, t = 0, \frac{1}{2^N}, \frac{2}{2^N}, \cdots, N\}$ 是 $X^N = \{X(t), \mathscr{F}_t, t = 0, \frac{1}{2^N}, \frac{2}{2^N}, \cdots, N\}$ 的 MRS，它可以用后退归纳法得到，即令

$$\gamma^N(N) = X(N)$$

$$\gamma^N(j2^{-N}) = X(j2^{-N} \vee E(\gamma^N((j+1)2^{-N}) \mid \mathscr{F}_{j2^{-N}})$$

这里 $j = 0, 1, 2, \cdots, N2^N - 1$。

用后退归纳法，容易证明对于固定的 q，$\gamma^N(q)$ 随 N 的增大而不减，因此可令

$$\gamma''(q) = \lim_{N \to \infty} \gamma^N(q)$$

易知$\{\gamma''(q_n),\mathscr{F}_{q_n}:n=1,2,\cdots\}$是常义的离散参数上鞅，这里$q_1<q_2<\cdots$是二进制有理数序列。

如果X满足假设B，则$\{\gamma''(q_n)^-\}$一致可积，对于任何在二进制有理数集D上取值的停时τ,σ，若$\tau\geqslant\sigma$，则

$$E(\gamma''(\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant\gamma''(\sigma) \tag{4.89}$$

如果再假定$E\gamma''(0)<\infty$，则$\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，令$r_n\in D,r_n\downarrow t$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma''(r_n)$存在（命题8），因此可令

$$\gamma''(t)=\lim_{n\to\infty}\gamma''(r_n) \tag{4.90}$$

下面的定理将证明I''是X之MRS.

定理 4.27　设X是可选过程，轨道右半下连续，且满足假设B，$E\gamma''(0)<\infty$，则

$$I''=\{\gamma''(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$$

是X之MRS过程。

本定理的证明还需要下面的引理

引理 4.28　令(X_t)为一可选过程，使得对一切有界停时T，EX_T存在，对一切有界停时的降序列(T_n)，$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T_n}$存在（允许为$\pm\infty$），则$X$的几乎所有轨道在$\mathscr{R}_+$上右极限存在（允许为$\pm\infty$）。

证明　参考[3]5.45定理，我们只把[3]中的要求：$\forall\ T\in\mathscr{T}_B$，$E|X_T|<\infty$改为$EX_T$存在，它并不影响其证明。

引理 4.29　令(X_t)为可选强上鞅，对任何有界停时的降序列$T_n\downarrow T$，$\{X_{T_n}^-\}$一致可积，则X的轨道几乎右半上连续。

证明　由引理4.28，存在Ω_0，$P(\Omega_0)=1$，且对一切$\omega\in\Omega_0$，$t\in\mathscr{R}_+$，$X_{t+}(\omega)=\lim\limits_{s>t,s\downarrow t}X_s(\omega)$存在，令

$$Y_t(w)=\begin{cases}X_{t+}(\omega), & \omega\in\Omega_0\\ 0, & \omega\notin\Omega_0\end{cases}$$

则(Y_t)为右连续适应过程，从而为可选过程。为证X的轨道几乎右半上连续，只须证明：$\forall\ \varepsilon>0$，集合$\{(t,\omega);X_t(\omega)\leqslant Y_t(\omega)-\varepsilon\}$为不

足道集，如果不然，由截口定理，存在停时 S，使得 $P(S<\infty)>0$，且在 $[S<\infty]$ 上，有 $X_S\leqslant Y_S(\omega)-\varepsilon$。令 $S_n=S+\frac{1}{n}$，$T_n=S_n\wedge N$，$T=S\wedge N$，其中 N 充分大，使得 $P(S<N)>0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}EX_{T_n}=\lim_{n\to\infty}EX_NI_{S_n\geqslant N}+\lim_{n\to\infty}EX_{S_n}I_{[S_n<N]}$$

由于 $X_{S_n}I_{[S_n<N]}\xrightarrow{a.s.}Y_SI_{[S<N]}$，且 $(X_{T_n}^-)$ 一致可积，由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}EX_{T_n}\\ \geqslant&EX_NI_{[S\geqslant N]}+EY_SI_{[S<N]}\\ \geqslant&EX_NI_{[S\geqslant N]}+EX_SI_{[S<N]}+\varepsilon P(S<N)\\ =&EX_T+\varepsilon P(S<N)\end{aligned}$$

与强上鞅性质矛盾，从而 X 的几乎所有轨道右半上连续。

定理 4.27 的证明：首先证明 I'' 是可选的强上鞅，对于 $\tau,\sigma\in\mathscr{T}_B$，$\tau\geqslant\sigma$，取 D 值有界停时列 $\tau_n\downarrow\tau$，$\sigma_m\downarrow\sigma$，由(4.89)式，对使 $\tau_n\geqslant\sigma_m$ 的 n 与 m

$$E(\gamma''(\tau_n)\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})\leqslant\gamma''(\sigma_m)$$

令 $n\to\infty$（由于 $\lim_{n\to\infty}E\gamma''(\tau_n)\leqslant E\gamma''(0)<\infty$，$\gamma''(\tau_n)\xrightarrow{L_1}\gamma''(\tau)$）

$$E(\gamma''(\tau)\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})\leqslant\lim_{n\to\infty}E(\gamma''(\tau_n)\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})\leqslant\gamma''(\sigma_m)$$

$$(4.91)$$

由于 X 满足假设 B，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，$E\gamma''(\tau)^-<\infty$，而 $E\gamma''(\tau)\leqslant\lim_n E\gamma''(\tau_n)\leqslant E\gamma''(0)<\infty$，从而 $E|\gamma''(\tau)|<\infty$。由[3]之 2.22 系及(4.91)式

$$E(\gamma''(\tau)\mid\mathscr{F}_\sigma)=\lim_{m\to\infty}E[\gamma''(\tau)\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})\leqslant\gamma''(\sigma)\qquad(4.92)$$

所以 I'' 是可选强上鞅，（I'' 是右连续的适应过程），而由引理 4.4，I'' 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 正则的。

由 X 的右下半连续性，则知 $I''\geqslant X$，下面证明 I'' 是控制 X 的最小正则可选上鞅，为此令 $\triangle=\{\delta_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 为另一控制 X 的

正则可选上鞅，令

$$\delta'(t)=\begin{cases}\delta_t, & t\in D\\ \lim\limits_{s\in D,s\downarrow t}\delta_s, & t\overline{\in} D\end{cases}$$

引理 4.28 表明极限 $\lim\limits_{s\in D,s\downarrow t}\delta_s$ 是存在的，$\triangle'=\{\delta'(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 是右连续的适应过程，因此它是可选过程，由于 X 满足假设 B，因此由引理 4.29，$\triangle$ 的轨道右半上连续，于是 $\triangle\geqslant\triangle'$.

往证 $\triangle'\geqslant\Gamma''$：如果 $q\in D$，则存在 N 充分大使 $q=\frac{k}{2^N}$，$X(q)=X^N(q)$，所以 $\delta'(q)=\delta(q)\geqslant\gamma^N(q)$，令 $N\to\infty$，则 $\delta'(q)\geqslant\gamma''(q)$，如果 $t\overline{\in} D$，则由 $\delta'(t)=\lim\limits_{q_n\in D,q_n\downarrow t}\delta(q_n)$ 及 $\gamma''(t)=\lim\limits_{q_n\in D,q_n\downarrow t}\gamma''(q_n)$，可得 $\delta'(t)\geqslant\gamma''(t)$，总之 $P(\delta'(t)\geqslant\gamma''(t),t\in\mathscr{R}_+)=1$，即 $\triangle'\geqslant\Gamma''$.

于是 $\triangle\geqslant\triangle'\geqslant\Gamma''$，这表明 Γ'' 是最小的控制 X 的正则上鞅，即 X 之 MRS 过程。证毕。

综合上面的定理 4.6，引理 4.9，定理 4.10 及定理 4.25，我们有以下关于 Snell 包的四重极限定理。

定理 4.30 设 X 是右连续适应过程，且 $\forall\, t\in\mathscr{R}_+$，$EX_t^-\leqslant\infty$，$EX_\infty^-<\infty$，则存在 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 为 X 之 MRS 过程（即 Snell 包），其中

$$\gamma_t=\lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{q_n\downarrow t}\lim_{N\to\infty}\gamma_a^{b,N}(q_n) \tag{4.93}$$

$q_n\downarrow t$ 为一个二进制有理数列，$\gamma_a^{b,N}(q_n)$ 为 $X_a^{b,N}(q_n)=(X^N(q_n)\vee a)\wedge b$ 之 MRS.

证明 对固定的 N，$\{X_a^{b,N}(\frac{k}{2^N}):k=0,1,2,\cdots,N2^N\}$ 为有界报酬（离散参数）过程，存在它的 MRS 过程 $\{\gamma_a^{b,N}(\frac{k}{2^N}),k=0,1,\cdots,N2^N\}$，对二进制有理数 q，令

$$\gamma_a^b(q)=\lim_{N\to\infty}\gamma_a^{b,N}(q)$$

对 $t\in\mathscr{R}_+$，取二进制有理数列 $q_n\downarrow t$，令

$$\gamma_n^b(t)=\lim_{q_n\downarrow t}\gamma_n^b(q_n)$$

因为 $E\gamma_n^b(0)\leqslant b$，由定理 4.27，$\{\gamma_n^b(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$是$\{X_n^b(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$的 MRS.

记 $\gamma^b(t)=\inf\limits_{a\leqslant 0}\gamma_a^b(t)$，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，存在常数 C，使 $\tau\leqslant C$，由于

$$E(\gamma^b(\tau))^-=\lim_{a\to-\infty}E(\gamma_a^b(\tau))^-\leqslant\lim_{a\to-\infty}E(\gamma_a^b(c))^-\leqslant EX_c^-<\infty \tag{4.94}$$

由定理 4.10，可见$\{\gamma^b(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$，是$\{X^b(t),\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$的 MRS，注意到 $EX_\infty^-<\infty$，由引理 4.9 可知，由(4.93)式确定的 Γ 为 X 之 MRS. 证毕。

我们还可以证明当 X 是右连续适应过程，满足定理 4.30 的条件，且 $E\gamma_0<\infty$时，Γ 有右连续的修正。

引理 4.31　设(X_t)为一可选过程，使得 $\sup\limits_{T\in\mathscr{T}_B}E|X_T|<\infty$，如果对一切有界停时的降序列$(T_n)$，$(X_{T_n})$一致可积，且 $\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T_n}=EX_{\lim T_n}$，则$(X_t)$的几乎所有轨道为右连续。([3]5.47)

引理 4.32　设 X 为可选过程，Γ 为 X 之 MRS，$E\gamma(0)<\infty$，$\Gamma^b=(\gamma^b(t))$为 $X\wedge b$ 之 MRS，且 $\Gamma=\sup\limits_{b\geqslant 0}\Gamma^b$，如果每个 Γ^b 都是右连续的适应过程，则 Γ 也是右连续的适应过程。

证明　不妨取 b 为正整数，且设$\{\gamma^n(t);n\in\mathscr{N}_+\}$是单调增加的，由引理 4.1，$\forall\ a\in\mathscr{R}_+$，$\{\gamma_{a\wedge t},\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$为可选强上鞅，记 M_t 为 $E(\gamma^1(a)|\mathscr{F}_t)$的右连续修正，则$\{\gamma_{a\wedge t}-M_t\}$为非负的强上鞅。对任何 $T\in\mathscr{T}_B$，$0\leqslant E(\gamma_{a\wedge T}-M_T)\leqslant E\gamma_0-E\gamma^1(a)<\infty$，因此$\{\gamma_{a\wedge t}-M_t\}$，因而$\{\gamma_{a\wedge t}\}$在 L^1 中有界。

现在设(S_n)为有界停时的降序列，$S_n\downarrow S$，对固定的 n，$\lim\limits_{m\to\infty}E\gamma^n_{S_m\wedge a}\leqslant n<\infty$，故$(\gamma^n_{S_m\wedge a})$一致可积，且 $\gamma^n_{S_m\wedge a}\xrightarrow{L^1}\gamma^n_{S\wedge a}$(命题 8)，由于 $E\gamma^n_{S_m\wedge a}$对 n，对 m 都是单调非降的，所以

$$\lim_{m\to\infty} E\gamma_{\tau_m\wedge a} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\gamma^n_{\tau_m\wedge a}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} E\gamma^n_{\tau_m\wedge a} = E\gamma_{\tau\wedge a}$$

由引理 4.30，$\{\gamma_{a\wedge t}\}$的几乎所有轨道右连续，由于 a 是任意的，故 Γ 的几乎所有轨道右连续。

现在来证明我们所需要的定理。

定理 4.33 设 X 是右连续的适应过程，且$\forall\, t\in R_+, EX_t^-<\infty, EX_\infty^-<\infty$，$\Gamma$ 是 X 之 MRS，则当 $E\gamma(0)<\infty$时，Γ 有右连续的修正。

证明 由定理 4.30，$\gamma_t^b\uparrow\gamma_t(b\to\infty)$，这里 γ_t^b 为 $X\wedge b$ 之 MRS，如果能证明 γ_t^b 有右连续修正 $\tilde{\gamma}_t^b$，则 γ_t 有右连续修正 $\tilde{\gamma}_t=\lim\limits_{b\to\infty}\tilde{\gamma}_t^b$(引理 4.32)。

为此不妨设 $X\leqslant b$，因为$\forall\, t\in\mathscr{R}_+, -\infty<E\gamma_t\leqslant E\gamma(0)<\infty$，所以 Γ 是常义的上鞅。为证 Γ 有右连续的修正，只要证明 $V_t=E\gamma_t$ 右连续([3]3.8)。

$\forall\, t\geqslant 0, \varepsilon>0$，取 $\tau\in C_t$，使 $EX_\tau>V_t-\varepsilon$，取 $\tau_n(w)=\frac{i}{2^n}$，当 $t+\frac{(i-1)}{2^n}\leqslant\tau<t+\frac{i}{2^n}$，则 $\tau_n\in\mathscr{T}, \tau_n\downarrow\tau$，由假设 $EX_\infty^-<\infty$，由(4.75)式，Γ 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，故 $\gamma_{\tau_n}^-\leqslant E(X_\infty^-|\mathscr{F}_{\tau_n})$，由于$E\gamma_{\tau_n}^-<\infty$且 $E\gamma_{\tau_n}\leqslant b$，可见$\{\gamma_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n\geqslant 1\}$是反向上鞅，于是由命题 8，存在可积的随机变量 ξ，使 $\gamma_{\tau_n}\xrightarrow{a.s.且L^1}\xi$，由 X 的右连续性

$$\xi=\lim_{n\to\infty}\gamma_{\tau_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_\tau\quad a.s.$$

取充分大的 N，使 $E\gamma_{\tau_N}\geqslant E\xi-\varepsilon$，则当 $0<\delta<\frac{1}{2^N}$时，$V_t=E\gamma_t\geqslant E\gamma_{t+\frac{1}{2^N}}=E\gamma_{\tau_N}\geqslant EX_\tau-\varepsilon>V_t-2\varepsilon$，从而 $V_t=E\gamma_t$ 右连续，定理得证。

§ 4.5 最优与 ε 最优停时，唯一性

下面的引理与定理刻划了最优停时的特征。

引理 4.34 设 X 可选，其几乎所有轨道右半上连续，且$\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，$EX_t^-<\infty$，$EX_\infty^-<\infty$，$V_t<\infty$，$\Gamma$ 为 X 之 MRS，τ 在 $C_t(\overline{C}_t)$中最优，则$\forall\ s\geqslant t$

$$I_{[\tau>s]}E(X_\tau|\mathscr{F}_s)=I_{[\tau>s]}\gamma_s \quad a.\ s. \tag{4.94}$$

$$\gamma_\tau=X_\tau \qquad a.\ s. \tag{4.95}$$

证明 $\forall\ s\geqslant t$，对 $\tau\in C_t$，有

$$\begin{aligned}V_t&=EX_\tau=\int_{[\tau>s]}E(X_{\tau\vee s}|\mathscr{F}_s)+\int_{[\tau\leqslant s]}X_\tau\\&\leqslant\int_{[\tau>s]}\gamma_s+\int_{[\tau\leqslant s]}\gamma_\tau=E\gamma_{\tau\wedge s}\\&\leqslant E\gamma_{\tau\wedge t}=E\gamma_t=V_t\end{aligned}$$

于是

$$\int_{[\tau>s]}(\gamma_s-E(X_\tau|\mathscr{F}_s))+\int_{(\tau\leqslant s)}(\gamma_\tau-X_\tau)=0 \tag{4.96}$$

由于被积函数非负，故

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_S)=\gamma_S \quad [\tau>S]a.\ s，且\ \gamma_\tau=X_\tau \quad a.\ s$$

(4.96)式对 $\overline{C}_t$ 中最优停时 τ 仍然成立，注意到此时 Γ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 正则的，因此

$$V_t=EX_\tau\leqslant E\gamma_\tau\leqslant E\gamma_t=V_t$$

所以(4.94)，(4.95)仍然成立。证毕。

上述引理常被称为是最优原理。记

$$\tau^\circ(t)=\inf\{s\geqslant t: X_s\geqslant\gamma_s\}$$

定理 4.35 设 X 可选，几乎所有轨道右半上连续，$\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，

$EX_t^- < \infty, EX_\infty^- < \infty, V_t < \infty$，则下面的事实等价

i) τ 在 $\overline{C}_t$(或 C_t)中最优；

ii) $X_\tau = \gamma_\tau a.s$，且$\{\gamma_{\tau\wedge s}, t \leqslant s \leqslant \infty\}$是封闭鞅；

iii) $X_\tau = \gamma_\tau a.s$，且$\{\gamma_{\tau\wedge s}, t \leqslant s \leqslant \infty\}$是封闭下鞅；

iv) $\tau^\circ(t)$在 $\overline{C}_t$(或 C_t)中最优，且

$$I_{[\tau > \tau^\circ(t)]} E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau^\circ(t)}) = I_{[\tau > \tau^\circ(t)]} \gamma_{\tau^\circ(t)} \quad a.s. \tag{4.97}$$

$$\tau \geqslant \tau^\circ(t) \quad a.s. \tag{4.98}$$

证明 i)⇒ii)。由引理 4.33，$X_\tau = \gamma_\tau \quad a.s. \forall s \geqslant t$

$$V_t = EX_\tau = E\gamma_\tau = E(E(\gamma_\tau | \mathscr{F}_s)) \leqslant E\gamma_{\tau\wedge s} \leqslant E\gamma_t = V_t$$

因此 $\gamma_{\tau\wedge s} = E(\gamma_\tau | \mathscr{F}_s)$，而$|E\gamma_\tau| = |EX_\tau| = |V_t| < \infty$，所以$\{\gamma_{\tau\wedge s}: t \leqslant s \leqslant \infty\}$是封闭鞅。

ii)⇒iii)。显然

iii)⇒i)。由$\{\gamma_{\tau\wedge s}, t \leqslant s \leqslant \infty\}$是封闭下鞅，故$\overline{V}_t = V_t = E\gamma_t \leqslant E\gamma_\tau = EX_\tau$，因此 τ 最优。

i)⇒iv)。由 $\tau^\circ(t)$的定义，可见 $\tau^\circ(t) \leqslant \tau \quad a.s.$，因为 $EX_\infty^- < \infty$，可证 V 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 正则的，因此

$$\begin{aligned} & I_{[\tau > \tau^\circ(t)]} E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau^\circ(t)}) \\ = & I_{[\tau > \tau^\circ(t)]} E(\gamma_\tau | \mathscr{F}_{\tau^\circ(t)}) \\ = & I_{[\tau > \tau^\circ(t)]} \gamma_{\tau^\circ(t)} \end{aligned} \tag{4.99}$$

当 $\tau^\circ(t) < \infty$时，由 X 的右半上连续性以及 $V = V + \vee X$(定理 4.24)，可知 $\gamma_{\tau^\circ(t)} = X_{\tau^\circ(t)}$；当 $\tau^\circ(t) = \infty$时，由(4.71)式可知 $\gamma^b(\infty) = X_\infty \wedge b$，令 $b \to \infty$，则 $\gamma_\infty = X_\infty$，因此由(4.99)式

$$I_{(\tau > \tau^\circ(t))} E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau^\circ(t)}) = I_{(\tau > \tau^\circ(t))} X_{\tau^\circ(t)} \tag{4.100}$$

于是

$$\begin{aligned} EX_{\tau^\circ(t)} &= EI_{[\tau > \tau^\circ(t)]} \gamma_{\tau^\circ(t)} + EI_{[\tau = \tau^\circ(t)]} X_\tau \\ &= EI_{[\tau > \tau^\circ(t)]} E(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau^\circ(t)}) + EI_{[\tau = \tau^\circ(t)]} X_\tau \\ &= EX_\tau = V_t > -\infty \end{aligned}$$

所以 $\tau^\circ(t)$在 C_t(或 $\overline{C}_t$)中最优。

iv)⇒i)。由(4.97)式,(4.98)式

$$V_t = EX_{\tau^0(t)} = EI_{[\tau > \tau^0(t)]}\gamma_{\tau^0(t)} + EI_{[\tau = \tau^0(t)]}X_\tau = EX_\tau \quad \text{证毕}$$

定理 4.36 设 X 可选,满足假设 A,其几乎所有轨道右半上连续,$\forall\ t \in \mathscr{R}_+$,$EX_t^- < \infty$,$\Gamma$ 为 X 之 MRS,令 $\tau^\varepsilon(t) = \inf\{s \geqslant t: X_s \geqslant \gamma_s - \varepsilon\}$,则

i) $\tau^\varepsilon(t)$是 ε 最优停时;

ii) 如果 X 还满足拟左上半连续性(即对任何停时列 $\tau_n \uparrow \tau$,$\limsup\limits_{n\to\infty} X_{\tau_n} \leqslant X_\tau \quad [\tau < \infty]\ a.s.$),则 $\tau^0(t)$是最优停时;

iii) 如果在 $\overline{C}_t$(或 C_t)中存在最优停时(规则)τ^*,则 $\tau^0(t)$最优且 $\tau^0(t) \leqslant \tau^* \quad a.s.$

证明 i) 由定理 4.23 之 ii),存在 X 之 MRS 过程 Γ,因为 X 的几乎所有轨道右半上连续且由(4.33)式,可知 $X_{\tau^\varepsilon(t)} \geqslant \gamma_{\tau^\varepsilon(t)} - \varepsilon$,于是

$$EX_{\tau^\varepsilon(t)} \geqslant E\gamma_{\tau^\varepsilon(t)} - \varepsilon \geqslant E\gamma_t - \varepsilon \geqslant V_t - \varepsilon$$

所以 $\tau^\varepsilon(t)$是 ε 最优的。

ii) 令 $\tau_n = \inf\{s \geqslant t, X_s \geqslant \gamma_s - \frac{1}{n}\}$,$\tau^* = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$. 由于 Γ 是 $\mathscr{T}$ 正则的,故 $V_t = \overline{V}_t = \lim\limits_{n\to\infty} EX_{\tau_n}$. 事实上,由注 3 及引理 4.17 可知 $\tau_n < \infty$ $a.s.$,由 i)$EX_{\tau_n} \geqslant V_t - \frac{1}{n} \geqslant EX_{\tau_n} - \frac{1}{n}$,于是 $V_t = \lim\limits_{n\to\infty} EX_{\tau_n}$,由 X 的拟左上半连续性以及 Fatou 引理

$$EX_{\tau^*} \geqslant E(\limsup_{n\to\infty} X_{\tau_n}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} EX_{\tau_n} = V_t$$

显然 $\tau^* \leqslant \tau^0(t)$,而由 $EX_{\tau^*} \geqslant V_t \geqslant E\gamma_{\tau^*}$,可知 $X_{\tau^*} = \gamma_{\tau^*}$,从而 $\tau^0(t) \leqslant \tau^*$,所以 $\tau^0(t) = \tau^*$ 是最优停时。

iii) 由 X 的右半上连续及 $\Gamma = \Gamma + \vee X$,易证 $X_{\tau^0(t)} = \gamma_{\tau^0(t)} \quad a.s.$,由 τ^* 为最优,则 $X_{\tau^*} = \gamma_{\tau^*}$,所以,$\tau^0(t) \leqslant \tau^*$,于是

$$V_t = \overline{V}_t = EX_{\tau^*} = E\gamma_{\tau^*} \leqslant E\gamma_{\tau^0(t)} = EX_{\tau^0(t)}$$

因而 $\tau^0(t)$是最小最优停时。证毕。

现在讨论当 X 的几乎所有轨道为右连续时 ε 最优与最优停时问题。

记 $\sigma^\varepsilon(t)=\inf\{s>t: X_s\geqslant\gamma_s-\varepsilon\}$，其中 $\Gamma=\{\gamma_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathscr{R}_+\}$ 为 X 之 MRS.

定理 4.37 设 X 为右连续适应过程，满足假设 A，$EX_\infty^-<\infty$，$\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，$EX_t^-<\infty$，则

i) $\forall\ t\geqslant0,\varepsilon>0,\sigma^\varepsilon(t),\tau^\varepsilon(t)$ 均是 X 在 C_t 中的 ε 最优规则；

ii) 如果 X 还是拟左上半连续的，则 $\sigma^0(t),\tau^0(t)$ 均是 X 在 $\overline{C}_t$ 中的最优停时。

证明 i) 由定理 4.36，我们只须证明 $\sigma^\varepsilon(t)$ 是 ε 最优的，记 $A_s=\{u\geqslant s,X_u\geqslant\gamma_u-\varepsilon\}$，$B_t=\{u>t: X_u\geqslant\gamma_u-\varepsilon\}$，则 $\tau^\varepsilon(t)=\inf A_s$，$\sigma^\varepsilon(t)=\inf B_t$，对于 $s>t$，$A_s\subseteq B_t$，且 A_s 随 s 递减而增大，因此 $\tau^\varepsilon(s)\downarrow(s\downarrow t)$，故 $\lim\limits_{s\downarrow t}\tau^\varepsilon(s)\leqslant\sigma^\varepsilon(t)$。往证相反的不等式，如果 $\lim\limits_{s\downarrow t}\tau^\varepsilon(s)<\sigma^\varepsilon(t)$，则必存在 $\delta>0$，当 $t<s\leqslant t+\delta$ 时，$\tau^\varepsilon(s)<\sigma^\varepsilon(t)$，于是相应的 $A_s\supseteq B_t$，由此对满足 $t<s\leqslant t+\delta$ 的 s，$A_s=B_t$，因此 $\lim\limits_{s\downarrow t}\tau^\varepsilon(s)=\sigma^\varepsilon(t)$.

由定理 4.33，V_t 是右连续的，而由假设 A，$\{X^+_{\tau^\varepsilon(s)}: s\geqslant t\}$ 是一致可积的，于是

$$\begin{aligned}EX_{\sigma^\varepsilon(t)}&=E(\lim_{s\downarrow t}X_{\tau^\varepsilon(s)})\geqslant\limsup_{s\downarrow t}EX_{\tau^\varepsilon(s)}\\&\geqslant\limsup_{s\downarrow t}V_s-\varepsilon=V_t-\varepsilon\end{aligned}\tag{4.101}$$

因此 $\sigma^\varepsilon(t)$ 是 ε 最优的。

由(4.71)式，$\gamma_\infty=X_\infty$，所以 $\sigma^\varepsilon(t)<\infty$，$\tau^\varepsilon(t)<\infty\quad a.s.$

ii) 由定理 4.36，我们只须证明 $\sigma^0(t)$ 最优，如同 i) 可证：$\tau^0(s)\downarrow\sigma^0(t)$，由于 X 右连续且(4.33)式成立，且 $X_\infty=\gamma_\infty$，故

$$\begin{aligned}EX_{\sigma^\varepsilon(t)}&=E\gamma_{\sigma^\varepsilon(t)}=E\lim_{s\downarrow t}\gamma_{\tau^\varepsilon(s)}\\&\geqslant\limsup_{s\downarrow t}E\gamma_{\tau^\varepsilon(s)}=\limsup_{s\downarrow t}EX_{\tau^\varepsilon(s)}\\&=\limsup_{s\downarrow t}V_s=V_t\end{aligned}\tag{4.102}$$

从而 $\sigma^0(t)$ 在 C_t 中最优。

注 10 我们在上面的证明中已多次用到等式 $\Gamma=\Gamma+\vee X$，当 X 满足假设 A，且 $\forall\ t\in\mathscr{R}_+$，$EX_t^-<\infty$ 时，由定理 4.10 可予以保证，而当 X 满足假设 B，且 $Ey(0)<\infty$，由定理 4.24 也可得到上述的结果。

由定理 4.35，我们可以得到有关最优停时唯一性的结论。

定理 4.38 设 X 可选，几乎所有轨道右半上连续，$\forall\ t$，$EX_t^-<\infty$，$V_t<\infty$，则在 $\overline{C}_t$ 中的最优停时为唯一（$a.s$ 等于 $\tau^0(t)$）的充要条件是任给 $\tau^0(t)\leqslant\tau\in C_t$

$$P([\tau>\tau^0(t)]\cap[E(X_\tau|\mathscr{F}_{\tau^0(t)})=X_{\tau^0(t)}])=0 \tag{4.103}$$

对于 $V_t=+\infty$ 的情形，有

引理 4.39 设 X 可选，且 $\forall\ \sigma\in\mathscr{T}$，存在 $\rho\in\mathscr{T}$，$\rho\geqslant\sigma$ 使 $EX_\rho^-<\infty$，对固定的 $t\in\mathscr{R}_+$，$V_t=+\infty$，且存在 $t'\geqslant t$，使 $\mathscr{F}_{t'}\neq(\Omega,\Phi$，零测集全体)，那么如果在 $\overline{C}_t$ 中存在最优停时 $\tau\not\equiv\infty$ $a.s$（即 $P(\tau<\infty)>0$），则必存在无穷多个最优停时。

证明 (1) 如果最优停时 τ $a.s$ 一致有界，即存在常数 s，使 $\tau\leqslant s$ $a.s$，取递增的数列 $s_k'>s$，于是存在递增的停时列 $\tau_k'\geqslant s_k'$，使 $EX_{\tau_k'}^-<\infty$，既然 $EX_\tau=V_t=+\infty$，则必存在 $A\in\mathscr{F}_{t'}$，$1>P(A)>0$，使 $\int_A X_\tau=+\infty$，令 $\tau_k^*=\tau_k'I_{A^c}+\tau I_A$，则 $EX_{\tau_k^*}=\int_A X_\tau+\int_{A^c}X_{\tau_k'}$，注意到

$$\int_{A^c}X_{\tau_k'}\geqslant-EX_{\tau_k'}^->-\infty$$

可见 $EX_{\tau_k^*}=+\infty$，且 $P(\tau_k^*>\tau)>0$。因此存在无穷多个最优停时。

(2) 如果 τ 不是 $a.s.$ 一致有界的，又 $P(\tau<\infty)>0$，必存在 $s\in\mathscr{R}_+$，使 $1>P(\tau\leqslant s)>0$，记 $A=\{\tau\leqslant s\}$，取一列 $s_k\geqslant s$，由假设存在 $\tau_k\in\mathscr{T}$，$\tau_k\geqslant s_k$，使 $EX_{\tau_k}^-<\infty$，当 $\int_A X_\tau^+<\infty$ 时，令

$$\tau_k^*=\tau_kI_A+\tau I_{A^c}$$

则

$$EX_{\tau_k^*} = EX_\tau + \int_A (X_{\tau_1} - X_\tau) = +\infty$$

当 $\int_A X_t^+ = \infty$ 时，则 $\int_A X_\tau^- < \infty$，取一列 $s_k > s$，$\tau_k \geqslant (s_k \vee \tau) + 1$，使 $EX_{\tau_k}^- < \infty$.

令 $\tau^* = \tau I_A + \tau_1 I_{A^c}$，则 $\rho(\tau_k^* > \tau) = \rho(\tau > s) > 0$（因为 τ 不是 a.s. 一致有界），而

$$EX_{\tau_k^*} = \int_A X_\tau + \int_{A^c} X_{\tau_k}^+ - \int_{A^c} X_{\tau_k}^- = \infty$$

因此也存在无穷多个最优停时。

定理 4.40　设 X 可选，且 $\forall\ \sigma \in \mathscr{T}$，存在 $\rho \geqslant \sigma$，$\rho \in \mathscr{T}$，使 $EX_\rho^- < \infty$，若存在 $\tau \in \bar{C}_t$，使 $EX_\tau = +\infty$，则 X 在 $\bar{C}_t$ 中最优停时为唯一的充要条件是：$\forall\ s \geqslant t$，$\mathscr{F}_s = (\Omega, \Phi$，零测集)。

§4.6　弱单调情形[39]

在离散情形，我们称可积报酬序列 $\{X_n, \mathscr{F}_n\}_1^\infty$ 属于单调情形，是指

1) $\{X_n \geqslant E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)\} \subseteq \{X_{n+1} \geqslant E(X_{n+2} | \mathscr{F}_n)\}$，$n \geqslant 1$

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \geqslant E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)\} = \Omega$　a. s.

并且证明了，当 (X_n) 一致可积时

$$S = \inf\{n \geqslant 1 ; X_n \geqslant E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)\}$$

是最优的，由上述的 1)，易知

$$\{X_n \geqslant E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)\} = \{X_n \geqslant \sup_{k \geqslant n+1} E(X_k | \mathscr{F}_n)\}$$

于是可知在单调情形有：$\forall\ n \geqslant 1$

$$\{X_n \geqslant \sup_{k \geqslant n+1} E(X_k | \mathscr{F}_n)\} \subseteq \{X_{n+1} \geqslant \sup_{k \geqslant n+2} E(X_k | \mathscr{F}_{n+1})\} \tag{4.104}$$

(4.104)式可以自然地推广到连续情形。

定义 4.6 设$(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$是轨道右连续的可积报酬过程，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，$EX_\tau^-<\infty$，$(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$满足通常条件，称$(X_t)$属于弱单调情形，如果

i) $\forall\ t\in\mathscr{R}_+,k>0$

$$\{X_t\geqslant \operatorname*{esssup}_{s>t}E(X_s|\mathscr{F}_t)\}\subseteq\{X_{t+k}\geqslant\operatorname*{esssup}_{s>t+k}E(X_s|\mathscr{F}_{t+k}\}$$

(4.105)

ii) $\bigcup\{X_t\geqslant\operatorname*{esssup}_{s>t}E(X_s|\mathscr{F}_t)\}=\Omega$ (4.106)

由定理 4.20，可知存在控制的最小强上鞅(γ_t)，且$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$

$$\gamma_\tau=\operatorname*{esssup}_{\rho\geqslant\tau,\rho\in\mathscr{T}_B}E(X_\rho|\mathscr{F}_\tau)\tag{4.107}$$

对任何$\nu\in\mathscr{T}$，$\varepsilon\geqslant 0$，记$\tau^\varepsilon(\nu)=\inf\{t\geqslant\nu;X_t\geqslant\gamma_t-\varepsilon\}$，有

定理 4.41 设$(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$是轨道右连续的可积过程，$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，$EX_\tau^-<\infty$，$\nu\in\mathscr{T}_B$，$\varepsilon\geqslant 0$，且

i) $\tau^\varepsilon(\nu)<\infty\quad a.s.$

ii) 对任何停时的单调增序列$\{\tau_n\}$，$\nu\leqslant\tau_n\leqslant\sigma^\varepsilon(\nu)$，有

$$EX_{\sup\tau_n}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}EX\tau_n\tag{4.108}$$

则

$$EX_{\tau^\varepsilon(\nu)}\geqslant E\gamma_\nu-\varepsilon$$

证明 由于$\forall\ \tau\in\mathscr{T}_B$，$EX_\tau^-<\infty$，可见$E\gamma_\nu>-\infty$，令$b<E\gamma_\nu$，记

$$\mathscr{T}_1=\{\tau\in\mathscr{T}\mid\nu\leqslant\tau\leqslant\tau^\varepsilon(\nu)，且\ EX_\tau\geqslant b-\varepsilon\}$$

可证$\mathscr{T}_1$满足 Zorn 引理的条件，事实上，由(4.107)存在$\eta\geqslant\nu,\eta\in\mathscr{T}_B$，使$EX_\eta\geqslant b$，记$\eta'=\eta\wedge\sigma^\varepsilon(\nu)$，则$\nu\leqslant\eta'\leqslant\sigma^\varepsilon(\nu)$，且

$$\{\eta\leqslant\tau^\varepsilon(\nu)\}=\{\eta'=\eta\}\in\mathscr{F}_{\eta}{}'.$$

$$I_{\eta\leqslant\tau^\varepsilon(\nu)}X_{\eta'}=I_{(\eta\leqslant\tau^\varepsilon(\nu))}E(X_\eta|\mathscr{F}_{\eta}{}')$$

$$I_{(\eta>\tau^\varepsilon(\nu))}X_{\eta}{}'$$

$$=I_{(\eta>\tau'(\nu))}\gamma_{\eta'}-\varepsilon$$
$$\geqslant I_{(\eta>\tau'(\nu))}E(\gamma_{\eta}|\mathscr{F}_{\eta'})-\varepsilon$$
$$\geqslant I_{(\eta>\tau'(\nu))}E(X_{\eta}|\mathscr{F}_{\eta'})-\varepsilon$$

所以 $EX_{\eta'}\geqslant EX_{\eta}-\varepsilon\geqslant b-\varepsilon$，这表明 $\mathscr{T}_1$ 是非空的集合，现在设 $\mathscr{T}_2\subseteq\mathscr{T}_1$ 是全序子集，令 $\tau'=\text{esssup}\mathscr{T}_2$，则 $\nu\leqslant\tau'\leqslant\tau'(\nu)$，且存在一列 $\tau_n\in\mathscr{T}_2$，使 $\tau_n\leqslant\tau_{n+1}$，$\tau'=\sup\tau_n$，由(4.108)

$$EX_{\tau'}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}EX_{\tau_n}\geqslant b-\varepsilon$$

所以 $\tau'\in\mathscr{T}_1$，于是由 Zorn 引理，存在 σ^* 为 $\mathscr{T}_1$ 中最大元，易知 $\nu\leqslant\sigma^*\leqslant\tau'(\nu)$，往证 $\sigma^*=\tau'(\nu)$. 由于 $\forall\rho\in\mathscr{T}_B$

$$E(X_{\rho}|\mathscr{F}_{\rho\wedge\tau'(\nu)})$$
$$=E(X_{\rho}|\mathscr{F}_{\rho\wedge\tau'(\nu)})I_{(\tau'(\nu)\leqslant\rho)}+X_{\rho\wedge\tau'(\nu)}I_{(\tau'(\nu)>\rho)}$$
$$\leqslant E(\gamma_{\rho}|\mathscr{F}_{\rho\wedge\tau'(\nu)})I_{(\tau'(\nu)\leqslant\rho)}+X_{\rho\wedge\tau'(\nu)}I_{(\tau'(\nu)>\rho)}$$
$$\leqslant\gamma_{\rho\wedge\tau'(\nu)}I_{(\tau'(\nu)\leqslant\rho)}+X_{\rho\wedge\tau'(\nu)}I_{(\tau'(\nu)>\rho)}$$
$$\leqslant X_{\rho\wedge\tau'(\nu)}+\varepsilon \tag{4.109}$$

如果 $\sigma^*\neq\tau'(\nu)$，则存 $t\in\mathscr{R}_+$，使

$$P((\sigma^*<t)\cap(\sigma^*<\tau'(\nu)))>0$$

且

$$A_t\triangleq(\sigma^*<t)\cap(\sigma^*<\tau'(\nu))$$
$$=(\sigma^*\wedge t<t)\cap(\sigma^*\wedge t<\tau'(\nu))\in\mathscr{F}_{\sigma^*\wedge t}$$

因此

$$X_{\sigma^*}I_{A_t}<(\gamma_{\sigma^*}-\varepsilon)I_{A_t}$$
$$=(\gamma_{\sigma^*\wedge t}-\varepsilon)I_{A_t}$$
$$=\underset{\rho\in\mathscr{T}_B,\rho\geqslant\sigma^*\wedge t}{\text{esssup}}E(X_{\rho}|\mathscr{F}_{\sigma^*\wedge t})I_{A_t}-\varepsilon I_{A_t}$$

于是存在 $\rho\in\mathscr{T}_B$，$\rho\geqslant\sigma^*\wedge t$，使

$$P(X_{\sigma^*}I_{A_t}<(E(X_{\rho}|\mathscr{F}_{\sigma^*\wedge t})-\varepsilon)I_{A_t})>0$$

上述括号中集合 B_t 属于 $\mathscr{F}_{\sigma^*\wedge t}\subseteq\mathscr{F}_{\rho\wedge\tau'(\nu)}$，由(4.109)

$$E(X_{\rho\wedge\tau'(\nu)}|\mathscr{F}_{\sigma^*\wedge t})I_{B_t}$$

$$\geqslant [E(X_\rho | \mathscr{F}_{\sigma^* \wedge t}) - \varepsilon] I_{B_t}$$

$$> X_{\sigma^*} I_{B_t}$$

定义 $\hat{\sigma} = \sigma^* I_{B_t^c} + (\rho \wedge \tau^\varepsilon(v)) I_{B_t}$，则 $\sigma^* \leqslant \hat{\sigma} \leqslant \tau^\varepsilon(v)$，$\sigma \neq \hat{\sigma}$，$\hat{\sigma} \in \mathscr{F}$，且

$$EX\hat{\sigma} \geqslant EX_{\sigma^*} \geqslant b - \varepsilon$$

这与 σ^* 为 $\mathscr{F}_1$ 中极大元矛盾，这样 $\sigma = \tau^\varepsilon(v)$，即对任何 $b < E\gamma_v$，$EX_{\tau^\varepsilon(v)} = EX_{v^*} \geqslant b - \varepsilon$，从而

$$EX_{\tau^\varepsilon(v)} \geqslant E\gamma_v - \varepsilon$$

定理得证。

记 $\tau_0 = \tau^0(0) = \inf\{t \geqslant 0, X_t \geqslant \gamma_t\}$，由于对任何满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{(\rho>t)} \gamma_t^- = 0$ 的停时 ρ，成立 Doob 停止定理，因此有下面的推论

推论 4.42 在定理 4.31 的条件下

1）$EX_{\tau_0} \geqslant \sup\{EX_\rho, \rho$ 为停时，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{(\rho>t)} \gamma_t^- = 0\} \geqslant \sup\{EX_\rho, \rho \in \mathscr{F}_B\}$；

2）如(γ_t)正则，则 $EX_{\tau_0} = \sup\{EX_\tau, \tau \in \mathscr{F}\}$。

下面假设 X_t 如定理 4.41，且

i）存在$(v_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$为$(\operatorname*{esssup}\limits_{s>t} E(X_s | \mathscr{F}_t))_{t\in\mathscr{R}_+}$修正，使得$(I_{A_t})_{t\in\mathscr{R}_+}$为右连续，这里

$$A_t = \{\omega; X_t \geqslant V_t\} \tag{4.110}$$

ii）$\forall\, t, h \in \mathscr{R}_+$，$A_t \subset A_{t+h}$，$\bigcup\limits_{t\in\mathscr{R}_+} A_t = \Omega$ (4.111)

令 $\sigma = \inf\{t: X_t \geqslant v_t\} = \inf\{t: \omega \in A_t\}$

定理 4.43 $\tau = \tau_0$，且 τ 具有推论 4.42 所描述的最优性。

证明 $\forall\, t \in \mathscr{R}_+$，由于$\{X_t \geqslant \gamma_t\} \subset \{X_t \geqslant v_t\}$，因此 $\tau_0 \geqslant \tau$，为证 $\tau_0 \leqslant \tau$，只须证 $\gamma_t I_{A_t} = X_t I_{A_t}$，定义 $Y_t = \gamma_t I_{A_t^c} + X_t I_{A_t}$，$\forall\, s > t$，$C_s^c \subset C_t^c$，故

$$Y_s = \gamma_s I_{A_s^c} + X_s I_{A_s}$$

$$= \gamma_s I_{A_s^c} - \gamma_s I_{A_t^c A_s} + X_s I_{A_t} + X_s I_{A_s A_t^c}$$

$$\leqslant \gamma_s I_{A_t^c} - X_s I_{A_t}$$

所以

$$E(Y_s|\mathscr{F}_t) \leqslant I_{A_t^c}\gamma_t + I_{A_t}E(X_s|\mathscr{F}_t) \leqslant I_{A_t^c}\gamma_t + I_{A_t}X_t = Y_t$$

而且$(X_t)\leqslant(Y_t)\leqslant(\gamma_t)$，但$(\gamma_t)$是控制$(X_t)$的最小上鞅，因此$(\gamma_t)=(Y_t)$，所以当$\omega\in A_t$时，$X_t=\gamma_t$.

例 设$(Z_t)_{t\in\mathscr{R}_+}$是一个非降的右连续的非负过程，$Z_0=0$，$(\mathscr{F}_t)$是的子代数族，满足通常条件，$\forall\ t,h\in\mathscr{R}_+$，$y\in\mathscr{R}$

$$P(\{Z_{t+h}\leqslant y\}|\mathscr{F}_t)=P(\{Z_{t+h}\leqslant y\}|Z_t)=\begin{cases}0, & y<Z_t\\ G(y)^h, & y\geqslant Z_t\end{cases}$$

其中

$$G(y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{y}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

这样的过程在研究次序统计量中常常遇到[40,41]。我们考虑

$$Z_t=Z_t^a-ct \quad c>0,0<a<1$$

的最优停止问题。

注意到对$t>0$，EZ_t^a有限，但EZ_t无限，对$t,h\in\mathscr{R}_+$，$h>0$

$$\begin{aligned}E(Z_{t+h}^a|Z_t)&=\int_0^\infty y^a\mathrm{d}F(y|Z_t)\\ &=Z_t^a e^{-h/Z_t}+\int_{Z_t}^\infty y^a\mathrm{d}(e^{-\frac{h}{y}})\\ &=Z_t^a e^{-h/Z_t}+h\int_{Z_t}^\infty y^{a-2}e^{-\frac{h}{y}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令$v_t=\sup\limits_{h>0}\{Z_t^a e^{-h/Z_t}+h\int_{Z_t}^\infty y^{a-2}e^{-\frac{h}{y}}\mathrm{d}y-c(t+h)\}$，并记

$$\varphi_z(h)=Z^a e^{-h/z}+h\int_z^\infty y^{a-2}e^{-h/y}\mathrm{d}y-c(t+h)$$

则

$$\varphi_z(0)=Z^a-ct$$

$$\varphi_z'(h)=-Z^{a-1}e^{-h/z}+\int_z^\infty y^{a-2}e^{-h/y}\mathrm{d}y-h\int_z^\infty y^{a-3}e^{-h/y}\mathrm{d}y-c$$

因而

$$\varphi_z'(0)>0\Leftrightarrow -Z^{\alpha-1}+\int_z^{\infty}y^{\alpha-2}\mathrm{d}y>c\Leftrightarrow Z<\left(\frac{\alpha}{c(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\triangleq\gamma$$

记 $b=h/z$，则

$$\varphi_z'(h)=Z^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}\left(-1+\frac{1}{n+1-\alpha}-\frac{b}{n+2-\alpha}\right)-c$$

$$=Z^{\alpha-1}\frac{\alpha}{1-\alpha}+Z^{\alpha-1}\alpha\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}\frac{1}{n+1-\alpha}-c$$

因为当 $z\geqslant\gamma$ 时，$Z^{\alpha-1}\alpha/(1-\alpha)\leqslant c$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}\cdot\frac{1}{n+1-\alpha}$$

$$=b^{\alpha-1}\int_0^b e^{-t}t^{-\alpha}dt-\frac{1}{1-\alpha}$$

$$\leqslant b^{\alpha-1}\int_0^b e^{-t}dt-\frac{1}{1-\alpha}=0$$

所以 $z\geqslant\gamma$ 时，$\varphi_z'(h)\leqslant 0$，因此

$$A_t=\{X_t\geqslant V_t\}=\{Z_t\geqslant\gamma\}$$

(4.110)，(4.111)两个条件显然满足，对

$$\sigma=\inf\{t\in T, Z_t\geqslant\gamma\}$$

有 $P(\sigma>t)=P(Z_t<\gamma)=e^{-t/\gamma}$，于是对一切 n，$E\sigma^n$ 有限，对停时的增列 $\tau_n\leqslant\sigma$，有

$$EZ^{\alpha}_{\sup\tau_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}EZ^{\alpha}_{\tau_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}E\tau_n\leqslant E\sup\tau_n<\infty$$

于是

$$EX_{\sup\tau_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}EX_{\tau_n}$$

对一切 t，$X_t^-\leqslant c_t$，因此由推论 4.42

$$EX_\sigma=\sup\{EX_\tau:\tau\in\overline{\mathscr{T}},E\tau<\infty\}$$

令 $Y=\sup\limits_{t\geqslant 0}X_t^+$，则由 Z_t 的非降性，可知

$$\sup_n(Z_n^\alpha-cn)^+\leqslant Y\leqslant C+\sup_n(Z_n^\alpha-cn)^+$$

对每个 n，$(Z_1^\alpha,Z_2^\alpha,\cdots,Z_n^\alpha)$与$(v_1^\alpha,\max(v_1^\alpha,v_2^\alpha),\cdots,\max(v_1^\alpha,v_2^\alpha,\cdots,v_n^\alpha))$同分布，其中 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是独立同分布的随机变量，分布函数为 G

(x)，见[40]。

可以证明[42]，$EY<\infty \Leftrightarrow EZ_1^{2\alpha}<\infty \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2}$。所以，当 $\alpha<\frac{1}{2}$，$\forall\ \tau \in \mathscr{T}$，$EX_\tau^+ \leqslant EY<\infty$，并且从 $-ct \leqslant X_t \leqslant (Z_t^\alpha-\frac{c}{2}t)^+-\frac{c}{2}t$，可见 $EX_\tau>-\infty \Leftrightarrow E\tau<\infty$，因而

$$EX_\sigma=\sup\{EX_t : \tau \in \mathscr{T}\}$$

§4.7 停时类的紧性

在停时类中引入某种适当的拓扑，使其成为一个紧空间，这对于研究随机序列(过程)的收敛性以及最优停止问题都具有深刻的意义，它使得这类特殊的优化(最优停止)与分析中的优化发生某种观念的关连。1977 年 Baxteer 与 Chacon 在[47]中引入了我们称之为 B—C 拓扑的结构，后来[48，49]又用它来研究 Banach 空间值随机过程的最优停止与多指标最优停止问题。

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)_{t\in\mathscr{R}_+}$ 是满足通常条件的概率空间，特别要指出的，本节的 $\mathscr{F}_t$ 是右连续的，设 $X=(X_t, \mathscr{F}_t)$ 为适应可测的实值过程。

定义 4.7 设 $T: \Omega\times[0,1]\to[0,\infty)$，对每个 ω，$T(\omega,\cdot)$ 关于第二个变量 v 左连续且不减，且是 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 可测的，则称 T 为随机化 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 时，这里 $\mathscr{B}=\mathscr{B}[0,1]$ 表示[0，1]上 Borel 集全体。

定义 4.8 称 $\Omega\times[0,1]$ 上随机化时$(\mathscr{F})\times\mathscr{B}$ 时 T 为随机化$(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时，如果对每个 $t\in\mathscr{R}_+$，有

$$\{(\omega,v): T(\omega,v)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}$$

对每一个固定的 ω，我们引入下述 T 的 ω—分布。

定义 4.9 设 T 为随机化$(\mathscr{F})\times\mathscr{B}$ 时，称

$$A(\omega,[0,t])=\sup\{0\leqslant v\leqslant 1:T(\omega,v)\leqslant t\}=\lambda\{v:T(\omega,v)\leqslant t\} \tag{4.112}$$

为 T 的一个 ω—分布，其中 λ 表示[0,1]上的 Lebesgne 测度。

对任意的 $v\in[0,1]$，令

$$T_v(\omega)=T(\omega,v) \tag{4.113}$$

显然 T 是$(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 随机化停时等价于 T_v 是$(\mathscr{F}_t)$停时。

容易证明 T 的 ω—分布 $A(\omega,[0,t])$关于 t 是右连续的且增的，且

$$T(\omega,v)=\inf\{t:A(\omega,[0,t])\geqslant v\} \tag{4.114}$$

它与 $A(\omega,[0,t])$互相一一确定。

T 的 ω—分布 A 具有下面的性质：

i) 固定一个 ω，$A(\omega,\cdot)$是 $\overline{\mathscr{R}}$ 上的概率测度 (4.115)

ii) 固定 $t\in[0,\infty)$，则 $A(\omega,[0,t])$是 $\mathscr{F}_t$ 可测的 (4.116)

其中 i)是显然的，对于 ii)，我们可证明

引理 4.44 $A(\omega,[0,t])$是$(\mathscr{F}_t)$可测的等价于 T 是随机化$((\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时。

证明 设 T 为随机化$(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时，则对每个 $v\in[0,1]$，$t\geqslant 0$，$\{\omega,T_v(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$，因此对于[0,1]中有理数列$(r_n)$，若令

$$f_n(\omega)=\begin{cases}r_n, & T_{r_n}(\omega)\leqslant t;\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则 f_n 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的随机变量，由 $T(w,v)$关于 v 的左连续性，有

$$\begin{aligned}&\{\omega:A(\omega,[0,t])\leqslant s\}\\ &=\{\omega:\sup\{v:T(\omega,v)\leqslant t\}\leqslant s\}\\ &=\{\omega:\sup_n\{r_n:Tr_n(w)\leqslant t\}\leqslant s\}\\ &=\{\omega:\sup_n f_n(\omega)\leqslant s\}\in\mathscr{F}_t\end{aligned}$$

反之，若 $A(\omega,[0,t])$是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，对任意的 $\varepsilon>0$，设(r_n)为$[0,t+\varepsilon]$中全体有理数(列)，并设

$$g_n(\omega)=\begin{cases} r_n, & A(\omega,[0,r_n])\geqslant V; \\ t+1, & 否则 \end{cases}$$

于是 g_n 是 $\mathscr{F}_{r_n}\in\mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ 可测的，由 A 的右连续性

$$\begin{aligned} &\{\omega;T_v(\omega)\leqslant t\} \\ &=\{\omega;\inf\{s;A(\omega,[0,s])\geqslant v\}\leqslant t\} \\ &=\{\omega;\inf\{r_n;A(\omega,[0,r_n])\geqslant v\}\leqslant t\} \\ &=\{\omega;\inf_n g_n(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t \end{aligned}$$

从而 T 是 $(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 随机化停时。

记 Γ 为全体 $(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 随机化停时全体；Γ' 为全体满足(4.115)，(4.116)的 $A(\cdot,\cdot)$，$\overline{\mathscr{T}}$ 为全体 $(\mathscr{F}_t)$ 停时全体，则 $\overline{\mathscr{T}}\subseteq\Gamma$，$\Gamma$ 与是 Γ' 是一一对应的，对于任意的 $\sigma\in\overline{\mathscr{T}}$，与其相应的 ω—分布。

$$A(\omega,[0,t])=I_{[\omega;\sigma(\omega)\leqslant t]}$$

下面以 $C([0,\infty))$，$C_B([0,\infty))$ 分别表示定义在 $[0,\infty)$ 上连续函数，有界连续函数的全体。

引理 4.45 设 T 与 G 为两个 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 随机化时，相应的 ω 分布分别为 $A(\omega,\cdot)$，$B(\omega,\cdot)$，则下述命题是等价的

i) $T(\omega,\cdot)\leqslant G(\omega,\cdot)$; (4.117)

ii) $A(\omega,[0,\cdot])\geqslant B(\omega,[0,\cdot])$ (4.118)

iii) 对一切非增的 $f\in C_B([0,\infty))$，有

$$\int f(t)A(\omega,\mathrm{d}t)\geqslant\int f(t)B(\omega,\mathrm{d}t) \tag{4.119}$$

证明 i)⇔ii)是明显的。对于 $f\in C_B([0,\infty])$，$\int f(t)A(\omega,dt)$ 可以理解为广义的 $R-S$ 积分，因此容易证明 ii)⇒iii)。反之，如果存在某个 $t\in[0,\infty)$ 使得 $A(\omega,[0,t])<B(\omega,[0,t])$，则由 A，B 之右连续性，必存在区间 $[t,b]$，使得 $\forall\ s\in[t,b]$，$A(\omega,[0,s])<B(\omega,[0,s])$，令

$$f(s)=\begin{cases}1, & s\in[0,t);\\ \text{线性}, & s\in[t,b);\\ 0, & s\in[b,\infty)\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}&\int f(s)B(\omega,\mathrm{d}s)-\int f(s)A(\omega,\mathrm{d}s)\\ =&B(\omega,[0,t])-A(\omega,[0,t])\\ &+\int_t^b f(s)B(\omega,\mathrm{d}s)-\int_t^b f(s)A(\omega,\mathrm{d}s)\\ >&B(\omega,[0,t])-A(\omega,[0,t])\\ &+f(b)[(B(\omega,[0,b]-)-(A(\omega,[0,b]-)]\\ &-f(t)(B(\omega,[0,t])-A(\omega,[0,t])\\ >&0\end{aligned}$$

矛盾,引理得证。

引理 4.46 T 为$(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$随机化停时等价于对任意的 t 及每一个支撑含于$[0,t]$的有界连续函数 f, $\int f(s)A(\omega,ds)$是 $\mathscr{F}_t$ 可测的。

证明 必要性由 $R-s$ 积分的定义可得到,往证充分性。对任意的 $s>t$,令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant t\\ 1-n(x-t), & t<x<t+1/n\\ 0, & x\geqslant t+1/n\end{cases}$$

则 $f_n(x)$是有界连续函数,$0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$,$f_n\downarrow I_{[0,t]}(x)$,supp $f_n\subseteq[0,t+1/n)$,当 n 充分大时,supp$f_n\subseteq[0,s]$,于是由假设 $\int f_n(x)A(\omega,dx)$是 $\mathscr{F}_s$ 可测的,因此 $A(\omega,[0,t]$是 $\mathscr{F}_s$ 可测的,这对一切 $s>t$ 成立,故 $A(\omega,[0,t])$是 $\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$ 可测的。由引理 4.44,这表明 T 是$(\mathscr{F}t)\times\mathscr{B}$ 随机化停时。

T 的 ω—分布是针对每个 $\omega\in\Omega$ 而言的,将 T 看成是 ω 的函数的整体,我们引入下述分布映射的概念。下面记 $\mathscr{B}_B([0,\infty))$为

$[0,\infty)$上有界 *Borel* 可测函数的全体。

定义 4.10 设 T 为随机化是 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 时

$$\alpha: L^1(\Omega)\times\mathscr{B}_B([0,\infty))\to\mathscr{R}^1$$

由下式定义：$\forall\ Y\in L^1(\Omega), f\in\mathscr{B}_B([0,\infty))$，令

$$\alpha(Y,f)\triangleq \mathbf{E}Yf(T)=\int_\Omega\int_{[0,1]}Y(\omega)f(T(\omega,v))\mathrm{d}v\mathrm{d}P$$

并称 α 为 T 的分布映射，这里用黑体的 $\mathbf{E}$ 表示对 $\mathrm{d}v\times\mathrm{d}P$ 的数学期望。显然

$$\alpha(Y,f)=\int_\Omega Y(w)\int_0^\infty f(t)A(w,dt)d\mathrm{P} \qquad (4.120)$$

如果将 α 限制在 $L^1(\Omega)\times C_B([0,\infty))$上，则可知

i) α 是 $L^1(\Omega)\times C_B([0,\infty))$上双线性泛函； (4.121)

ii) 如 $Y\geqslant 0$，f 非负，则

$$\alpha(Y,f)\geqslant 0,\quad \alpha(1,1)=1, |\alpha(Y,f)|\leqslant\|Y\|_1\cdot\|f\|_\infty$$

其中

$$\|Y\|_1=\int|Y(\omega)|\mathrm{d}p,\ \|f\|_\infty=\sup_t|f(t)| \qquad (4.122)$$

iii) 如 $T\in\Gamma$，且 $\mathrm{supp}(f)\subseteqq[0,t]$，则

$$\alpha(Y,f)=\alpha(E(Y|\mathscr{F}_t),f) \qquad (4.123)$$

只需证(4.123)。则引理 4.46，$\int_0^\infty f(s)A(\omega,\mathrm{d}s)$是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，因此 $\alpha(E(Y|\mathscr{F}_t),f)=\int E(Y|\mathscr{F}_t)\int_0^\infty f(s)A(\omega,ds)\mathrm{d}P=\int E(Y\cdot\int_0^\infty f(s)A(\omega,\mathrm{d}s)|\mathscr{F}_t)dP=\alpha(Y,f)$.

记 Λ 为全体满足(4.121)～(4.123)的分布映射，有

定理 4.47 对任何 $\alpha\in\Lambda$，存在 $T\in\Gamma$，使得 T 以 α 为其分布映射，且在 $P\times\lambda$ 的意义下，T 是唯一的。

证明 由(4.114)，只要证明$\forall\ \alpha\in\Lambda$，存在 $A(\omega,[0,\cdot])\in\Gamma'$ 与其相对应。

1° 首先$\forall\ Y\in L^1(\Omega)$，$0\leqslant Y\leqslant 1$，有

$$
\begin{aligned}
&1=\alpha(1,1)\\
&=\alpha(Y,1)+\alpha(1-Y,1)\\
&\leqslant \|Y\|_1+\|1-Y\|_1\\
&=EY+E(1-Y)\\
&=1
\end{aligned}
$$

因此

$$\alpha(Y,1)=EY \tag{4.126}$$

利用 α 的线性以及(4.123)，容易证明对一切非负的 $Y\in L^1(\Omega)$，(4.124)式成立。

2° 固定 $Y\in L^1(\Omega)$，$\alpha(Y,\cdot)$是 $C_B([0,\infty])$上有界线性泛函，由泛函表示定理，存在$[0,\infty)$上由有界变差函数诱导的广义测度 $\mu_\alpha(Y,dt)$，使得对一切，$f\in C_B([0,\infty])$，有

$$\alpha(Y,f)=\int f(t)\mu_\alpha(Y,\mathrm{d}t) \tag{4.127}$$

且易知若 $Y\geqslant 0$，则 μ_α 为测度，将 $\alpha(Y,\cdot)$延拓到有界可测函数类 $\mathscr{B}_B(0,\infty)$上，即对 $g\in\mathscr{B}_b([0,\infty])$，令

$$\hat{\alpha}(Y,g)=\int g(t)\mu_\alpha(Y,dt) \tag{4.128}$$

易知 $\hat{\alpha}(Y,\cdot)$满足(4.121)，(4.122)，(4.123)。事实上，我们总可用 $f_n\in C_B([0,\infty))$依 $L^1([0,\infty),\mu_\alpha(Y,\cdot))$逼近 $g\in\mathscr{B}_B$，使$|f_n|\leqslant|g|\leqslant M$，且当 supp$\subset[0,t]$时，还可要求 supp $f_n\subset[0,t+\frac{1}{n}]$，此外还可要求上述$(f_n)$对有限的 $Z\in L^1(\Omega)$，满足 $\int|f_n-g|\mu_\alpha(Z,dt)\to 0$ 这样容易验证(4.121)，(4.122)式。至于(4.123)式，由

$$
\begin{aligned}
&\hat{\alpha}(Y,g)\\
&=\lim_{n\to\infty}\alpha(Y,f_n)\\
&=\lim_{n\to\infty}\alpha(E(Y\mid\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}),f_n)\triangleq\lim_{n\to\infty}\alpha(Y_n,f_n)
\end{aligned}
$$

其中

$$Y_n \triangleq E(Y|\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}) \xrightarrow{L_1(\Omega)} Y_\infty \triangleq E(Y|\mathscr{F}_t)$$

于是

$$\begin{aligned}
&|\alpha(Y_n,f_n)-\hat{\alpha}(Y_\infty,g)| \\
&\leqslant |\alpha(Y_\infty,f_n)-\alpha(Y_\infty,f_n)|+|\alpha(Y_\infty,f_n)-\hat{\alpha}(Y_\infty,g)| \\
&\leqslant M\|Y_n-Y_\infty\|+\int|f_n-g|\mu_a(Y_\infty,\mathrm{d}t)\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}$$

所以

$$\alpha(Y,g)=\hat{\alpha}(E(Y|\mathscr{F}_t),g)$$

3° 由 2°，对一切 $Y\in L^1(\Omega)$ 及 $g\in\mathscr{B}_b([0,\infty])$，$\hat{\alpha}(Y,g)$ 都有定义且满足(4.121)～(4.123)，因此对固定的有理数 t 及∞，$\hat{\alpha}(\cdot,I_{[0,t]})$是 $L^1(\Omega)$上有界线性泛函，由表示定理，存在 $C_t\in L^\infty(\Omega)$，使得

$$\hat{\alpha}(Y,I_{[0,t]})=EYC_t,\forall\ Y\in L^1(\Omega) \qquad (4.127)$$

由(4.121)、(4.122)式知当 $s<t$ 时，$C_s\leqslant C_t$，$C_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}C_t=1$。

可以假定 C_t 是适应的，否则取 C_t 的适应修正 $E(C_t|\mathscr{F}_t)$，这是因为若记

$$H=\{\omega:C_t-E(C_t|\mathscr{F}_t)>0\}$$

令 $Y=I_H$，则

$$EI_HC_t=EI_H(E(C_t|\mathscr{F}_t))$$

可见 $P(H)=0$，于是存在一个定义在 $\Omega\times(\{$有理数$\}\cup\{\infty\})$上的适应过程 C_t，使得(4.127)式成立。

4° 取 $A(\omega,[0,t])=\inf\{C_r(\omega):r>t,r$ 为有理数$\}$，则 $A(\omega,[0,t])$关于 t 不减且是$\bigcap\limits_{r>t}\mathscr{F}_r=\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t$ 可测，右连续，$A(\omega,[0,0])=0$，$A(\omega,[0,\infty])\equiv 1$，令

$$T(\omega,v)=\inf\{t:A(\omega,[0,t])\geqslant v\}$$

则 T 为$(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时。

5° 设 α' 为 T 的分布映射，$\forall\ t\in\mathscr{R}^1$，有

$$\alpha(Y,I_{[0,t]})$$

$$=\inf_{r>t}\hat{\alpha}(Y,I_{[0,r]})$$

$$=\inf_{r>t}EYC_r$$

$$=EY\inf_{r>t}C_r$$

$$=\int_\Omega YA(\omega,[0,t])\mathrm{d}P$$

$$=\int_\Omega Y(\omega)\int_{[0,t]}A(\omega,dt)\mathrm{d}P$$

$$=\alpha'(Y,I_{[0,t]})$$

类似地可推得，$\forall\ Y\in L^1(\Omega),I_{[a,b]}$

$$\alpha(Y,I_{[a,b]})=\alpha'(Y,I_{[a,b]})\tag{4.128}$$

由于阶梯函数族按 $\|\cdot\|_\infty$ 在 $C_b([0,\infty])$ 中稠密，可知 $\alpha=\alpha'$，于是 α 是 T 的分布映射。

6° 最后证明唯一性，设 T 与 U 均以 α 为其分布映射，它们的 ω 分布分别记为 A,B，则对 $Y\in L^1(\Omega)$，f 为非增的有界连续函数，由

$$\alpha_T(Y,f)=\alpha(Y,f)=\alpha_U(Y,f)$$

即

$$\int_\Omega Y(\omega)\int f(t)A(\omega,\mathrm{d}t)dP=\int_\Omega Y(\omega)\int f(t)B(\omega,dt))\mathrm{d}P$$

可知

$$\int f(t)A(w,dt)=\int f(t)B(\omega,dt)\quad P-a.s.$$

从而由引理 4.45，$T(\omega,\cdot)=U(\omega,\cdot)\quad P-a.s.$ 证毕。

本定理建立了 Γ 与 Λ 之间的一一对应，同样的讨论也适用于 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 随机化时，此时(4.123)中取 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}$，且对 $f\in C_b([0,\infty))$ 的支撑不作限制。

现在引入本节中最重要的概念。

定义 4.11 称 $T(\mathscr{G})$ 为 Γ 上的 $B-C$ 拓扑是指它使得对任何 $Y\in L^1(\Omega,\mathscr{G},P)$，$f\in C_b([0,\infty])$，$T\in\Gamma$，映射

$$Y\to EYf(T)\triangleq\int_{\Omega\times[0,1]}Y(\omega)f(T(\omega,\lambda))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}P$$

为连续的拓扑，这里 $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ 为子代数。特别记 $\gamma(\mathscr{F})$ 为 γ. 也就是说，对任何网 $(T_n)\subset\Gamma$，$T_n\xrightarrow{\gamma}T\in\Gamma\Leftrightarrow EYf(T_n)\longrightarrow EYf(T_n)\Leftrightarrow\alpha_n(Y,f)\to\alpha(Y,f)$，其中 α_n,α 分别为 T_n,T 的分布映射。

在映射 $\mathscr{L}:\Gamma\to\Lambda$ 下(定理 4.47)，Λ 上相应的拓扑记为 $\mathscr{C}$，则 $\gamma=\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{C})$，$\mathscr{C}$ 也称为 BC 拓扑。

定理 4.48 (Γ,γ)是紧拓扑空间。

证明 我们只需证$(\Lambda,\mathscr{C})$为紧空间，对每一 $\alpha\in\Lambda$，$Y\in L^1(\mathscr{F})$，$f\in C_B([0,\infty])$，令 $\psi(Y,f)(\alpha)=\alpha(Y,f)$，则 $\mathscr{C}$ 就是由$\{\psi(Y,f):Y\in L^1(\mathscr{F}),f\in C_B([0,\infty])\}$诱导的拓扑。对固定的 $f\in C_B([0,\infty])$，$\psi(Y,f)(\alpha)=\alpha(Y,f)$是 $L^1(\mathscr{F})$上有界线性泛函。记 $\Lambda_f=\{\alpha(\cdot,f):\alpha\in\Lambda\}$，则 $\Lambda=\prod\Lambda_f$，$\mathscr{C}=\prod\mathscr{C}_f$，其中 $\mathscr{C}_f$ 为$\{\psi(Y,f):Y\in L^1(\mathscr{F})\}$所诱导的拓扑，因为$|\alpha(Y,f)|\leqslant\|Y\|_{L^1}\|f\|_\infty$，可见 Λ_f 是$(L^1(\mathscr{F}))_b'$(强对偶空间)中的有界闭子集(闭性也容易证得)，而线性赋范空间 $L^1(\mathscr{F})$的强对偶空间中有界闭球是弱 * 紧的，$\mathscr{C}_f$ 正是弱 * 拓扑，因此 $\mathscr{C}_f$ 是紧拓扑，再由 Tychokoff 定理，乘拓拓扑 $\mathscr{C}$ 是紧的，而 $\gamma=\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{C})$，且$\mathscr{L}$是映上的，所以$(\Gamma,\gamma)$是紧的。

由于 Γ 与 Γ^γ 是一一对应的，$B-C$ 拓扑也可以看成是赋予空间 Γ^γ 的，容易证明 Γ^γ 是紧的凸集，事实上，$\forall A_1,A_2\in\Gamma^\gamma$，$0<\alpha<1$，则容易验证，$\alpha A_1+(1-\alpha)A_2$ 仍然满足(4.115)，(4.116)式，所以 Γ^γ 是凸集，在 $B-C$ 拓扑下它便是紧凸集。

引理 4.49 Γ^γ 的端点就是非随机停时所对应的 ω—分布。

证明 $A_0\in\Gamma^\gamma$ 为端点 $\Leftrightarrow\forall$ 非零的 $A^*\in\Gamma$，A^*+A_0，A_0-A^*不全都属于 Γ^γ ([51])，为此只要证明对于非随机化停时 T_0 所对应的

$$A_0(\omega,[0,t])=I_{[T_0\leqslant t]}(\omega)$$

及非零的 $A^*\in\Gamma^\gamma$，A^*+A_0，A_0-A^* 不全属于 Γ^γ，事实上，若 $A_0+A^*\in\Gamma^\gamma$，则对任意满足 $T_0(\omega)\leqslant t$ 的 ω 与 t，$A^*(\omega,[0,t])\leqslant0$ 而 A^*

非零元，从而必有 t，使 $A^*(\omega,[0,t])<0$，于是 $A_0(\omega,[0,t])-A^*(\omega,[0,t])>1$，于是 $A_0-A^*\notin I^r$。

将随机化停时 T 看成是$(\Omega\times[0,1],\mathscr{F}\times\mathscr{B})$到$([0,\infty]),\mathscr{B}([0,\infty])$上的可测映射，我们自然有

定义 4.12 称随机化停时列 T_n 在 $\mathscr{G}$($\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ 为子 σ—代数)上弱收敛于 T，并记为 $T_n\Rightarrow T(\mathscr{G})$，是指$\forall\ G\in\mathscr{G}$

$$(P\times\lambda)T_n^{-1}|_{G\times[0,1]}\text{弱收敛于}(P\times\lambda)T^{-1}|_{G\times[0,1]}$$

上述$(P\times\lambda)T_n^{-1}|_{G\times[0,1]}$表示诱导测度$(P\times\lambda)T^{-1}$在 $G\times[0,1]$上的限制，上述弱收敛即$\forall\ B\in\mathscr{B}([0,\infty])$

$$P\times\lambda((T_n\in B)\cap G\times[0,1])\to P\times\lambda((T\in B)\cap G\times[0,1])$$

由测度弱收敛的理论，它等价于$\forall\ f\in C_B([0,\infty])$

$$\int_{G\times[0,1]}f(T_n)d(P\times\lambda)\to\int_{G\times[0,1]}f(T)d(P\times\lambda)\ (n\to\infty)$$

再由 BC 拓扑收敛的定义，可见

$$T_n\Rightarrow T(\mathscr{G})\Leftrightarrow T_n\xrightarrow{\ y(\mathscr{G})\ }T$$

引理 4.50 设 T,U 为两个 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 时，分布映射为 α,β，则$\forall\ Y\in L^1(\Omega,\mathscr{G},P)$，$f\in C_B([0,\infty])$

$$\alpha(Y,f)=\beta(Y,f)\tag{4.129}$$

等价于对任何 $f\in C_B([0,\infty))$，$\forall\ G\in\mathscr{G}$

$$\int_{G\times[0,1]}f(T)\mathrm{d}(P\times\lambda)=\int_{G\times[0,1]}f(U)\mathrm{d}(P\times\lambda)\tag{4.130}$$

证明 取 $Y=I_G$，则由(4.129)可得(4.130)；反之，由(4.130)可知

$$\int_0^\infty f(t)A(\omega,\mathrm{d}t)=\int_0^\infty f(t)B(\omega,\mathrm{d}t)\qquad p-a.s.\ \omega$$

这里 A,B 分别为 T,U 的 ω 分布，由引理 4.45

$$T(\omega,\cdot)=U(\omega,\cdot)\quad P-a.s.\ \omega$$

所以

$$T(\omega,v)=U(\omega,v) \quad P\times\lambda \quad a.s$$

于是

$$\alpha(Y,f)=\beta(Y,f), \quad \forall\, Y\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathscr{G},P)\text{及 } f\in(C_B([0,\infty]))$$

引理 4.51 设 T 是 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 时，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ 则按 $\mathrm{mad}(P\times\lambda)$ 唯一地存在一个 $\mathscr{G}\times\mathscr{B}$ 时 U，使得 $\forall\, G\in\mathscr{G}$

$$\int_{G\times[0,1]} f(T)\mathrm{d}(P\times\lambda)=\int_{G\times[0,1]} f(U)\mathrm{d}(P\times\lambda) \quad (4.131)$$

对一切 $f\in C_B([0,\infty))$ 成立，如果 $\forall\, t\in\mathscr{R}_+$，还有

$$E(E(\cdot\,|\mathscr{G})\,|\mathscr{F}_t)=E(\cdot\,|\mathscr{G}\cap\mathscr{F}_t) \qquad (4.132)$$

则当 T 是 $(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时，U 可选为 $(\mathscr{F}_t\cap\mathscr{G})\times\mathscr{B}$ 停时。

证明 设 α 为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}$ 时 T 的分布映射，记 β 为 α 在 $L^1(\Omega,\mathscr{G},P)\times C_B([0,\infty])$ 上的限制，易证 β 满足(4.121)—(4.123)，在(4.123)中取 $\mathscr{F}_t\equiv\mathscr{G}$，$\beta$ 所唯一对应的 $\mathscr{G}\times\mathscr{B}$ 时即为所求。特别当 T 为 $(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时，则在(4.132)下，为证 U 可选为 $(\mathscr{F}_t)\times\mathscr{B}$ 停时，只须证明：$\forall\, f\in C_B([0,\infty))$，若 $\mathrm{supp}(f)\subsetneqq[0,t]$，有

$$\beta(Y,f)=\alpha(E(Y|\mathscr{G}\cap\mathscr{F}_t),f)$$

事实上，因 α 满足(4.123)式，Y 为可测，故

$$\begin{aligned}
&\beta(Y,f)\\
&=\alpha(Y,f)\\
&=\alpha(E(Y|\mathscr{F}_t,f)\\
&=\alpha(E[E(Y|\mathscr{G})|\mathscr{F}_t],f)\\
&=\alpha(E(Y|\mathscr{F}_t\cap\mathscr{G}),f)
\end{aligned}$$

证毕

定义 4.13 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 为一概率空间，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ 为一子 σ 代数，X 为 E 值随机过程，E 是一个度量空间。记 $\Gamma_1\equiv\gamma_1(\mathscr{G},X)$ 为由全体映射族：

$$\Phi_1=\{\varphi(Y,f,h)\,|\,\varphi(Y,f,h):\Gamma\to\mathscr{R}\}$$

所生成的拓扑，其中 $f\in C_B([0,\infty])$，$h\in C_B(E)$，这里 $C_B(E)$ 表示 E 上有界连续函数全体，而 $\forall\, T\in\Gamma$

$$\varphi(Y,f,h)(T)=EYf(T)h(X(T))$$

也就是说，$\forall$ Γ 中的随机化停时网 $T_a \to T$（拓扑 τ_1 下）当且仅当，$\forall$ $h \in \Phi_1$

$$EYf(T_a)h(X(T_a)) \to EYf(T)h(X(T))$$

显然

$$\tau(\mathscr{G}) \subseteq \gamma_1(\mathscr{G}, X)$$

定理 4.52　设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$，$0 \leqslant t \leqslant \infty$；$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$，$X$ 如定义 4.14，$\forall$ $t \in \mathscr{R}_+$，X_t 是 $\mathscr{G}$ 可测的，且 $X_0(\omega)$对几乎所有 ω 的右连续，$D \subseteq \Gamma((\mathscr{F}_t))$，$\forall$ $\varphi \in \Phi_1$，$\varphi(T[j]) \to \varphi(T)$，$j \to \infty$ 且$\forall$ $T \in D$ 一致，那么 D 在 $\tau(\mathscr{G})$下有限(modp)的极限点必是 $\tau_1(\mathscr{G}, X)$下的极限点，其中

$$T[j] = \inf\{\frac{k}{2^j} : \frac{k}{2^j} \geqslant T\} \tag{4.133}$$

证明　见[47]之定理 1.8。

§4.8　B 值过程最优停时的存在性

现在利用 BC 拓扑来研究最优停止问题。

假设 Banach 空间值的随机过程 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0, \infty]\}$，$\|\cdot\|$ 表示 Bannch 空间中的范数，假定

$$E(\sup_t \|X_t\|) < \infty \tag{4.134}$$

$$X_t \text{ 是右连续的} \tag{4.135}$$

$$\forall\ \sigma_n \in \overline{\mathscr{T}}, \sigma_n \uparrow \sigma, \text{则 } X_{\sigma_n} \to X_\sigma \quad a.s. \tag{4.136}$$

这里右连续及 $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$，自然是指 $\|X_{\sigma_n} - X_\sigma\| \to 0$。

对于实值过程(X_t)，条件(4.136)等价于拟左连续性及 $X_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} X_t$　$a.s.$

下面的定理将在随机化停时停止的数学期望与停止在非随机化停时的数学期望联系起来。

定理 4.53　设 $T \in \Gamma$，X 是 Banach 空间值的适应过程，满足

(4.134),(4.135)式,则

$$EX_T=\int_0^1 EX_{T(\cdot,\nu)}\mathrm{d}\nu \tag{4.137}$$

证明 注意到对固定的 $\nu\in[0,1]$,$T(\cdot,\nu)$ 是一个非随机化停时,记 T 的分布为 $A(\omega,K)$,$K\in\mathscr{B}(\overline{\mathscr{R}}_+)$,则

$$A(\omega,K)=\lambda\{\nu:T(\omega,\nu)\in K\}$$

对固定的 ν,非随机化停时 $T(\cdot,\nu)$ 的 ω 分布

$$A_{T(\cdot,\nu)}(\omega,K)=I_{\{\omega:T(\cdot,\nu)\in K\}}$$

于是

$$\int_0^1 A_{T(\cdot,\nu)}(\omega,K)\mathrm{d}\nu=\lambda\{\nu:T(\omega,\nu)\in K\}=A(\omega,K)$$

对每个 $j\geqslant 1$,令

$$T[j]=k/2^j,\quad (k-1)/2^j<T(\omega,\nu)\leqslant k/2^j$$

则

$$\begin{aligned}
EX_{T[j]}=&\int X_{\frac{1}{2^j}}(\omega)A(\omega,[0,\frac{1}{2^j}])P(\mathrm{d}\omega)\\
&+\int\sum_{k\geqslant 2}X_{\frac{k}{2^j}}(\omega)A(\omega,(\frac{k-1}{2^j},\frac{k}{2^j}])P(\mathrm{d}\omega)\\
=&\int X_{\frac{1}{2^j}}(\omega)\lambda(\nu:T(\omega,\nu)\leqslant\frac{1}{2^j})P(\mathrm{d}\omega)\\
&+\int\sum_{k\geqslant 2}X_{\frac{k}{2^j}}(\omega)\lambda(\nu:\frac{k-1}{2^j}<T(\omega,\nu)\leqslant\frac{k}{2^j})P(\mathrm{d}\omega)\\
=&\int_0^1 EX_{T(\cdot,\nu)[j]}\mathrm{d}\nu
\end{aligned} \tag{4.138}$$

令 $j\to\infty$,由(4.134)及(4.135),得

$$EX_T=\lim_{j\to\infty}EX_{T[j]}=\int_0^1 EX_{T(\cdot,\nu)}\mathrm{d}\nu$$

下面的定理表明随机化停时的引入并不会改变最优停止问题的值。

定理 4.54 设 B 是 Banach 空间,$G:B\to\mathscr{R}$ 是连续的凸函数,(X_t) 是 B 值适应过程,满足(4.134),(4.135),则

$$V_G\triangleq\sup_{\sigma\in\mathscr{T}}G(EX_\sigma)=\sup_{T\in\Gamma}G(EX_T) \tag{4.139}$$

而且如果两个上确界有一个达到并且有限，则另一个也可达到且有限。

如果存在 $T_0\in\Gamma, T_0<\infty\quad dP\times d\lambda\ a.s$，使 $G(EX_{T_0})=V_G$，则必存在 $\sigma_0\in\overline{\mathscr{T}}, \sigma_0<\infty\quad a.s.$，使

$$G(EX_{\sigma_0})=V_G \tag{4.140}$$

证明 若 $V_G=\infty$，则(4.139)不证自明，不妨设 $V_G<\infty$，如果 $\forall\ T\in\Gamma, G(EX_T)\leqslant V_G$，则(4.139)式也自然得证，因此，我们可以假定存在 $T_0\in\Gamma$，使 $G(EX_{T_0})>V_G$，注意到 $T_0(\cdot,U)\in\overline{\mathscr{T}}$，由 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}V_G &<G(EX_{T_0})\\ &=G\left(\int_0^1 EX_{T_0}(\cdot,\nu)d\nu\right)\\ &\leqslant\int_0^1 G(EX_{T_0(\cdot,\nu)})d\nu\\ &\leqslant\int_0^1 V_G d\nu\\ &=V_G\end{aligned} \tag{4.141}$$

矛盾。因此(4.139)式成立，由(4.141)式，对几乎一切 ν，$G(EX_{T_0(\cdot,\nu)})=V_G$。

如果存在 $T_0\in\Gamma, T_0<\infty\quad dP\times d\lambda-a.s.$ 使 $G(EX_{T_0})=V_G$，则对几乎一切 ν，$P(\omega:T_0(\omega,\nu)<\infty)=1$，于是存在 ν，使 $T_0(\omega,\nu)<\infty$，$dP-a.s.$，且 $T_0(\omega,\nu)\in\overline{\mathscr{T}}$，$G(EX_{T_0(\cdot,\nu)})=V_G$，证毕。

关于 B 值随机过程最优停时的存在性，我们有如下的主要定理，它的证明依赖于一系列的引理。

定理 4.55 设 $(B,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$G:B\to R$ 为连续的凸函数，$\{X_t,t\in[0,\infty]\}$ 是 B 值的 $(\mathscr{F}_t)$ 适应过程，且满足(4.134)，(4.135)，(4.136)，则存在一个非随机化停时 $\sigma\in\overline{\mathscr{T}}$，使得

$$\begin{aligned}G(EX_\sigma)=V_G&=\sup\{G(EX_\tau);\tau\in\overline{\mathscr{T}}\}\\ &=\sup\{G(EX_T);T\in\Gamma\}<\infty\end{aligned} \tag{4.142}$$

为了证明下面的引理，引入下面的记号，设 $f\in C(B\times B)$（$B\times B$ 上有界连续函数全体，且 $f(x,x)=0,0\leqslant f\leqslant 1$，记

$$Y(t,s)=\sup\{f(X(t),X(r)|t\leqslant r\leqslant s\},t,s\in[0,\infty] \tag{4.143}$$

固定 $\varepsilon>0$，对每个形如 $\frac{k}{2^n}$ 的数 t，及整数 $m>0$，令

$$H(t,m)=\{\omega: E(Y(t,t+\frac{1}{m})|\mathscr{F}_t)>\varepsilon\} \tag{4.144}$$

显然

$$H(t,m+1)\subseteq H(t,m) \tag{4.145}$$

$\forall\ \omega\in\Omega,n,m$ 为正整数，令

$$R(n,m)(\omega)=\inf\{\frac{k}{2^n};\omega\in H(\frac{k}{2^n},m)\}$$

如果上述$\{\cdots\}$为空集，则定义

$$R(n,m)(\omega)=+\infty \tag{4.146}$$

显然 $R(n,m)$ 是$(\mathscr{F}_t)$停时，且

$$R(n+1,m)\leqslant R(n,m),R(n,m+1)\geqslant R(n,m) \tag{4.147}$$

令

$$R(m)=\lim_{n\to\infty}R(n,m) \tag{4.148}$$

$$R=\lim_{m\to\infty}R(m) \tag{4.149}$$

引理 4.56 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,0\in t\leqslant\infty\}$ 为 B 值的右连左极过程，η 是$(\mathscr{F}_t)$停时，使得$\forall$ $(\mathscr{F}_t)$停时列 $S_n\uparrow S$，有

$$X(S_n)\xrightarrow{s}X(S)\qquad S\leqslant\eta\quad a.s. \tag{4.150}$$

则

$$P(R\leqslant\eta)=0 \tag{4.151}$$

这里，$X(S_n)\xrightarrow{s}X(S)$表示强收敛，即 $\|X(S_n)-X(S)\|\to 0$.

证明 由 X 之右连续性及 $f\in C(E\times E)$，易证

$$E(Y(R(n,m),R(n,m)+\frac{1}{m})|\mathscr{F}_{R(n,m)})>\varepsilon\quad(R(n,m)<\infty)$$

于是对任意的$(\mathscr{F}_t)$停时ξ

$$\int_{[R(n,m)<\xi]} Y(R(n,m),R(n,m)+\frac{1}{m}) \geqslant \varepsilon P(R(n,m)<\xi)$$

由X的右连续性及$f\in C(E\times E)$

$$Y(R(n,m),R(n,m)+\frac{1}{m}) \to Y(R(m),R(m)+\frac{1}{m}) \quad (n\to\infty)$$

因此

$$\int_{[R(m)<\xi]} Y(R(m),R(m)+\frac{1}{m}) \geqslant \varepsilon P(R(m)<\xi)$$

令$\xi\to\eta$,则

$$\int_{[R(m)\leqslant\eta]} Y(R(m),R(m)+\frac{1}{m}) \geqslant \varepsilon P(R(m)\leqslant\eta) \tag{4.152}$$

令

$$S(m)=\begin{cases} \inf\{r: R(m)\leqslant r\leqslant R(m)+\frac{1}{m} \text{ 且 } f(X(R(m)),X(r))>\frac{\varepsilon}{2}\} \\ R(m)+\frac{1}{m}, \text{如上述集合为空} \end{cases} \tag{4.153}$$

显然,$S(m)$也是$(\mathscr{F}_t)$停时,由X之右连续性,如果$Y(R(m),R(m)+\frac{1}{m})>\frac{\varepsilon}{2}$,则

$$f(X(R(m)),X(S(m)))\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

由(4.152)式及$0\leqslant f\leqslant 1$

$$P(Y(R(m),R(m)+\frac{1}{m})>\frac{\varepsilon}{2}R(m)\leqslant\eta)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}P(R(m))\leqslant\eta)$$

在$[R\leqslant\eta]$上,$R(m)\uparrow R\leqslant\eta$,$S(m)\uparrow R\leqslant\eta$,于是

$$f(X(R(m)),X(S(m))\to 0 \ (m\to\infty)$$

从而

$$P(R\leqslant\eta)=0$$

引理 4.57 对任何$\mathscr{F}_t$停时U及$\varepsilon>0$

$$E(Y(U,U+\frac{1}{m}))\leqslant P(R(m)\leqslant U)+\varepsilon \qquad (4.154)$$

证明 令 $U[j]=\inf\{\frac{k}{2^j}:\frac{k}{2^j}\geqslant U\}$，对 $t=\frac{k}{2^j}$，令

$$Z[j]=Y(U[j],U[j]+\frac{1}{m})$$

于是

$$[U[j]=t]\cap\{E(Z[j]|\mathscr{F}_{U[j]})>\varepsilon\}$$
$$=[U[j]=t]\cap\{E(Y(t,t+\frac{1}{m})|\mathscr{F}_t)>\varepsilon\}$$

因此在$[U[j]=t]\cap\{E(Z[j]|\mathscr{F}_{U[j]})>\varepsilon\}$上，$R(j,m)\leqslant t$，所以

$$R(j,m)\leqslant U[j]$$
$$E(Y(U[j],U[j]+\frac{1}{m}))\leqslant P(R(j,m)\leqslant U[j])+\varepsilon$$

再由右连续性，得

$$E(Y(U[j],U[j]+\frac{1}{m}))\leqslant P(R(m)\leqslant U)-\varepsilon$$

(4.154)式获证。

引理 4.58 设 $\mathscr{F}$ 是可数生成的，即存在一列集合 $F_1,F_2,\cdots$，使得 $\mathscr{F}=\sigma(F_1,F_2\cdots)$，则相应的 $B-C$ 拓扑空间(Γ,Υ)是列紧的，也即对任何随机化停时列$(T_n)\subset\Gamma$，存在子列 T_{n_k}依 BC 拓扑收敛于 $T\in\Gamma$

证明 众知，如果 Γ 是可度量化空间，则由(Γ,Υ)的紧性可推得(Γ,Υ)是列紧的，由 Vrysohn 定理，只要证 Γ 是具可数基的正则的 T_1 空间，由于是 $\mathscr{F}$ 可数生成的，易知 Υ 具有可数基。往证$\forall\ T\in\Gamma$，$\{T\}$是闭的，如果 $T_n\equiv T\xrightarrow{\Upsilon}\sigma$，即 $EYf(T)=EYf(\sigma)$，则由定理 4.47，可见 $T=\sigma\quad a.s.$ 因此$\{T\}'\subseteq\{T\}$，即$\{T\}$是闭集。

往证(Γ,Υ)是正则的。设 $T\in\Gamma$，K 为 Υ 之闭集，$T\notin K$，K^c 为开集

$K^c=\bigcup\{\alpha^{-1}(Y,f)(U):Y\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P),f\in C_b([0,\infty]),U$ 为 R 上的开集$\}$

由 $T\in K^c$，必存在 $Y\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$f\in C_B([0,\infty])$及 R 上开集 U，使得 $T\in\alpha^{-1}(Y,f)(U^c)$，而 $K\subset\alpha^{-1}(f,Y)(U^c)$，令 $x=\alpha(Y,f)(T)$，则 $x\in U$，取 R 上开集 U_x 及 V，使得 $x\in U_X$，$U^c\subseteq U$，且 $V\cap U_x=\Phi$，那么 $\alpha^{-1}(Y,f)(U_x)$，$\alpha^{-1}(Y,f)(V)$均为开集，两者互不相交，且 $T\in\alpha^{-1}(Y,f)(U_x)$，$K\subseteq\alpha^{-1}(Y,f)(V)$，这表明$(I',\Upsilon)$是正则的，因此$(I',\Upsilon)$是列紧的。

引理 4.59　设$\{T_n\}$是取值于有限集 $K\subseteq[0,\infty]$的随机化停时列，$T_n\xrightarrow{\Upsilon}T\in I'$，$\{X_t,t\in K\}$为 Bochner 可积的 B 过程，则对每个 $A\in\mathscr{F}$

$$\boldsymbol{E}I_AX_{T_n}\xrightarrow{n}\boldsymbol{E}I_AX_T \tag{4.155}$$

证明　设 $X_t=\sum_{i=1}^{l_t}x_{ti}I_{F_{ti}}$，$x_{ti}\in B$，$F_{ti}\in\mathscr{F}_t$，$l_t<\infty$，$t\in K$ 则

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{E}I_AX_{T_n}-\boldsymbol{E}I_AX_T\|\\ \leqslant&\sum_{t\in K}\sum_{i=1}^{l_t}\|x_{ti}\|\,|P\times\lambda(A\cap F_{ti}\times[0,1]\cap[T_n=t]\\&-P\times\lambda(A\cap F_{ti}\times[0,1]\times[0,1]\cap[T=t])|\to0\quad(n\to\infty)\end{aligned} \tag{4.156}$$

当 $X_t,t\in K$ 是 Bochner 可积时，对$\forall\ \varepsilon>0$，每个 $t\in K$，存在有限值函数

$$Z_t=\sum_{i=1}^{l_t}Z_{ti}I_{G_{ti}}$$

使得 $E\|X_t-Zt\|<\varepsilon$，从而

$$\|\boldsymbol{E}I_AX_{T_n}-\boldsymbol{E}I_AX_T\|\leqslant2K\varepsilon+\|\boldsymbol{E}I_AZ_{T_n}-\boldsymbol{E}I_AZ_T\|$$

由(4.156)及 ε 之任意，可见

$$\|\boldsymbol{E}I_AX_{T_n}-\boldsymbol{E}I_AX_T\|\to0\quad(n\to\infty)$$

引理4.60　设 $T_n\xrightarrow{\Upsilon}T$，且

$$\limsup_{a\to\infty}\ \sup_n P\times\lambda(T_n\geqslant a)=0 \tag{4.157}$$

$\{X_t,t\in[0,\infty]\}$是 B 值适应过程，满足(4.134)，且$\forall\ A\in\mathscr{F}$，对 n

一致地有

$$EI_A X_{T_n[j]} \xrightarrow{n} EI_A X_{T_n} \quad (j \to \infty) \tag{4.158}$$

则有

$$EI_A X_{T_n} \xrightarrow{n} EI_A X_T \quad (n \to \infty)$$

证明 由不等式

$$\begin{aligned}
&\|EI_A X_{T_n} - EI_A X_T\| \\
&\leqslant \|EI_A X_{T_n} - EI_A X_{T_n[j]}\| + \|EI_A X_{T_n[j]} - EI_A X_{T_n[j]\wedge j}\| \\
&\quad + \|EI_A X_{T_n[j]\wedge j} - EI_A X_{T[j]\wedge j}\| + \|EI_A X_{T[j]\wedge j} - EI_A X_T\|
\end{aligned} \tag{4.159}$$

并注意到$\{T_n[j]>j\}\subseteq[T_n\geqslant j-1]$，$\{T[j]>j\}\subseteq\{T\geqslant j-1\}$由(4.158)知(4.159)之第一项趋于0，由(4.157)知第二，第四项趋于0，而由(4.155)知第三项趋于0。

什么条件可以保证(4.158)式成立呢？

引理4.61 设$\{X_t,t\in[0,\infty]\}$为满足(4.134)的B值适应过程，假定$\forall\ \varepsilon>0$，对非随机化停时列$\{\sigma_n\}$，若$\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_n P(\sigma_n>a)=0$，则

$$\lim_{j\to\infty}\sup_n P(\|X_{\sigma_n[j]}-X_{\sigma_n}\|>\varepsilon)=0 \tag{4.160}$$

且$T_n\xrightarrow{f}T$，(4.157)式成立，则对n一致地有

$$EI_A X_{T_n[j]} \xrightarrow{n} EI_A X_{T_n} \quad (j\to\infty)$$

证明 由(4.134)式不难看出，只须证明$\forall\ \varepsilon>0$

$$\lim_{a\to\infty}\sup_n P\times\lambda(\|X_{T_n[j]}-X_{T_n}\|>\varepsilon)=0 \tag{4.161}$$

如(4.161)式不成立，则存在$\varepsilon_0>0$，存在子列n_j，使得

$$P\times\lambda(\|X_{T_{n_j}}[j]\to X_{T_{n_j}}\|>\varepsilon)\geqslant\varepsilon_0 \tag{4.162}$$

由(4.157)式，即$\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_n P\times\lambda(T_n>a)=0$，则知

$$\lim_{a\to\infty}\sup_n P(T_n(\omega,v)>a)=0 \quad a.s.\ v. \tag{4.163}$$

事实上，若(4.163)不成立，那么存在$v<1$，$\varepsilon>0$，使得对任意A，存在$a>A$及n，使

$$P(T_n(\omega,v)>a)>\varepsilon$$

注意到 $T_n(\omega,v)$ 关于 v 是单调增的，于是对一切 $v'\geqslant v$，$P(T_n(\omega,v')>a)>\varepsilon$，从而

$$\lambda\times P(T_n(\omega,v)>a)\geqslant(1-v)\varepsilon$$

这与(4.157)矛盾，所以(4.163)式成立；于是由定理的假定(4.160)式，对 $a.s$ 所有的 v

$$\lim_{j\to\infty}\sup_n P(\|X_{T_n(\omega,v)[j]}-X_{T(\omega,v)[j]}\|>\varepsilon)=0$$

这导致与(4.162)式的矛盾，引理得证。

引理4.62 设 $\{X_t,t\in[0,\infty]\}$ 是 B 值适应过程，满足条件(4.134)—(4.136)，随机化停时列

$$T_n\xrightarrow{\ \ T\ \ }T\in\Gamma \tag{4.164}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_n P\times\lambda(T_n>a)=0 \tag{4.165}$$

则 $\forall\ A\in\mathscr{F}$

$$EI_AX_{T_n}\xrightarrow{n}EI_AX_T$$

证明 由引理4.60，只要证明(4.158)式，而由引理4.61，只须证明：$\forall\ \varepsilon>0$ 及非随机停时列 $(\sigma_n)\subset\mathscr{F}$，如果

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_n P(\sigma_n>\alpha)=0 \tag{4.166}$$

则(4.160)式成立。

在引理4.56中，令 $\eta=+\infty$

$$f(x,y)=\|x-y\|/(1+\|x-y\|)$$

$$Y(s,t)=\sup\{f(X_s,X_r);s\leqslant r\leqslant t\}$$

为证(4.160)，只须证明

$$\sup_n EY(\sigma_n,\sigma_n+\frac{1}{2^j})\to0(j\to\infty) \tag{4.167}$$

由引理4.57，$\forall\ \varepsilon>0$

$$\sup_n EY(\sigma_n,\sigma_n+\frac{1}{2^j})\leqslant\sup_n P(R(2^j)\leqslant\sigma_n)+\varepsilon$$

注意到，$\forall\ \alpha>0$

$$P(R(2^j))\leqslant\sigma_s)\leqslant P(\sigma_s\geqslant a)+P(R(2^j)<a)$$

由于 $R(2^j)\uparrow R$ 及(4.151),(4.166)式,可见

$$\limsup_{j\to\infty} P(R(2^j)\leqslant\sigma_s)=0$$

从而(4.167)得证。

引理4.63 设$\{X_t,t\in[0,\infty]\}$为 B 值适应过程,满足条件(4.134)~(4.136),随机化停时列 $T_n\xrightarrow{f}T$,则$\forall\ A\in\mathscr{F}$,$EI_AX_{T_n}\xrightarrow{s}EI_AX_T$.

证明 设 $h:[0,\infty]\to[0,1]$为连续的增函数,$\forall\ s\in[0,1]$,令$Z_s=X_{h^{-1}(s)},G_s=\mathscr{F}_{h^{-1}(s)}$,当 $s\geqslant1$之,令 $Z_s=X_\infty,G_s=\mathscr{F}_\infty$则$(Z_s)$仍是满足(4.134)~(4.136)之 B 值适应过程,因为 $h\circ T_n\leqslant1$,(4.165)式满足,从而由引理 4.62,$EI_AZ_{h\cdot T_n}\xrightarrow{s}EI_AZ_{h\cdot T}$,此即 $EI_AX_{T_n}\xrightarrow{s}EI_AX_T$.引理证毕。

最后来证明定理4.55。

由 V_G 之定义,存在一列$(T_n)\subset\Gamma$,使得

$$\lim_{n\to\infty}G(EX_{T_n})=V_G$$

因为我们所考虑的是右连续 B 值适应过程,所以不妨假定$\mathscr{F}$是可数生成的,于是(Γ,T)是列紧的,因此存在子列 T_{n_k},使得 $T_{n_k}\xrightarrow{f}T$,由引理4.63,$EX_{T_{n_k}}\xrightarrow{s}EX_T$,$T\in\Gamma$,再由 G 之连续性,$G(EX_T)=\lim_{k\to\infty}G(EX_{T_{n_k}})=V_G$,应用定理4.54,可知存在非随机化停时$\sigma\in\overline{\mathscr{F}}$,使 $G(EX_\sigma)=V_G$.证毕。

§4.9 离散时间 B—C 拓扑的注

本节的内容应该归属第二章,但为了简便我们以注解的形式,

把它作为§4.7，§4.8的特殊形式而列出。

设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_n,P)$，$n\in\overline{\mathscr{N}}$是一个完备的概率空间，$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}\subset\cdots\subset\mathscr{F}_\infty$，$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$，$(X_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{\mathscr{N}})$是适应可测的实值过程序列，这里$\overline{\mathscr{N}}=\{1,2,\cdots,\infty\}$。称$T:\Omega\times[0,1]\to\overline{\mathscr{N}}$为随机化$\mathscr{F}\times\mathscr{B}$时，如果它是$\mathscr{F}\times\mathscr{B}$可测的，并且约定$T(\omega,\cdot)$关于第二个变量是不减的，如果还有

$$\{(\omega,v):T(\omega,v)=n\}\in\mathscr{F}_n\times\mathscr{B}$$

则称T为$(\mathscr{F}_n)$停时，即随机化$(\mathscr{F}_n)$停时。

全体随机化$(\mathscr{F}_n)$停时记为Γ，全体$(\mathscr{F}_n)$停时记为$\overline{\mathscr{T}}$，对每个$T\in\Gamma$，称

$$A(\omega,K)\doteq\lambda\{\omega,T(\omega,v)\in K\}$$

为T的ω分布，其中$\omega\in\Omega,K\subseteq\overline{\mathscr{N}}$.

显然A具有如下性质

1) 对固定的$\omega\in\Omega,A(\omega,\cdot)$；是$\overline{\mathscr{N}}$上的概率测度；

2) 对固定的$n\in\mathscr{N},A(\omega,\{n\})$是$\mathscr{F}_n$可测的。

记Γ^v为全体满足上述性质1)，2)的函数$A(\omega,\cdot)$的全体，则Γ与Γ^v是一一对应的，对$A\in\Gamma^v$，相应的随机化停时。

$$T(\omega,v)=\inf\{n\in\overline{\mathscr{N}},A(\omega,\{1,2,\cdots n\})\geqslant v\}$$

非随机化停时σ，看成是特殊的随机化停时，它对应的ω分布为

$$A(\omega,\{n\})=I_{[\sigma(\omega)=n]}$$

在Γ^v上的$B-C$拓扑是指对所有的$n\in\mathscr{N}$及$Y\in L^1(\mathscr{F})$使映射$A\to\int Y(\omega)A(\omega,\{n\})P(d\omega)$为连续的拓扑，由于$\Gamma^v$与$\Gamma$的一一对应，加在$\Gamma$上的$BC$拓扑$\tau$的意义是

$$\forall\ T_k\xrightarrow{\tau}T\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}EY(I_{\{n\}}(T_k))=EYI_{\{n\}}(T)$$

对一切$n\in\mathscr{N}$及$Y\in L^1(\mathscr{F})$成立。这里$I_{\{n\}}\triangleq I_{T=n}$.

在最优停止问题中，我们总是考虑某一个报酬序列$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathscr{N}\}$，因此可以认为是可数生成的，如同引理4.58，BC拓扑空间

(T,Γ)是列紧的且有完全类似于引理4.49的结论。

对于适应实值序列$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathscr{N}\}$，可以证明：$\forall\ T\in\Gamma$

$$EX_T=\int_0^1 EX_{T(\cdot,\nu)}\mathrm{d}\nu \tag{4.167}$$

且

$$\sup_{T\in\Gamma}EX_T=\sup_{\sigma\in\mathscr{T}}EX_\sigma \tag{4.168}$$

上式中，如果有一方上确界可以达到，则另一方也可取到。

如果$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathscr{N}\}$是适应的 Bochner 可积的 B 值随机序列，$G:B\to R$ 为连续凸函数，则

$$\sup_{T\in\Gamma}G(EX_T)=\sup_{\sigma\in\mathscr{T}}G(EX_\sigma) \tag{4.169}$$

而且，如果上确界一方达到且有限，则另一方也可达到且有限，如果上确界被 $T_0\in\Gamma$ 达到，且 $T_0<\infty\ dp\times d\lambda-a.s$，则必有 $\sigma_0\in\overline{\mathscr{T}}$，$\sigma_0<\infty\quad P-a.s.$，使得 $G(EX_{\sigma_0})$取到上述的上确界。

下面讨论 B 值适应序列的最优停止问题。

引理4.64 设随机化停时列 $T_n\xrightarrow{\Gamma}T\in\Gamma$，则对每个 Bochner 可积的随机变量 Y 及 $f\in C_B(\overline{\mathscr{N}})$

$$EI_AYf(T_n)\to EI_AYf(T) \tag{4.170}$$

证明 固定 $f\in C_B(\overline{\mathscr{N}})$，首先假定 Y 是简单的 B 值函数，即 $Y=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}x_iI_{A_i}$；$x_i\in B,A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots,k$，则对每个 $\eta\in\Gamma$，有

$$EYf(\eta)=\sum_{1\leqslant i\leqslant k}x_iE(I_{A_i}f(\eta))$$

由 $T_n\xrightarrow{\Gamma}T$ 可知，对 $i=1,2,\cdots,k$，$EI_{A_i}f(T_n)\to EI_Af(T)$，因此(4.170)对 Y 为简单函数成立。

对于一般的 Bochner 可积的 Y，对固定的 $\varepsilon>0$，必存在简单函数 Z，使 $E\|Y-Z\|\leqslant\varepsilon$，那么对任意的 $T\in\Gamma$

$$\|EYf(T)-EZf(T)\|\leqslant\varepsilon\|f\|_\infty$$

对 Z 应用(4.170)式，于是可证对 Y 的(4.170)式成立，证毕。

引理4.65 设$\{X_n,n\in\overline{\mathscr{N}}\}$是 B 值 Bochner 可积的适应系列，

$X_n \xrightarrow{a.s.} X_\infty (n\to\infty)$，又 $T_n \xrightarrow{T} T\in\Gamma$，则$\forall\ A\in\mathscr{F}$，$X_{T_n}$依分布收敛到 X_T，如果还假定 $E\sup\limits_{n\in\mathscr{N}}\|X_n\|<\infty$，则$\forall\ A\in\mathscr{F}$

$$EI_AX_{T_n}\to EI_AX_T$$

证明 先证明定理的后一部分，即设 $E\sup\limits_{n\in\mathscr{N}}\|X_n\|<\infty$，固定某 $k>1$，$\forall\ A\in\mathscr{F}$ 及 $n\in\mathscr{N}$

$$\begin{aligned}&\|EI_AX_{T_n}-EI_AX_T\|\\ \leqslant&\|EI_{A\cap(T_n\leqslant k)}X_{T_n}-EI_{A\cap(T_n\leqslant k)}X_T\|+\|EI_{A\cap(T_n>k)}X_\infty-EI_{A\cap(T>k)}X_\infty\|\\ &+\|EI_{A\cap(k<T_n<\infty)}(X_{T_n}-X_\infty)\|+\|EI_{A\cap(k<T<\infty)}(X_T-X_\infty)\|\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|EI_AX_{T_n}-EI_AX_T\|\\ \leqslant&\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\|EI_Ax_iI_{\{i\}}(T_n)-EI_Ax_iI_{\{i\}}(T)\|\\ &+\|EI_AX_\infty I_{(k+1,\infty)}(T_n)-EI_AX_\infty I_{(k+1,\infty)}(T)\|\\ &+2EI_A\sup_{k\leqslant i\leqslant\infty}\|X_i-X_\infty\|\end{aligned}$$

因为 $X_n\xrightarrow{s}X_\infty$，以及 $E\sup\limits_{n\in\mathscr{N}}\|X_n\|<\infty$，最后一项随 $k\to\infty$而趋于0，第一、二项则可应用引理4.64而趋于0，因此本引理的第二部分告证。

往证第一部分，即证对每个 B 上的有界连续的实值函数 g，要证 $EI_Ag(X_{T_n})\to EI_Ag(X_T)(n\to\infty)$，为此令 $Z_n=g(X_n)$，$n\in\overline{\mathscr{N}}$，于是 $Z_n\to Z_\infty\ a.s$，且 $E\sup\limits_{n\in\mathscr{N}}|Z_n|<\infty$，由上所证，$\forall\ A\in\mathscr{F}$，$EI_Ag(X_{T_n})\to EI_Ag(X_T)(n\to\infty)$。证毕。

引理4.66 设$(B,\|\cdot\|)$为 Banach 空间，$G:B\to\mathscr{R}$ 为连续函数，$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{\mathscr{N}}_+\}$为 B 值适应序列，$E\sup\|X_n\|<\infty$，且 $X_n\xrightarrow{s}X_\infty$，则存在随机化的停时 T，使得

$$G(EX_T)=V_G=\sup\{G(EX_\eta):\eta\in\Gamma\}<\infty$$

证明 因为只需考虑可数个随机变量 X_n，不妨假定 $\mathscr{F}$ 是可数生成的，由 V_G 的定义，可选取一随机化停时序列 T_n，使 $\lim\limits_{n\to\infty}G$

$(EX_{T_n})=V_G$，由于$(\Gamma,\mathcal{T})$是列紧的，因此存在(T_n)的子列(T_{n_k})，及$T\in\Gamma$，使得$T_{n_k}\xrightarrow{\mathcal{T}}T$，由引理4.65，$EX_{T_{n_k}}\xrightarrow{s}EX_T$，再由$G$之连续性可知

$$G(EX_{T_{n_k}})\to G(EX_T)=V_G<\infty$$ 证毕

下面的定理给出非随机化最优停止的存在性。

定理4.67　设$(B,\|\cdot\|)$为Banach空间，$G:B\to\mathscr{R}$为凸的连续函数，$\{X_n,n\in\overline{\mathscr{N}}\}$为$B$值过程，且$E(\sup\|X_n\|)<\infty$，$X_n\xrightarrow{s}X_\infty(n\to\infty)$，则存在非随机化停时$\sigma\in\overline{\mathscr{T}}$，使得

$$\begin{aligned}G(EX_\sigma)&=V_G\\&=\sup\{G(EX_\tau);\tau\in\overline{\mathscr{T}}\}\\&=\sup\{G(EX_T);T\in\Gamma\}<\infty\end{aligned}$$

证明　由引理4.66及(4.169)而得。

第五章　马尔可夫过程的最优停止[2]

如同离散参数的情形，我们希望对一大类连续参数(时间)的马氏过程，其值函数 $V(x)$ 也具有过份性与正则性(比较定理 3.17, 3.21 与 3.26)，这个事实是正确的，但为了证明它，为了研究此时最优停时与 ε 最优停时的结论，我们将需要一般马氏过程与鞅论的更深刻的结论。

§5.1　预备知识与基本定义

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$(\mathscr{F}_t)$，$t\in R_+$ 是 $\mathscr{F}$ 的非降子 σ 代数族，$(E,\mathscr{B})$ 是一个状态空间，也即它是一个可测空间，且每一个单点集 $\{x\}\in\mathscr{B}$.

设 $(X_t,\mathscr{F}_t)$，$t\in Z$，$Z=N$ 或 $Z=[0,\infty]$，是取值于 $(E,\mathscr{B})$ 的随机过程，对于每一个 $x\in E$，P_x 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的概率测度。

定义 5.1　称 $X=(X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$，$t\in Z$，$x\in E$ 为一齐次的马氏过程，如果

1) $\forall A\in X_t$，$P_x(A)$ 是 x 的 $\mathscr{B}$ 可测函数；

2) $\forall x\in E$，$B\in\mathscr{B}$，$s,t\in Z$

$$P_x(X_{t+s}\in B|\mathscr{F}_t)=P_{x_t}(X_s\in B)\quad P_x-a.s.\quad (5.1)$$

3) $P_x(X_0=x)=1$，$x\in E$

4) $\forall t\in Z$ 及 $\omega\in\Omega$ 存在唯一的 $\omega'\in\Omega$，使得对一切 $s\in Z$

$$X_s(\omega') = X_{s+t}(\omega) \tag{5.2}$$

如果 $Z = \mathscr{N} = \{0,1,2\cdots\}$，则 $X = (X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$，$t \in \mathscr{N}$ 称为是离散时间马氏过程或马氏链，一般在本章中考虑 $Z = \mathscr{R}_+$ 或 $\mathscr{R}_+$ 中某一子集。

如记 $\mathscr{F}_t^* = \sigma(\omega, X_s, s \leqslant t)$，$t \in Z$，它被称为自然 σ 代数族，如 $X = (X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$，$t \in X$，$x \in E$ 是马氏过程，则 $X^* = (X_t,\mathscr{F}_t^*,P_x)$，$t \in Z$，$x \in E$ 亦是马氏过程。

定义 5.2 一个循序可测的马氏过程 $X = (x_t,\mathscr{F}_t,P_x)$，$t \in Z$，$x \in E$ 称为是强马氏过程，如果对任何停时 τ，定义 5.1 中 2) 式加强为

$$P_X(X_{\tau+s} \in B|\mathscr{F}_t) = P_{X_\tau}(X_s \in B) \qquad \tau < \infty \quad P_x - a.s. \tag{5.3}$$

众知马氏链总是有此强马氏性的。

定义 5.3 一个循序可测的马氏过程 $X = (X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$，$t \in Z$，称为是拟左连续的，如果对任何停时 σ，X_σ 是 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的，且对停时增列 $\tau_n \uparrow \tau$，有

$$X\tau_n \to X_\tau \qquad \tau < \infty \quad P_x - a.s. x \in E \tag{5.4}$$

记 $P(t,x,\Gamma) = P_x(X_t \in \Gamma)$，$x \in E$，$\Gamma \in \mathscr{B}$，$t \in Z$，称函数 $P(t,x,\Gamma)$ 为马氏过程 X 的转移函数，由定义 5.1 可见

1) $P(t,x,\cdot)$ 对一切 $x \in E$，$t \in Z$ 是 $(E,\mathscr{B})$ 上的测度；

2) $P(t,\cdot\,\Gamma)$ 对每个 $t \in Z$，$\Gamma \in \mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 可测函数；

3) (Kolmogorov — Chapman 方程)

$$P(t+s,x,\Gamma) = \int_E P(t,y,\Gamma)P(s,x,dy) \tag{5.5}$$

4) $P(0,x,p) = I_\Gamma(x)$

定义 5.4 称一个轨道右连续且拟左连续的强马氏过程为标准马氏过程，如果

1) $\forall\, t \in Z$，$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$；

2）状态空间$(E,\mathscr{B})$是半紧的，亦即E是一个局部紧的Hausdorff空间，且有可数基，这里$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{C})$，$\mathscr{C}$为拓扑空间$E$上的开集族。

设μ是$(E,\mathscr{B})$上任一概率测度，$\forall A\in\mathscr{F}$令$P^{\mu}(A)=\int_E P_x(A)\mu(dx)$，记$\mathscr{B}^{\mu}$为$\mathscr{B}$关于$\mu$的完备化，$\overline{B}=\bigcap_{\mu}B^{\mu}$，$\overline{\mathscr{F}}=\bigcap_{\mu}\mathscr{F}^{P_{\mu}}$，$\overline{\mathscr{F}}_t=\bigcap_{\mu}\mathscr{F}_t^{P_{\mu}}$，$\overline{P}_x$为$P_x$在$\overline{\mathscr{F}}$上的扩张。

由[43]定理3.12，如果$X=(X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$是标准的马氏过程，则$\overline{X}=(X_t,\overline{\mathscr{F}}_t,\overline{P}_X)$也是标准的马氏过程，因此我们今后总假定：

$$\mathscr{B}=\overline{\mathscr{B}},\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}},\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_t,P_x=\overline{P}_x \tag{5.6}$$

记$B(E,\mathscr{B})$为有界的$\mathscr{B}$可测函数$f=f(x)$的全体，$\forall f\in B(E,\mathscr{B})$，定义范数$\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|$，对每个$f\in B(E,\mathscr{B})$，定义算子。

$$T_tf(x)=\int_E f(y)P(t,x,dy) \tag{5.7}$$

它是$B(E,\mathscr{B})$到其自身的有界线性算子。

线性算子族$\{T_t,t\in Z\}$构成一个半群：

$$T_s\cdot T_t=T_{s+t},s,t\in Z$$

记$C(E,\mathscr{B})\subseteq B(E,\mathscr{B})$为有界的可测连续函数族，其中$(E,\mathscr{B})$满足定义5.4之2)。

定义5.5 算子半群$\{T_t,t\in T\}$称为是Feller半群（相应地，$P(t,x,\Gamma)$称为Feller函数，马氏过程X称为Feller过程），如果$\forall f\in C(E,\mathscr{B}),t\in Z,T_tf$仍是$x$的连续函数。

由定义5.1之4)，对每个$\omega\in\Omega,t\in Z$可定义推移算子θ_t使得

$$X_s(\theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega),s\in Z$$

对于随机变量$\eta=\eta(\omega)$，定义

$$\theta_t\eta=\eta(\theta_t\omega),t\in Z$$

设τ是随机变量，同样可定义$\theta_\tau\omega=\theta_{\tau(\omega)}\omega$，如果$\tau$取值于$\mathrm{Z}=$

$[0,\infty]$，则 θ_τ 仅在 $\Omega_\tau=\{\omega:\tau(\omega)<\infty\}$ 上有定义。

利用推移算子 θ_τ，我们可以重述强马氏性(5.3)为

如果 $\eta=\eta(\omega)$ 是一个可积且 $\mathscr{F}^X=\sigma(\omega:Xs,s<\infty)$ 可测的随机变量，则对任何停时 τ

$$E_x(\theta_\tau\eta|\mathscr{F}_\tau)=EX_\tau\eta \qquad \tau<\infty \quad P_x-a.s.,X\in E \tag{5.8}$$

由(5.8)式，如果 ξ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的随机变量，η 是 $\mathscr{F}^X$ 可测且 $E_x|\xi|<\infty, Ex|\xi\theta_\tau\eta|<\infty, x\in E$，则

$$E_x(\xi\theta_\tau\eta)=E_x(\xi E_{X_\tau}\eta) \tag{5.9}$$

容易看出(5.9)与(5.8)式是等价的。

定义 5.6 称 Borel 可测(即 $\mathscr{B}$ 可测)函数 $g(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，如果 $\forall\, x\in E$

$$P_x(\varliminf_{t\downarrow 0}g(X_t)\geqslant g(X_0))=1 \tag{5.10}$$

记 $\boldsymbol{B}=\{g:g$ 是 Borel 可测且 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，$-\infty<g(x)\leqslant+\infty$ 并使得 $\{g(X_t),t\geqslant0\}$ 为可分的过程$\}$。

在最优停止理论中，$g(x)$ 称为是报酬函数，并且一般地设过程的指标集 $Z=\mathscr{R}_+$，称 $V(x)=\sup\{E_xg(X_\tau);\tau\in\mathscr{F}$，且 $E_xg(X_\tau)$ 有意义$\}$为相应于报酬函数 g 的值函数，简称为值函数。当上述的 $\tau\in\overline{\mathscr{F}}$ 时，则可定义 $\overline{V}(x)$，容易证明

$$\overline{V}(x)=\sup_{\tau\in\overline{C}(g)}E_xg(X_\tau) \tag{5.11}$$

$$V(x)=\sup_{\tau\in C(g)}E_xg(X_\tau) \tag{5.12}$$

其中

$$C(g)=\{\tau\in\mathscr{F};\forall\, x\in E,E_xg(X_\tau)^-<\infty\}$$
$$\overline{C}(g)=\{\tau\in\overline{\mathscr{F}};\forall\, x\in E,E_xg(X_\tau)^-<\infty\}$$

记

$$L=\{g:g\in\boldsymbol{B}，且存在\ \tau\in\overline{C}(g)，使得\ P_x(\tau>0)=1,x\in E\}$$

当 $g\in L$ 时，关于它的最优停止问题是非平凡的，也即不至于只有一个 $\tau\equiv 0$ 属于 $\overline{C}(g)$.

$\boldsymbol{B}(A^-)=\{g\in\boldsymbol{B}$ 且满足 A^- 条件，即 $\forall\ x\in E, E_x(\sup\limits_{\tau\in\mathscr{R}_+} g^-(X_t))<\infty\}$

$\boldsymbol{B}(A^+)=\{g\in\boldsymbol{B}$ 且 A^+ 条件成立，即 $\forall\ x\in E, E_x(\sup\limits_{\tau\in\mathscr{R}_+} g^+(X_t))<\infty\}$

$\boldsymbol{B}(A^-,A^+)=\boldsymbol{B}(A^-)\cap\boldsymbol{B}(A^+)$

$\boldsymbol{L}(A^+)=\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{B}(A^+)$

$\boldsymbol{L}(A^-)=\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{B}(A^-)$

$\boldsymbol{L}(A^+,A^-)=\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{B}(A^+,A^-)$

显然

$$\boldsymbol{B}(A^-)=\boldsymbol{L}(A^-)\subseteq\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{B} \tag{5.13}$$

$\boldsymbol{B}(a^-)=\{g\in\boldsymbol{B}$ 且 a^- 条件成立，即 $\forall\ x\in E, E_xg^-(X_\infty)<\infty\}$

显然

$\boldsymbol{B}(A^-)\subseteq\boldsymbol{B}(a^-)\subseteq\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{K}\subseteq\boldsymbol{B}$

$K_0=\{g\in\boldsymbol{K}, g$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，即 $\forall\ x\in E, P_x(g(x)\geqslant\overline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}g(X_t)\geqslant\underline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}g(X_t)\geqslant g(X_t)\geqslant g(x))=1\}$

再一次指出，本章所讨论的马氏过程均是标准马氏过程。

注 1 这里 $\mathscr{C}_0$ 是指马氏过程状态空间的内在拓扑。设 $X=(X_t,\mathscr{F}_t,P_x), t\in T$ 是一个规则的马氏过程，也即在状态空间 $(E,\mathscr{B})$ 中存在转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$，使对任意的 $s\in T, t\in T, s<t$ 及 $\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P(X_t\in\Gamma|\mathscr{F}_s)=P(s,X_s;t,\Gamma)$$

$\mathscr{C}_0$ 是 E 的子集族，$G\in\mathscr{C}_0$ 是指：$\forall\ x\in G$，存在一个集 $\Gamma\in\mathscr{B}$，使得 $x\in\Gamma\subseteq G$，且 Γ 的首出时 $\tau\triangleq\inf\{t\in T: X_t\notin\Gamma\}$ 满足

$$\{\tau>0\}\in\mathscr{F}_0 \text{ 且 } Px(\tau>0)=1$$

容易验证 $\mathscr{C}_0$ 确是 E 上的一个拓扑。下面证明

引理 5.1 一个 Borel 可测函数 f 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的充要条件是：$\forall x, \lim\limits_{t\downarrow 0} f(X_t) = f(x) \quad P_x - a.s.$

证明 必要性。如果 f 是 $\mathscr{C}_0$ 连续，则 $\forall \varepsilon > 0, G \triangleq f^{-1}\{(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\} \in \mathscr{C}_0$. 于是由 $\mathscr{C}_0$ 拓扑的定义，存在 $\Gamma \in \mathscr{B}$，使得 $x \in \Gamma \subseteq G$. 于是，

$$\tau \triangleq \inf\{t \in T; X_t \notin \Gamma\} \leqslant \inf\{t \in T; X_t \notin G\} \triangleq \tilde{\tau}$$

因此，$P_x(\tilde{\tau} > 0) = 1, x \in E$，对充分小的 t，$X_t \in G$ 即 $|f(X_t) - f(x)| < \varepsilon$，此即

$$\lim_{t\downarrow 0} f(X_t) = f(x) \qquad P_x - a.s$$

充分性。考虑任意实数 $a < b$，则 $G \triangleq f^{-1}((a,b)) \in \mathscr{B}$. 对任意 $x \in G$，即 $a < f(x) < b$，取 ε 充分小，可使 $\Gamma \triangleq f^{-1}\{(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\} \subset G$，且 $\Gamma \in \mathscr{B}, x \in \Gamma \subseteq G$，为证 f 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，只需证

$$\{\tau > 0\} \in \mathscr{F}_0 \text{ 且 } P_x(\tau > 0) = 1$$

由于 τ 是停时，$\{\tau > 0\} \in \mathscr{F}_0$. 由零一律，只须证，$P_x(\tau = 0) = 1$，将会导致矛盾。事实上，若 $\tau = 0 \quad P_x - a.s.$ 则有一串 $t_n \downarrow 0$，使 $Xt_n \in \Gamma$. 即 $|f(Xt_n) - f(x)| > \varepsilon \quad P_x - a.s$，与 $\lim\limits_{t\to 0} f(Xt) = f(x) \quad P_x - a.s.$ 矛盾。

注 2 设 X 是强马氏过程，f 是 Borel 可测且 $\mathscr{C}_0$ 连续的函数，τ 是停时，则 $\forall x \in E$

$$\lim_{h\downarrow 0} f(X_{\tau+h}) = f(X_\tau) \qquad P_x - a.s.$$

证明 令

$$A = \{\lim_{h\downarrow 0} f(X_h) = f(x)\}$$

$$B = \{\lim_{h\downarrow 0} f(X_{\tau+h}) = f(X_\tau)\}$$

则

$$\theta_\tau A = B, \theta_\tau(\Omega \backslash A) = \Omega \backslash B$$

由于 $Px(\Omega\backslash B | \mathscr{F}_\tau) = Px(\theta_\tau(\Omega\backslash A) | \mathscr{F}_\tau) = P_{x_\tau}(\Omega\backslash A)$，有

$$P_x(\Omega \backslash B) = \int_\Omega P_{X_\tau}(\Omega \backslash A) P_x(\mathrm{d}\omega)$$

但由于f的$\mathscr{C}_0$连续性，$\forall\ x \in E, Px(\Omega \backslash A) = 0$，故由上式，$Px(\Omega \backslash B) = 0$，要即$\forall\ x \in E$

$$\lim_{h \downarrow 0} f(X_{\tau+h}) = f(x), \qquad P_x - a.s.$$

注 3　一个 Borel 可测函数 f 在 x 处是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的充要条件是

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} f(X_t) \leqslant f(x), \qquad P_x - a.s, x \in E$$

易见定义 5.6 就是关于拓扑 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的等价定义。

上式成立的一个充分性条件是：设 $\Gamma_n \subset G$ 为紧集，$x \in G \in \mathscr{C}_0$，$\tau_n = \inf\{t \in T: X_t \overline{\in} \Gamma_n\}$，如果 $P_x(\tau_n \downarrow 0) = 1$，则 $\overline{\lim_{n \to \infty}} E_x f(X\tau_n) \leqslant f(x)$。([45]定理 4.9)

5.2　正则函数和过份函数

定义 5.7　设 $R \subset \overline{\mathscr{T}}$，函数 $g \in \boldsymbol{B}$ 称为是 R 正则的，如果 $\forall\ \tau \in R, E_x g(X_\tau)$ 存在，且对一切 $\sigma, \tau \in R, Px(\tau \geqslant \sigma) = 1$ 有

$$E_x(g(X_\tau) | \mathscr{F}_\sigma) \leqslant g(X_\sigma), \qquad x \in E \tag{5.14}$$

并称 $\mathscr{T}$ 正则为正则。

定义 5.8　设 $g \in \boldsymbol{B}$ 关于马氏过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t, P_x)$ 或者关于半群 $\{T_t, t \in R_+\}$ 是过份的，如果 $\forall\ t \in R_+, x \in E, T_t g(x) \triangleq E_x g(X_t)$ 有定义；且

$$T_t g(x) \leqslant g(x), x \in E, t \in R_+ \tag{5.15}$$

过份函数具有下面的性质

1) 常值函数是过份的；

2) 过份函数经非负系数的线性组合仍是过份的；

3) 设 $g_n(x), n = 1, 2, \cdots$ 是一列过份函数，$E_x g_1^-(X_t) < \infty, t \in$

$\mathscr{R}_+, g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$. 则 $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ 仍是过份的函数；

4) 设 g 是过份函数.且对某一个 $x_0 \in E, E_{x_0} g^-(X_t) < \infty, t \in \mathscr{R}_+$ 则 $(g(x_t), \mathscr{F}_t, Px_0)$ 构成一个广义上鞅,即 $\forall\ t \geqslant s$

$$Ex_0[g(X_t) | \mathscr{F}_s] \leqslant g(X_S), \qquad Px_0 - a.s.$$

如果还存在一个 Px_0 可积的随机变量 η. 使

$$g(X_t) \geqslant E_{x_0}(\eta | \mathscr{F}_t), \qquad Px_0 - a.s., t \in \mathscr{R}_+ \quad (5.16)$$

则对任何 $t > 0$,左极限 $\lim\limits_{s\uparrow t} g(X_s) \quad Px_0 - a.s.$ 存在、且 $\{g(X_t), t \geqslant 0\}$ 是右连续的。

证明 由 $E_{x_0}(g(X_t)|\mathscr{F}_s) = E_{x_0}(\theta_S g(X_{t-s})|\mathscr{F}_S) = EX_s g(X_{t-s}) = T_{t-s} g(X_s) \leqslant g(X_s)$ 可见 $(g(X_t), \mathscr{F}_t, P_{x_0})$ 是广义上鞅。

一个上鞅 $\{g(X_t)\}$ 具有右连续左极修正的充要条件是 $E_{x_0} g(X_t)$ 右连续。因为 $E_{x_0} g(X_t)$ 是 t 的单调不增函数，所以它又等价于 $\forall\ t_n \downarrow t, \lim\limits_{n\to\infty} E_{x_0} g(Xt_n) = Eg(X_t)$。序列 $\{g(Xt_n), \mathscr{F}t_n, P_{x_0}\}$ 是一个控制正则鞅 $\{E(\eta|\mathscr{F}t_n)\}$ 的上鞅序列，因而它下一致可积(即负部一致可积)。由于 $E_{x_0} g(Xt_n) \leqslant E_{x_0} g(Xt_n)$，所以只须证明

$$Ex_0 g(X_t) \leqslant \lim_{n\to\infty} Ex_0 g(Xt_n)$$

为此记 $A = \{\omega: \lim\limits_{t\downarrow 0} g(X_t) \geqslant g(x)\}, B = \{\omega: \underline{\lim\limits_{t\downarrow 0}} g(X_{t+s}) \geqslant g(X_s)\}$。显然 $\theta^s A = B, \theta^s \Omega = \Omega, \theta^s(\Omega\backslash A) = \Omega\backslash B$,由马氏性

$$P_{x_0}(\theta^s B | \mathscr{F}_s) = P_{x_0}(B)$$

$$P_{x_0}(\Omega\backslash B | \mathscr{F}_s) = PX_s(\Omega\backslash A)$$

因此

$$P_{x_0}(\Omega\backslash B) = \int_\Omega PX_s(\Omega\backslash A) P_{x_0}(\mathrm{d}\omega) \qquad (5.17)$$

注意则 g 是下 $\mathscr{C}_0$ 连续的,而 $P_x(X_0 = x) = 1$,故 $P_x(A) = 1, P_x(\Omega\backslash A) = 0$,故 $PX_s(\Omega\backslash A) = 0$,因此 $P_{x_0}(\Omega\backslash B) = 0$,也即 $P_{x_0}(\underline{\lim\limits_{t\downarrow 0}} g(X_{t+s}) \geqslant g(X_s)) \doteq 1$. 于是

$$E_{x_0}g(X_t) \leqslant E_{x_0} \varliminf_{t_n \downarrow t} g(X_{t_n}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{x_0}g(X_{t_n})$$

(5.16)式获证。这样$\{g(X_t),\mathscr{F}_t,P_{x_0}\}$有右连续的修正，再加上$g \in B$，$\{g(X_t)\}$是可分的，因此存在与$\{g(X_t)\}$无区别的右连续过程，在无区别的意义下，我们认为$\{g(X_t)\}$就是右连左极的过程。

5) 设过份函数$g(x)$满足(5.16)式，则它是$\mathscr{C}_0$连续的，即

$$\lim_{t\downarrow 0} g(X_t) = g(x), \qquad Px - a.s.,x \in E \qquad (5.18)$$

证明 由4可见$\{g(X_t)\}$是右连续的。

6. 设Borel可测函数$g(x)$，取值于$(-\infty, +\infty)$，满足(5.16)式，则它是过份函数的充要条件是

$$T_t g(X) \leqslant g(x), \quad \forall\, t \in \mathscr{R}_+, x \in E \qquad (5.19)$$

$$\lim_{t\downarrow 0} T_t g(x) = g(x) \qquad (5.20)$$

证明 必要性按定义5.6，g是$\mathscr{C}_0$下半连续的，于是$Px(\varliminf_{t\downarrow 0} g(X_t) \geqslant g(x)) = 1$，因此

$$g(x) \leqslant E_x(\varliminf_{t\downarrow 0} g(X_t)) \leqslant \varliminf_{t\downarrow 0} E_x g(X_t)$$

又由(5.19)式

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} E_x g(X_t) \leqslant g(x)$$

从而(5.20)成立。

充分性。只须证g是$\mathscr{C}_0$下半连续且$(g(X_t))$为可分，由4知$(g(X_t))$与一个右连续过程无区别，因此它可分，且$P_x - a.s$ $\mathscr{C}_0$下半连续。

$$P_x(\varliminf_{t\downarrow 0} g(X_t) \geqslant g(x)) = 1, \qquad x \in E$$

7) 如过份函数g满足(5.16)式，则对任意$t \geqslant 0$，$g_t(x) = T_t g(x)$也是过份的，且

$$T_t g(x) \leqslant T_s g(x), \qquad s \leqslant t$$

8) 如f,g过份，且对某一$x_0 \in E$. $E_{x_0} f^-(X_t) < \infty$，$E_{x_0} g^-(X_t) < \infty$，则$f \wedge g$仍是过份函数。

9) 如果 g 是过份函数且 $\sup_{t\geq 0} E_x g^-(X_t) < \infty$，则 $P_x - a.s.$ 存在极限 $\lim_{t\to\infty} g(X_t(\omega))$（有限或 $+\infty$）。

下面的引理在研究值函数 $V(x), \bar{V}(x)$ 的性质中起重要的作用。

引理 5.2 设过份函数 $f \in \boldsymbol{B}(A^-)$，则对任何两个停时 τ, σ，若 $P_x(\tau \geq \sigma) = 1, x \in E$，则

$$E_x(f(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant f(X_\sigma) \quad P_x - a.s, x \in E \qquad (5.25)$$

证明 由过份函数的性质 4，$(f(X_t), \mathscr{F}_t, P_x)$ 是广义右连续上鞅，且由 $f \in B(A^-)$ 可知 $f(X_\infty) = \lim_{t\to\infty} f(X_t) P_x - a.s$ 存在，$\forall\, b > 0$，令 $f^b(x) = f(x) \wedge b$，则由 Doob 停止定理

$$E_x(f^b(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant f^b(X_\sigma)$$

由 Fatou 引理，则 $E_x(\lim_{b\to\infty} f(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) = \lim_{b\to\infty} f^b(X_\sigma)$，类似于引理 3.5，便于证明(5.25)式。

定义 5.9 称过份函数 $f = f(x)$ 是 $g \in \boldsymbol{B}$ 的过份控制，如果 $\forall\, x \in E, g(x) \leqslant f(x)$ 成立；称 f 为 g 的最小过份控制，如 f 是 g 的过份控制，且对一切 g 的过份控制函数 $h = h(x)$，有 $f(x) \leqslant h(x), x \in E$.

设 $g \in \boldsymbol{B}(A^-)$，令

$$Q_n g(x) = g(x) \vee T_{2^{-n}} g(x) \qquad (5.26)$$

引理 5.3 设 $g \in \boldsymbol{B}(A^-)$，则

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x) \qquad (5.27)$$

是 $g(x)$ 的最小过份控制，其中 $Q_n^N g(x) = \underbrace{Q_n(Q_n\cdots(Q_n}_{N}(g(x))))$。

证明 令 $v_n(x) \lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x)$，则由定理 3.17

$$v_n(x) = \sup_{t\in R(n)} E_x g(X_\tau)$$

其中 $R(n) \subset \mathscr{T}$ 是取离散值 $\{\frac{k}{2^n}: k \in \mathscr{N}\}$ 的停时规则集。$v_n(x)$ 是过份函数，因此 $v_n(x) \geqslant T_{\frac{1}{2^n}} v_n(x), x \in E$，对任一 $m \in N$，由半群性质，

$$v_n(x) \geqslant T_{m,2^{-n}} v_n(x) \tag{5.28}$$

由于 $R(n) \leqslant R(n+1)$，$v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x)$，极限 $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$ 存在，且 $v(x) \geqslant g(x)$.

在(5.28)中取 $m = l \cdot 2^{n-k}$，$l \in \mathcal{N}$，$n > k$，则

$$v_n(x) \geqslant T_{l,2^{-k}} v_n(x)$$

由单调收敛定理得

$$v(x) \geqslant T_{l,2^{-k}} v(x) \tag{5.29}$$

往证 $v(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，为此考虑 $\varphi \in B(A^-)$ 及 $\Phi(x) = E_x\varphi(Xt)$，其中 t 固定并属于 $(0,\infty)$，令 τ_n 是首次进入某个紧集的时间，且 $P_x(\tau_n \downarrow 0) = 1$，则由

$$E_x\Phi(X\tau_n) = E_x E X_{\tau_n} \varphi(X_t) = E_x\theta_{\tau_n}\varphi(Xt) = E_x\varphi(X_{\tau_n+t})$$

及 Fatou 引理，并考虑到 φ 的 $\mathscr{C}_0$ 下半连续性，有

$$\begin{aligned} \underline{\lim_{n\to\infty}} E_x\Phi(X_{\tau_n}) &= \underline{\lim_{n\to\infty}} E_x\varphi(X_{\tau_n+t}) \\ &\geqslant Ex \underline{\lim_{n\to\infty}} \varphi(X_{\tau_n+t}) = E_x\varphi(X_t) = \Phi(x) \end{aligned} \tag{5.30}$$

由(45)的定理 4.9 可知，Φ 是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，这表明下面每个 Borel 函数

$$T_{2^{-n}}g(x),\ Q_n g(x) = g(x) \vee T_{2^{-n}}g(x)$$

$$v_n(x) = \lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x),\ v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x)$$

都是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的。

往证 $v(x)$ 的过份性，对任意 $t \geqslant 0$，取二进有理数列 $r_i \downarrow t$，由(5.29)式及 Fatou 引理

$$\begin{aligned} v(x) &\geqslant \underline{\lim_{i\to\infty}} T r_i v(x) = \underline{\lim_{i\to\infty}} E_x v(X r_i) \\ &\geqslant E_x \underline{\lim_{i\to\infty}} v(X r_i) \geqslant E_x v(X_t) = T_t v(x) \end{aligned}$$

同时由 $g \in B(A^-)$，可见 $v \in B(A^-)$，由过份函数性质 4 可知 $(v(X_t))$ 是可分的。

再证 $v(x)$ 是 $g(x)$ 的最小过份控制，为此设 $u(x)$ 是 $g(x)$ 的任一个过份控制，则从 $u(x) \geqslant g(x)$ 可得 $u(x) = Q_n^N u(x) \geqslant Q_n^N g(x)$. 从而 $u(x) \geqslant v(x)$，于是 $v(x)$ 是 $g(x)$ 的最小过份控制。

注 4 设 $g \in B(A^-)$，$g^b(x) = g(x) \wedge b, b \geqslant 0$，则 $g(x)$ 的最小过份控制

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N g^b(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \lim_{b\to\infty} Q_n^N g^b(x)$$

这事实的证明可由引理 3.10 及(5.27)得到。

下面的引理给出了当 X 是 Feller 过程时，连续函数 $g(x)$ 的最小过份控制的性质。

引理 5.4 设 X 是 Feller 过程，$g(x) \geqslant c > -\infty$ 且连续，那么 $g(x)$ 的最小过份控制函数 $v(x)$ 是下半连续的，亦即

$$\varliminf_{y\to x} v(y) \geqslant v(x) \tag{5.31}$$

证明 不失一般性，设 $g \geqslant 0$，因为 g 连续，$g^m(x) = g(x) \wedge m$ 是有界连续的，因此 $T_t g^m(x)$ 仍是有界连续函数，从而 $Q_n g^m(x)$，$Q_n^N g^m(x)$ 都是连续函数，注意到

$$v_n^m(x) = \lim_{N\to\infty} Q_n^N g^m(x)$$

它是单调不减序列的极限，对任意的 $N \in \mathscr{N}$

$$\lim_{N\to\infty} Q_n^N g^m(y) \geqslant Q_n^N g^m(y)$$

利用右式的连续性

$$\varliminf_{y\to x} \lim_{N\to\infty} Q_n^N g^m(y) \geqslant \varliminf_{y\to x} Q_n^N g^m(y) = Q_n^N g^m(x)$$

再令 $N\to\infty$，则

$$\varliminf_{y\to x} v_n^m(y) \geqslant v_n^m(x)$$

同理可证明作为单调不减函数列的极限

$$v^m(x) = \lim_{n\to\infty} v_n^m(x)$$

以及

$$\tilde{v}(x) = \lim_{m\to\infty} v^m(x)$$

是下半连续的，如引理 5.3 可证，$g\in\boldsymbol{B}(A^-)$的最小过份控制 $v(x)=\bar{v}(x)$，从而 $v(x)$是下半连续的。

在寻求非负连续函数 $g(x)$的最小过份控制时，下面的构造是很有用的，令

$$\left.\begin{aligned}\tilde{Q}g(x) &= \sup_{t\geq 0}T_tg(x)\\ \tilde{Q}^0g(x) &= g(x)\\ \tilde{Q}^Ng(x) &= \sup_{t\geq 0}T_t\tilde{Q}^{N-1}g(x)\end{aligned}\right\}\qquad(5.32)$$

我们有下述的

引理 5.5 设 X 是 Felleer 过程，并设 $g(x)\geq c>-\infty$为连续函数，则

$$v(x)=\lim_{N\to\infty}\tilde{Q}^Ng(x)\qquad(5.33)$$

下半连续，且为 $g(x)$ 的最小过份控制。

证明 记 $v_N(x)=\tilde{Q}^Ng(x)$，则

$$v_{N+1}(x)=\tilde{Q}v_N(x)=\sup_{t\geq 0}(x)T_tv_N(x)\geq v_N(x)\geq g(x)$$

对任意的 $t\geq 0$

$$v_{N+1}(x)\geq T_tv_N(x)$$

令 $N\to\infty$，则存在极限 $v(x)=\lim\limits_{N\to\infty}v_N(x)$，且

$$v(x)\geq T_tv(x)\qquad(5.34)$$

$v(x)$是 g 的过份控制。

往证 $v(x)$是下半连续的，因为 g 连续，X 为 Feller 过程，对任何 $m\in N$，$g^m(x)=g(x)\wedge m$ 连续，且 $T_tg^m(x)$仍是连续函数，于是 $T_tg(x)=\lim\limits_{m\to\infty}T_tg^m(x)$是下半连续的，且 $v_1(x)=\tilde{Q}g(x)=\sup\limits_{t\geq 0}T_tg(x)$也是下半连续的，由归纳法，$\forall\ N\in\mathcal{N}$，$v_N(x)$是下半连续的，事实上，如果 $v_N(x)$是下半连续的，则由[44]之定理 10(p468)．存在非降有界连续函数列

$$v_N^i(x)\uparrow v_N(x)\qquad(i\to\infty)$$

$T_tv_N^i(x)$是连续函数，因此从等式

$$v_{N+1}(x)=\sup_{t\geq 0}T_t v_N(x)=\sup_{t\geq 0}\lim_{i\to\infty}T_t v_N^i(x)$$

可见 $v_{N+1}(x)$下半连续，于是

$$v(x)=\lim_{N\to\infty}v_N(x)$$

是下半连续的。

往证 v 是 g 的最小过份控制，为此设 $h(x)$是 $g(x)$的某一个过份控制，则

$$Qg(x)=\sup_{t\geq 0}T_t g(x)\leqslant\sup_{t\geq 0}T_t h(x)\leqslant h(x)$$

从而

$$v(x)=\lim_{N\to\infty}\tilde{Q}^N g(x)\leqslant h(x)$$

最后来证明 $v(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，因为 $v(x)$下半连续，X_t 是右连续的过程，由 Fatou 引理

$$\varliminf_{t\downarrow 0}T_t v(x)=\varliminf_{t\downarrow 0}E_x v(X_t)\geqslant v(x) \tag{5.35}$$

其实从(5.34)，(5.35)还可知 v 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的。证毕。

当报酬函数 $g\in \boldsymbol{B}(A^-,A^+)$时，我们可用下面的方法构造 g 的最小过份控制，令

$$\varphi(x)=E_x(\sup_{t\geq 0}g(X_t)),\ \varphi_n(x)=E_x(\sup_{k\in\mathscr{N}}g(X_{k,2^{-n}})) \tag{5.36}$$

对 $f\in \boldsymbol{B}(A^-,A^+)$，令

$$G_n f(x)=g(x)\vee T_{2^{-n}}f(x) \tag{5.37}$$

显然，如 $f=g$，则 $G_n f(x)=Q_n g(x)$。

引理 5.6 如 $g\in \boldsymbol{B}(A^-,A^+)$，则它的最小过份控制

$$v(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}G_n^N\varphi_n(x) \tag{5.38}$$

证明 令 $\tilde{v}_n(x)=\lim\limits_{N\to\infty}G_n^N\varphi_n(x)$，由引理 3.15 及引理 5.3

$$\tilde{v}_n(x)=v_n(x)\triangleq\sup_{\tau\in R(n)}E_x g(X_\tau)$$

所以引理 5.2 表明 $v(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{v}_n(x)$是 g 之最小过份控制。

引理 5.7 设 f 是过份函数，满足 A^-条件

$$\sigma_B = \inf\{t > 0; X_t \in B\} \tag{5.39}$$

其中 B 是一个 Borel 集，则

$$f_B(x) = E_x f(X_B) \tag{5.40}$$

也是过份函数。

证明 令 $s \geqslant 0, \sigma_B^s = \inf\{t > s; X_t \in B\}$

则由于 X_t 是循序可测的，σ_B^s 是停时，由引理 3.7

$$T_t f_B(x) \leqslant f_B(x) \qquad x \in E, t \geqslant 0$$

如同引理 5.3 的证明，$f_B(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 下连续的 Borel 可测函数，当 $s \downarrow 0$ 时，$\sigma_B^s \downarrow \sigma_B$，由 Faton 引理及 $f(X_t)$ 的右连续性可得

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{t\downarrow 0}} T_t f_B(x) &= \underline{\lim_{t\downarrow 0}} E_x f(X_{t+\sigma_B^t}(\omega)) \\ &\geqslant E_x f(X_{t+\sigma_B^t}(\omega)) = E_x f(X_{\sigma_B}) = f_B(x)\end{aligned}$$

由此及(5.41)

$$\underline{\lim_{t\downarrow 0}} T_t f_B(x) = f_B(x)$$

由过份函数的性质 6，即知 $f_B(x)$ 是过份函数。

注 5 如令 $\tau_B = \inf\{t \geqslant 0; X_t \in B\}$ 则 τ_B^s 不$\to \tau_B^0$，$f_B(x) = E_x f(X_{\tau_B})$ 不一定是过份函数。

如同引理 3.12，有

引理 5.8 设 $g \in \boldsymbol{B}(A^-)$，$v(x)$ 为 $g(x)$ 之最小过份控制，则

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} v(X_t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) \qquad P_x - a.s. x \in E \tag{5.41}$$

且$\forall\ \varepsilon > 0$

$$P_x(\tau^\varepsilon < \infty) = 1, x \in E \tag{5.42}$$

其中

$$\tau^\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0; v(X_t) \leqslant g(X_t) + \varepsilon\} \tag{5.43}$$

§5.3 A^-条件下值函数的过份性与 ε 最优停时

定理 5.9 设 $g \in \boldsymbol{B}(A^-)$，则

1) 值函数 $V(x)$是 g 的最小过份控制；

2) $V(x)=\overline{V}(x)$.

证明 由引理 5.3

$$v(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x)$$

是 g 的最小过份控制，因为 $g\in \boldsymbol{B}(A^-)$、$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$

$$E_x g(X_\tau) \leqslant E_x v(X_\tau) \leqslant v(x)$$

所以

$$V(x) \leqslant \overline{V}(x) \leqslant v(x)$$

沿用引理 5.3 的记号，存在 $R(n)\subseteq\mathscr{T}$，使

$$v_n(x) \leqslant V(x)$$

于是 $v(x)=\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)\leqslant V(x)$，所以 $V(x)=v(x)$是 g 的最小过份控制，且 $V(x)=\overline{V}(x)$. 证毕。

如果$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$f(x)=E_x g(X_\tau)$是 g 的过份控制，则 $f(x)=\overline{V}(x)$ 且 τ 是$(0,\overline{V})$最优的停时。

定理 5.10 设 $g\in \boldsymbol{B}(A^-,A^+)$，则$\forall\ \varepsilon>0$

$$V(x) = E_x V(X_{\tau_\varepsilon}) \tag{5.44}$$

其中

$$\tau_\varepsilon \triangleq \inf\{t\geqslant 0; V(X_t) \leqslant g(X_t) + \varepsilon\} \tag{5.45}$$

证明 由引理 5.8，$P_x(\tau_\varepsilon<\infty)=1$，其次由定理 5.8 及引理 5.2

$$V(x) \geqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon}) \geqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon}) + \varepsilon$$

为证(5.45)，只须证

$$V(x) \leqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon})$$

它可从下面的引理 5.11，5.12 得到。

称规则 $\tau\in\mathscr{T}(x;\delta,\varepsilon)$，其中 $\delta\geqslant 0$，$\varepsilon\geqslant 0$. 如果

$$P_x(\tau < \tau^\varepsilon) \leqslant \delta \tag{5.46}$$

这里 τ^ε 由(5.44)式所定义，并记

$$\mathscr{T}(\delta,\varepsilon)=\bigcap \mathscr{T}(x;\delta,\varepsilon)$$

引理 5.11　如果 $g\in \boldsymbol{B}(A^-)$，则对任何一对 (δ,ε)；$\delta>0,\varepsilon>0$

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(x;\sigma,\varepsilon)} E_x g(X_\tau) \tag{5.47}$$

证明　在集合 $\{\tau<\tau^\varepsilon\}$ 上，$g(X_\tau)<V(X_\tau)-\varepsilon$，我们有

$$\begin{aligned}E_x g(X_\tau)&=E_x I_{(\tau<\tau^\varepsilon)}g(X_\tau)+E_x I_{(\tau\geqslant\tau^\varepsilon)}g(X_\tau)\\&\leqslant E_x I_{(\tau<\tau^\varepsilon)}(V(X_\tau)-\varepsilon)+E_x I_{(\tau\geqslant\tau^\varepsilon)}g(X_\tau)\\&\leqslant E_x V(X_\tau)-\varepsilon\cdot P_x(\tau<\tau^\varepsilon)\end{aligned}$$

应用引理 5.2，则

$$E_x g(X_\tau)\leqslant V(x)-\varepsilon\cdot P_x(\tau<\tau^\varepsilon)$$

从而

$$\sup_{\tau\in\mathscr{T}\setminus\mathscr{T}(x;\sigma,\varepsilon)} E_x g(X_\tau)\leqslant V(x)-\varepsilon\delta$$

所以

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}(x;\sigma,\varepsilon)} E_x g(X_\tau)$$

引理 5.12　设 $g\in \boldsymbol{B}(A^-,A^-)$，则$\forall\ \varepsilon>0$

$$V(x)=\sup_{\{\tau\in\mathscr{T};\tau\geqslant\tau^\varepsilon\}} E_x g(x_\tau) \tag{5.48}$$

且

$$V(x)\leqslant E_x V(X_{\tau_\varepsilon}) \tag{5.49}$$

证明　固定 $x^0\in E$，$\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$，由(5.47)，存在一列 $\tau_n\in\mathscr{T}(x^0;\delta_n,\varepsilon)$，使得 $E_{x^0}g(X_{\tau_n})$非降，且

$$V(x^0)=\lim_{n\to\infty}E_{x^0}g(X_{\tau_n}) \tag{5.50}$$

置 $\sigma_n=\tau_n\vee\tau^\varepsilon$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}E_{x^0}g(X_{\sigma_n})=\varliminf_{n\to\infty}E_{x^0}I_{(\tau_n\geqslant\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau_n})+\varliminf_{n\to\infty}E_{x^0}I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau^\varepsilon})$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}E_{x^0}g(X_{\tau_n})-\varlimsup_{n\to\infty}E_{x^0}I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau_n})+\varliminf_{n\to\infty}E_{x^0}I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau^\varepsilon})$$

$$\geqslant V(x^0)-E_{x^0}(\varlimsup_{n\to\infty}I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau_n}))+E_{x^0}(\varliminf_{n\to\infty}I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)}g(X_{\tau^\varepsilon}))$$

由于 $P_{x^0}(\tau_n<\tau^\varepsilon)\leqslant 2^{-n}$，由 Borel—cantelli 引理

$$P_{x^0}(\varliminf_{n\to\infty}I_{(\tau_n\geqslant\tau^\varepsilon)})=1$$

即 $P_{x^0}(\overline{\lim_{n\to\infty}} I_{(\tau_n<\tau^\varepsilon)})=0$. 因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_{x^0} g(X_{\tau_0}) \geqslant V(x^0) \tag{5.51}$$

但 $\sigma_n \geqslant \tau^\varepsilon$，于是

$$\sup_{\{\tau\in\mathscr{T}:\tau\geqslant\tau^\varepsilon\}} E_{x^0} g(X_t) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} E_{x^0} g(X_{\sigma_n}) \geqslant V(x^0)$$
$$\geqslant \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E_{x^0} g(X_\tau) \geqslant \sup_{\{\tau\in\mathscr{T}:\tau\geqslant\tau^\varepsilon\}} E_{x^0} g(X_\tau)$$

(5.48)式获证，由(5.48)式

$$V(x)=\sup_{\{\tau\in\mathscr{T}:\tau\geqslant\tau^\varepsilon\}} E_x g(X_\tau) \leqslant \sup_{\{\tau\in\mathscr{T}:\tau\geqslant\tau^\varepsilon\}} E_x V(X_\tau)$$

而 V 是 g 的最小过份控制，$g\in B(A^-)$，故

$$E_x V(X_\tau) \leqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon})$$

从而

$$V(x)\leqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon})$$

定理 5.13' 设 $g\in \boldsymbol{B}_0(A^+,A^-)$，即 $g\in \boldsymbol{B}(A^+,A^-)$，且 g 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，则

1) $\forall\ \varepsilon>0$，τ^ε 是(τ,V)最优规则；

2) 如 $g(x)$上半连续，则 τ^0 是最优停时；

3) 如 $g(x)$上半连续，且 $Px(\tau^0<\infty)=1$，则 τ^0 是最优规则；

4) 如在 $\overline{\mathscr{T}}$(或 $\mathscr{T}$)中存在最优时间 τ^*，则

$$P_x(\tau^0\leqslant\tau^*)=1, x\in E$$

且 τ^0 是 $\overline{\mathscr{T}}$(或 $\mathscr{T}$)中最优停时。

证明 1) 由引理 5.8，$\tau^\varepsilon\in\mathscr{T}$，因为 g 为 $\mathscr{C}_0$ 连续，V 是 g 的最小过份控制，由过份函数的性质 5)，可知 $V(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，由于 $\{X_t\}$轨道右连续，$g(x)$，$V(x)$ 皆 $\mathscr{C}_0$ 连续，因此$\{g(X_t),t\geqslant0\}$及$\{V(X_t),t\geqslant0\}$是右连续的，(性质 4)。所以

$$V(X_{\tau^\varepsilon})\leqslant g(X_{\tau^\varepsilon})+\varepsilon, P_x-a.s.\ x\in E \tag{5.52}$$

由引理 5.12

$$V(X)\leqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon})\leqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon})+\varepsilon \tag{5.53}$$

这表明 τ^{ε} 是 ε 最优规则。

2）注意到，如果 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 > 0$，则 $P_x(\tau_{\varepsilon_1} \leqslant \tau_{\varepsilon_2}) = 1$，因而 $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}\tau_\varepsilon$ 存在 $P_x - a.s.$ ，$x \in E$，记 $\bar{\tau} = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}\tau_\varepsilon$，则 $\bar{\tau}$ 是一个停时，且 $\bar{\tau} \leqslant \tau^0$，由定理 5.8，(5.53) 式并由 Faton 引理及 $g(x)$ 的上半连续性与 $\{X_t\}$ 的拟左连续性

$$
\begin{aligned}
\bar{V}(x) = V(x) &\leqslant \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} E_x g(X_{\tau^\varepsilon}) \leqslant E_x(\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} g(X_{\tau^\varepsilon})) \\
&= E_x I_{(\bar{\tau}<\infty)} \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} g(X_{\tau^\varepsilon}) + E_x I_{(\bar{\tau}=\infty)} \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} g(X_{\tau^\varepsilon}) \\
&\leqslant E_x I_{(\bar{\tau}<\infty)} g(X_{\bar{\tau}}) + E_x I_{(\bar{\tau}=\infty)} g(X_\infty) \\
&= E_x g(X_{\bar{\tau}})
\end{aligned}
$$

从而 $\bar{\tau}$ 是$(0,\bar{V})$ 最优的停时，往证 $\bar{\tau} = \tau^0, P_x - a.s.$

显然 $\bar{\tau} \leqslant \bar{\tau}^0, P_x - a.s.\ x \in E$，由 τ^0 的定义，为了证明 $\tau^0 \leqslant \bar{\tau}$，只须证明

$$P_x(V(X_{\bar{\tau}}) = g(X_{\bar{\tau}})) = 1, x \in E \tag{5.54}$$

由于 $\bar{\tau}$ 是$(0,\bar{V})$ 最优的，我们有

$$E_x V(X_{\bar{\tau}}) \geqslant E_x g(X_{\bar{\tau}}) = V(x) \geqslant E_x V(X_{\bar{\tau}})$$

所以(5.54)式获证。

3）显然。

4）因为 τ^* 是最优的

$$V(x) = E_x g(X_{\tau^*}) \leqslant E_x V(X_{\tau^*}) \leqslant V(x)$$

可见 $P_x(V(X_{\tau^*}) = g(X_{\tau^*})) = 1, x \in E$，于是 $\tau^0 \leqslant \tau^*\quad P_x - a.s.$ 因为 $V(x)$ 是 g 的最小过份控制，$g \in \boldsymbol{B}(A^-)$，我们有

$$\bar{V}(x) = V(x) = E_x g(X_{\tau^*}) = E_x V(X_{\tau^*}) \leqslant E_x V(X_{\tau^0}) = E_x g(X_{\tau^0})$$

这便是 τ^0 的最优性，如果 $\tau^* \in \mathscr{T}$，则 $\tau^0 \in \mathscr{T}$.

推论 5.14　1）如 $g \in \boldsymbol{B}_0(A^-, A^+)$，且上连续，则

$$V(x) = E_x V(X_{\tau^0}) \tag{5.55}$$

2）设 $g \in \boldsymbol{B}(A^-, A^+)$，记 $\Theta = \{\tau_C \in \mathscr{T}: \tau_C = \inf\{t \geqslant 0; X_t \in C, C$ 为 Borel 集$\}$，则

$$V(x) = \sup_{t \in \Theta} E_x g(X_t) \tag{5.56}$$

3) 设 $g \in B_0(A^-, A^+)$ 且连续，$V(x)$ 下半连续，记 $\mathscr{D} = \{\tau_0 \in \mathscr{T}:$ $\tau_0 = \inf\{t \geqslant 0: X_t \in D\} D$ 为闭集$\}$，则

$$V(x) = \sup_{t \in \mathscr{D}} E_x g(X_t) \tag{5.57}$$

证明 1) 由定理 5.13 之 2)，$\tilde{\tau}$ 是最优的，从而

$$V(x) = E_x g(X_{\tilde{\tau}}) = E_x g(X_{\tau^0}) = E_x V(X_{\tau^0})$$

2) $V(x) \leqslant E_x V(X_{\tau^\varepsilon}) \leqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon}) + \varepsilon$. 这里 τ^ε 就是首次进入的 Borel 集的时间，于是

$$V(x) \leqslant \sup_{t > 0} E_x g(X_{\tau^\varepsilon}) \leqslant \sup_{t \in \Theta} E_x g(X_\tau)$$

3) 只要注意到在所给的条件下，对 $\varepsilon > 0$，$\{x: V(x) \leqslant g(x) + \varepsilon\}$ 是闭集。

§5.4 A^+ 条件下值函数的正则性与 ε 最优停时

如同 §3.5，容易看出当 $g \in B(A^-)$ 时，$g(x)$ 的最小正则控制与最小过份控制是同一的。

如同离散情形，令

$$g_a(x) = g(x) \vee a, \quad a \leqslant 0$$

令 $V_a(x) = \sup_{t \in \mathscr{T}} E_x g_a(X_\tau)$，我们将证明 $V_*(x) = \lim_{a \to -\infty} V_a(x)$ 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，且

$$V(x) = V_*(x) = \overline{V}(x)$$

但在连续情形，关键在于证明下面的

定理 5.15 如 $g \in L_5(A^+)$（即 $g \in L(A^-)$ 且 $\mathscr{C}_0$ 连续），则 $V_*(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的。为此先证明下述引理。

引理 5.16 设 $g \in B(A^+)$，则 $\forall a \leqslant 0, x \in E$，过程 $\{(V_0(X_t) \mathscr{F}_t, P_x), 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ 是右连续的一致可积上鞅。

证明 设 $\tau\in\mathscr{T}$，则

$$E_x g_a(X_\tau) \leqslant E_x \sup_{s\geqslant 0} g_a(X_s) \leqslant E_x \sup_{s\geqslant 0} g_a^+(X_s)$$

且
$$V_a(x) = \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E_x g_a(X_\tau) \leqslant E_x \sup_{s\geqslant 0} g^+(X_s)$$

由马氏性

$$a \leqslant V_a(X_t) \leqslant E_{X_t} \sup_{s\geqslant 0} g^+(X_s) \leqslant E_x(\sup_{s\geqslant 0} g^+(X_s)|\mathscr{F}_t) \tag{5.58}$$

因为 $g\in \boldsymbol{B}(A^+)$，$Y=\sup\limits_{s\geqslant 0} g^+(X_s)$可积，可见$\{V_a(X_t)\}$是一致可积的。

但 $g_a\in \boldsymbol{B}(A^+,A^-)$，由定理 5.9，$V_a(x)$是 $g_a(x)$的最小过份控制。由过份函数的性质 5 与 4，$V_a(x)$是 $\mathscr{C}_t$ 连续的，且过程$\{V_a(X_t),t\geqslant 0\}$是右连续的。因为 $V_a(x)$是过份的

$$E_x[V_a(X_{t+s})|\mathscr{F}_t] = E_{X_t} V_a(X_s) \leqslant V_a(X_t) \tag{5.59}$$

这就证明了$\{V_a(X_t),t\geqslant 0\}$是一致可积上鞅，因而是右闭的，这里 $V_a(X_\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} V_a(X_t)$. 这表明$\{(V_a(X_t),\mathscr{F}_t,P_x),0\leqslant t\leqslant\infty\}$是一致可积的上鞅。

引理 5.17 设 $g\in \boldsymbol{B}(A^+)$，则$\forall\ x\in E$，$P_x-a.s$ 地有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} V(X_t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} V_*(X_t) = \lim_{a\to-\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} V_a(X_t) \tag{5.60}$$

证明 由引理 5.8

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} V_a(X_t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} g_a(X_t)$$

因此

$$\lim_{a\to-\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} V_a(X_t) = \lim_{a\to-\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} (g(X_t)\vee a) = \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) \tag{5.61}$$

但 $\quad g(x) \leqslant V(x) \leqslant V_*(x) \leqslant V_a(x)$

所以由(5.61)，便得(5.60 式)。

引理 5.18 设 $g\in \boldsymbol{B}(A^+)$. 则对任意 $\tau,\sigma\in\overline{\mathscr{T}}$，$P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，$V_t(X_\tau)$关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测且有

$$E_x(V_*(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant V_*(X_\sigma) \quad P_x-a.s.,x\in E \tag{5.62}$$

证明 首先 $V_*(x)=\lim\limits_{a\to-\infty}V_a(x)$ 是 Borel 可测的，因为过程 $\{V_a(X_t),t\geqslant 0\}$ 是右连续的适应过程，它关于可选 σ 代数 $\mathscr{O}$ 是可测的，因此 $V_*(x)$ 也是可选过程，而由(5.60)

$$\lim_{t\to\infty}V_*(X_t)=\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)$$

是 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup\limits_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t)$ 可测的，因此对任何停时 τ，$V_a(X_\tau)$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的。对于 $\{V_a(X_t)\}$，我们有

$$E_x(V_a(X_\tau)\mid\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V_a(X_\sigma)$$

令 $a\to-\infty$，应用条件期望的 Fotou 引理

$$E_x(V_*(X_\tau)\mid\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V_*(X_\sigma)$$

引理 5.19 设 $g\in\boldsymbol{B}(A^+)$，则对停时 $\rho\in\bar{C}(g)$. $\{(V_*(X_{\rho\wedge t}),\mathscr{F}_{\rho\wedge t},P_x,t\geqslant 0\}$ 构成一个上鞅。

证明 对 $s\leqslant t$，由(5.62)易得

$$E_x(V_*(X_{\rho\wedge t})\mid\mathscr{F}_{\rho\wedge s})\leqslant V_*(X_{\rho\wedge s})$$

从 $g\in B(A^+)$，可得

$$E_x(V_*(X_{\rho\wedge t}))\leqslant E_x(X_a(X_{\rho\wedge t}))\leqslant E_x\sup_{t\geqslant 0}g^+(X_t)<\infty$$

从而 $\rho\in\bar{C}(g)$，可得

$$-\infty<-E_xg^-(X_\rho)\leqslant E_xX_*(X_\rho)\leqslant E_x(V_*(X_{\rho\wedge t}))$$

因此，$E_x|V_*(X_{\rho\wedge t})|<\infty$，$t\geqslant 0$，$x\in E$.

引理 5.20 设 $g\in\boldsymbol{L}(A^+)$，S 是 $(0,+\infty)$ 中可列稠密集，则当 $r\downarrow 0$ 时，$\lim\limits_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_r)P_x$—a.s 存在且可积。

证明 由引理 5.19，$\{V_*(Z_{\rho\wedge r}),r\in S\}$ 可以排成一个离散的反向上鞅([3]之引理 2.21)，因此

$$\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V_x(X_{\rho\wedge r})\qquad P_x-a.s.$$

存在，且

$$E_x\left|\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_{\rho\wedge r})\right|<\infty,x\in E\tag{5.63}$$

由于 $g\in L$，存在一个 $\rho\in\bar{C}(g)$，使 $P_x(\rho>0)=1$，所以对此 ρ

$$\lim_{r\downarrow 0,r\in S} V_*(X_{\rho\wedge r}) = \lim_{r\downarrow 0,r\in S} V_*(X_r) \qquad P_x - a.s.$$

引理得证。

引理 5.21 设 $g\in L(A^+)$，S 是 $(0,\infty)$ 中可列稠密子集，则

$$\varliminf_{r\downarrow 0,r\in S} V_*(X_r) = \varliminf_{t\downarrow 0} V_*(X_t) \quad P_x - a.s. x\in E \tag{5.64}$$

证明 由于过程 $\{V_a(X_t),t\geqslant 0\}$ 右连续，因而可分。设 I 是任一开区间，则 $P_x - a.s$ 地有

$$\inf_{t\in I} V_*(X_t) = \inf_{t\in I}\inf_a Va(X_t) = \inf_a \inf_{t\in I} V_a(X_t)$$

$$= \inf_a \inf_{t\in I\cap S} Va(X_t) = \inf_{t\in I\cap S} V_*(X_t)$$

取 $I=(0,\frac{1}{k})$，则 $P_x - a.s$ 地有

$$\varliminf_{t\downarrow 0} V_*(X_t) = \lim_{k\to\infty} \inf_{0<t<\frac{1}{k}} V_*(X_t)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \inf_{0<r<\frac{1}{k},r\in S} V_*(X_r)$$

$$= \varliminf_{r\downarrow 0,r\in S} V_*(X_r)$$

定理 5.15 的证明：由于 $V_a(x)$ 是 $g_a(x)$ 的过份控制，$\forall\ \rho\in C(g)$，$(\rho>t)\in\mathscr{F}_t$，因而

$$E_x I_{(\rho>t)} V_a(X_\rho) \leqslant E_x I_{(\rho>t)} V_a(X_t) \tag{5.65}$$

$$E_x g_a(X_\rho) \leqslant E_x(I_{(\rho\leqslant t)} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} g_a(X_s)) + E_x(I_{(\rho>t)} V_a(X_t))$$

$$\leqslant E_x[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} g_a(X_s) \vee V_a(X_t)]$$

于是

$$V_a(x) = \sup_{\rho\in C(g)} E_x g_a(X_\rho) \leqslant E_x[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} g_a(X_s) \vee V_a(X_t)]$$

令 $a\to-\infty$，因为 $g\in L_0(A^+)$

$$V_*(x) \leqslant E_x[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} g(X_s) \vee V_*(X_t)] \tag{5.66}$$

取 $t=r_n\downarrow 0$，$r_n\in S$，S 为 $(0,\infty)$ 中可列稠密集，过程 $Y_t=E_x[\sup_{t\geqslant 0} g^-(X_t)|\mathscr{F}_t]$ 是一致可积鞅，极限 $\lim_{k\to\infty} Yr_n$　$P_x - a.s$ 存在，记为 Y_0。Y_0 可

积。

往证：
$$\sup_{0\le s\le\tau_n} g(X_s)\vee V_*(X\tau_n)\le Y\tau_n \tag{5.67}$$

由于 $\sup\limits_{0\le s\le\tau_n} g(X_s)\le\sup\limits_{0\le s\le\tau_n} g^+(X_s)\le E_x[\sup\limits_{0\le s\le\tau_n} g^+(X_s)\mid\mathscr{F}\tau_n]$ 以及(5.58)式

$$\sup_{0\le s\le\tau_n} g(X_s)\vee V_*(X\tau_n)\le Y\tau_n$$

由(5.66)及($Y\tau_n$)的一致可积性

$$\begin{aligned}V_*(x)&\le\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x[\sup_{0\le s\le\tau_n} g(X_s)\vee V_*(X\tau_n)]\\&\le E_x[\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{0\le s\le\tau_n} g(X_s)\vee V_*(X\tau_n)]\\&\le E_x[g(X_0)\vee\lim_{n\to\infty}V_*(X\tau_n)]\\&=E_x[g(x)\vee\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_r)]\end{aligned}\tag{5.68}$$

这里第三个不等式，利用了 $g(x)$ 的 $\mathscr{C}_0$ 连续，X_t 的右连续性以及引理 5.20，注意到 $\lim\limits_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_r)$ 是 $\mathscr{F}_{0+}$ 可测的，由零一律，$\lim\limits_{r\downarrow 0,r\in S}V_x(X_r)P_x-a.s$ 等于一个常数，所以

$$V_*(x)\le g(x)\vee\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_r)\quad P_x-a.s,x\in E$$

因此在$\{x:g(x)<V_*(x)\}$上

$$V_*(x)\le\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V_*(X_r)\quad P_x-a.s\quad P_x-a.s.x\in E \tag{5.69}$$

由引理 5.21 可知在$\{x:g(x)<V_*(x)\}$上

$$V_*(x)\le\underline{\lim_{t\downarrow 0}}V_*(X_t) \tag{5.70}$$

这表明 $V_*(x)$在$\{x:g(x)<V_*(x)\}$上 $\mathscr{C}_0$ 下连续，而在集合$\{x:g(x)\ge V_*(x)\}$上 $V_*(x)=g(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的(因为 $g\in\mathbf{L}_0(A^-)$)，于是在$\{x:g(x)\ge V_*(x)\}$上

$$V_*(x)=g(x)=\lim_{t\downarrow 0}g(X_t)\le\underline{\lim_{t\downarrow 0}}V_*(X_t)\quad P_x-a.s.$$

由此及(5.70)式，$V_*(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 下连续的。

往证 $V_*(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 上连续的。由于 $V_a(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，而 $V_a(x)\downarrow V_*(x)$，于是

$$\varliminf_{t\downarrow 0} V_*(X_t) \leqslant \lim_{a\to-\infty} \varlimsup_{t\downarrow 0} V_a(X_t) \leqslant \lim_{a\to-\infty} V_a(x) = V_*(x)$$

这表明 $V_*(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 上连续的，因此 $V_*(x)$的 $\mathscr{C}_0$ 连续性得证。

现在转移到讨论本节的主题：值函数的正则性，我们有主要的结果：

定理 5.22　设 $g\in L_0(A^+)$，则

1) $V(x)$是 $g(x)$的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则($\mathscr{C}_0$ 连续)的控制；

2) $V(x)=V(x)$。

为了证明它，我们需要先证下面的引理(参考定理 3.22)。

对任意 $\varepsilon\geqslant 0, a\leqslant 0$，置

$$\begin{aligned}\sigma_a^\varepsilon &= \inf\{t\geqslant 0: V_*(X_t)\leqslant g_a(X_t)+\varepsilon\}\\ \tau_a^\varepsilon &= \inf\{t\geqslant 0: V_a(X_t)\leqslant g_a(X_t)+\varepsilon\}\\ \tau_*^\varepsilon &= \inf\{t\geqslant 0: V_*(X_t)\leqslant g_a(X_t)+\varepsilon\}\end{aligned} \tag{5.71}$$

引理 5.23　设 $g\in L(A^+)$，则$\forall\ \varepsilon>0, a\leqslant 0$

$$V_*(x) = E_x V(X_{\sigma_a^\varepsilon}) \qquad x\in E \tag{5.72}$$

证明　由 5.45 式，

$$V_a(x) = E_x V_a(X_{\tau_a^\varepsilon}) \tag{5.73}$$

易见，对 $a\leqslant b\leqslant 0$，$\sigma_b^\varepsilon\leqslant\tau_b^\varepsilon$，而 $V_a(x)$是过份函数

$$E_x V_a(X_{\tau_a^\varepsilon}) \leqslant E_x V_a(X_{\sigma_b^\varepsilon})$$

由此及(5.73)，并由 Fatou 引理，并注意到 A^+条件

$$V_*(x) \leqslant \varlimsup_{a\to-\infty} E_x V_a(X_{\sigma_b^\varepsilon}) \leqslant E_x V_*(X_{\sigma_b^\varepsilon})$$

再由引理 5.18

$$V_*(x) \geqslant E_x V_a(X_{\sigma_b^\varepsilon})$$

(5.72)式得证。

引理 5.24　设 $g\in L_0(A^+)$，则$\forall\ \varepsilon>0$

$$\lim_{b\to-\infty} P_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon})\leqslant b) = 0, \quad x\in E \tag{5.74}$$

$$P_x(\tau_*^\varepsilon < \infty) = 1 \qquad (5.75)$$

证明 由定理5.15,$V_*(x)$也是$\mathscr{C}_0$连续的,因而$\{V_*(X_t),t\geqslant 0\}$右连续。由引理5.7,$\sigma_b^\varepsilon \leqslant \tau_b^\varepsilon < \infty$ $P_x - a.s.$ 而且g与V_*有$\mathscr{C}_0$连续性,因此

$$V_*(X_{\sigma_b^\varepsilon}) \leqslant g_b(X_{\sigma_b^\varepsilon}) + \varepsilon \quad P_x - a.s.,x \in E \qquad (5.76)$$

注意到(5.72)式

$$-\infty < g(x) \leqslant V_*(x) = E_x V_*(X_{\sigma_b^\varepsilon}) \leqslant E_x g_a(X_{\tau_b^\varepsilon}) + \varepsilon$$
$$\leqslant bP_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon}) \leqslant b) + E_x(\sup_{t\geqslant 0} g^+(X_t)) + \varepsilon$$

于是($b<0$)

$$P_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon}) \leqslant b) \leqslant -\frac{1}{b}\{E_x[\sup_{t\geqslant 0} g^+(X_t) + \varepsilon - V_*(x)]\}$$
$$\to 0(b \to -\infty)$$

注意到在$\{\omega:g(X_{\sigma_b^\varepsilon})>b\}$上,$\tau_*^\varepsilon \leqslant \sigma_b^\varepsilon$而一般地有$\sigma_b^\varepsilon \leqslant \tau_*^\varepsilon$,所以在该集上$\tau_*^\varepsilon = \sigma_b^\varepsilon$,因此$P_x(\tau_*^\varepsilon < \infty) \geqslant P_x\{\sigma_b^\varepsilon < \infty, g(X_{\sigma_b^\varepsilon}) > b\}$,由$g \in L_0(A^+)$,$P(\sigma_b^\varepsilon < \infty) \geqslant P(\tau_b^\varepsilon < \infty) = 1$,$P_x(g(X_{\sigma_b^\varepsilon}) > b) \to 1$,$b \to -\infty$,所以$P_x(\tau_*^\varepsilon < \infty) = 1$.

引理 5.25 设$g \in L_0(A^+)$,则$\forall\ \varepsilon > 0$

$$V_*(x) = E_x V_*(X_{\tau_*^\varepsilon}) \quad x \in E \qquad (5.77)$$

证明 由引理5.18

$$V_*(x) \geqslant E_x V_*(X_{\tau_*^\varepsilon})$$

为证相反的不等式,固定$x \in E$,由(5.74),存在一个子列$b_j \to -\infty$,使

$$\lim_{j\to\infty} I_{\{g(X_{\sigma_{b_j}^\varepsilon}) \leqslant b_j\}}(\omega) = 0 \quad P_x - a.s.$$

由(5.72)式以及在集合$\{\omega:g(X_{\sigma_{b_j}^\varepsilon}) \geqslant b_j\}$上,$\sigma_{b_j}^\varepsilon = \tau_*^\varepsilon$,从Fatou引理可得

$$V_*(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_x V_*(X_{\sigma_{b_j}^\varepsilon})$$

$$\leqslant E_x \varlimsup_{j\to\infty} V_*(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})$$

$$= E_x \varlimsup_{j\to\infty} I_{\{g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})\geqslant b_j\}} V_*(X_{\tau^\varepsilon_*}) + E_x \varlimsup_{j\to\infty} I_{\{g(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})<b_j\}} V_*(X_{\sigma^\varepsilon_{b_j}})$$

$$= E_x V_*(X_{\tau^\varepsilon_*})$$

定理 5.22 的证明：由定理 5.8，$\overline{V}_a(x) = V_a(x)$ 且 $\overline{V}(x) \leqslant \overline{V}_a(x)$，所以

$$V(x) \leqslant \overline{V}(x) \leqslant V_*(x) \tag{5.78}$$

由(5.75)，$\tau^\varepsilon_* \in \mathscr{T}$，如同证明(5.76)，可证

$$V_*(X_{\tau^\varepsilon_*}) \leqslant g(X_{\tau^\varepsilon_*}) + \varepsilon \qquad P_x - a.s. \tag{5.79}$$

由此及引理 5.25

$$V_*(x) = E_x V_*(X_{\tau^\varepsilon_*}) \leqslant E_x g(X_{\tau^\varepsilon_*}) + \varepsilon \leqslant V(x) + \varepsilon \tag{5.80}$$

从而 $V_*(x)\leqslant V(x)$. (5.78)式的不等号均为等号。由定理 5.15，这些函数都是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，因为 $V_a(x)$ 是过份的，且 $V_a(x)\geqslant g_a(x)\geqslant a$，由过份函数的性质 4，可见 $V_a(x)$ 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，由单调收敛定理及 A^+ 条件，易知 $V(x)=V_*(x)=\lim\limits_{a\to-\infty} V_a(x)$ 是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的，而 $V(x)$ 的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则性是容易证明的。

定理 5.26 设 $g\in \boldsymbol{L}_0(A^+)$，则定理 5.13 的一切结论为真，亦即

1) $\forall\ \varepsilon>0$，τ^ε 是 ε 最优规则；

2) 如 $g(x)$ 上半连续，则 τ^0 是最优停时；

3) 如 $g(x)$ 上半连续，且 $P_x(\tau^0<\infty)=1$，$x\in E$，则 τ^0 是最优规则；

4) 如在 $\overline{\mathscr{T}}$(或 $\mathscr{T}$)中存在一个最优停时 τ^*，则 $P_x(\tau^0\leqslant\tau^*)=1$，$x\in E$，且 τ^0 是 $\overline{\mathscr{T}}$(或 $\mathscr{T}$)中最优停时。

证明 由(5.80)式及 $\tau^\varepsilon\equiv\tau^\varepsilon_*$ 可见 1)成立。

2) 记 $\tilde{\tau}=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\tau^\varepsilon$ 则由 X 的拟左连续

$$\overline{V}(x)=V(x)\leqslant\overline{\lim_{t\downarrow 0}}E_xg(X_{\tau^t})\leqslant Ex(\overline{\lim_{t\downarrow 0}}g(X_{\tau^t}))$$
$$=E_xI_{(\tilde{\tau}<\infty)}\overline{\lim_{t\downarrow 0}}g(X_{\tau^t})+E_xI_{(\tilde{\tau}=\infty)}\overline{\lim_{t\downarrow 0}}g(X_{\tau^t})$$
$$=E_xI_{(\tilde{\tau}<\infty)}g(X_{\tilde{\tau}}))+E_xI_{(\tilde{\tau}=\infty)}g(X_\infty)$$
$$=E_xg(X_{\tilde{\tau}})$$

显然 $\tilde{\tau}\leqslant\tau^0$，而由 $E_xV(X_{\tilde{\tau}}))\geqslant E_xg(X_{\tilde{\tau}})=V(x)\geqslant E_xV(X_{\tilde{\tau}}))$ 可见 $V(X_{\tilde{\tau}}))=g(X_{\tilde{\tau}}))$，$P_x-a.s$，从而，$\tilde{\tau}\geqslant\tau^0$，于是 $\overline{V}(x)=V(x)\leqslant E_xg(X_{\tau^0})$.

3) 是显然的。

4) 由 τ^* 最优，可见 $V(X_{\tau^*})=g(X_{\tau^*})$，所以 $\tau^*\geqslant\tau^0$，而

$$V(x)=V(x)=E_xg(X_{\tau^*})=E_xV(X_{\tau^*})$$
$$\leqslant E_xV(X_{\tau^0})=E_xg(X_{\tau^0})$$

τ^0 为最优，定理得证。

§5.5 一般情形下值函数的正则性

定理 5.27 设 $g\in\mathbf{L}_0$，则

1) $V(x)$是 $g(x)$的最小 $C(g)$正则控制；

2) $V(x)=\overline{V}(x)$.

证明 1) $\forall\ b\geqslant 0$，令

$$g^b(x)=g(x)\wedge b,V^b(x)=\sup_{\tau\in C(g)}E_xg^b(X_\tau)$$
$$V^*(x)=\lim_{b\to\infty}V^b(x)$$

设 $\sigma,\tau\in C(g)$，$P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，$x\in E$，由定理 5.22

$$-\infty<-E_xg^-(X_\tau)\leqslant E_xg^b(X_\tau)\leqslant E_xV^b(X_\tau)\leqslant E_xV^b(X_\sigma)$$

由 $V^b(x)$的正则性及单调收敛定理可得

$$E_x(V^*(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V^*(X_\sigma)\qquad(5.81)$$

$V^*(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的 Borel 函数 $V^b(x)$的(非降)极限，因此是

$\mathscr{C}_0$ 下连续且 Borel 可测的，从而 $V^*(x)$是 $C(g)$正则的。

2) 往证 $V^*(x)=V(x)=\overline{V}(x)$，从 $V^b(x)\leqslant V(x)$可得 $V^*(x)\leqslant V(x)$，若 $\tau\in\overline{C}(g)$，则

$$E_x g^b(X_\tau)\leqslant \overline{V}^b(x)=V^b(x)\leqslant V^*(x)$$

由单调收敛定理

$$E_x g(X_\tau)\leqslant V^*(x)$$

从而

$$\overline{V}(x)=V^*(x)=V(x)$$

往证 $V(x)$是 $g(x)$的最小 $C(g)$正则控制，为此设 $v(x)$是 $g(x)$的 $C(g)$正则控制，则

$$v(x)\geqslant E_x v(X_\tau)\geqslant E_x g(X_\tau)$$

从而 $v(x)\geqslant V(x)$，定理得证。

由上面定理的证明，对 $C(g)$中任意一对停时规则 τ,σ，若 $P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，则

$$E_x(V(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V(X_\sigma)\quad P_x-a.s. \tag{5.82}$$

如果 $\tau,\sigma\in\overline{\mathscr{T}}$，且存在 $\rho\in\overline{C}(g)$，使 $P_x(\sigma\leqslant\tau\leqslant\rho)=1$，则也可证明

$$E_x(V(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V(X_\sigma) \tag{5.83}$$

事实上，由于 $g^b\in \boldsymbol{L}_0(A^+)$，由定理 5.22，我们有

$$E_x(V^b(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V^b(X_\sigma)$$

且 $-\infty<-E_x g\ (X_\rho)\leqslant E_x V^\rho(X_\rho)\leqslant E_x V^b(X_\tau)\leqslant E_x V^b(X_\sigma)$，

由单调收敛定理，则

$$E_x(V^*(X_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)\leqslant V^*(X_\sigma)$$

但定理 5.27 表明 $V^*(x)=V(x)=\overline{V}(x)$，所以(5.83)成立，顺便须指出，由引理 5.17

$$V^*(X_\infty)=\lim_{b\to\infty}\overline{\lim_{t\to\infty}}V^b(X_t)=\lim_{b\to\infty}\overline{\lim_{t\to\infty}}g^b(X_t)=\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)$$

下面讨论 $g\in \boldsymbol{L}_0$ 时值函数的 $\mathscr{C}_0$ 连续性。

定理 5.28 设 $g\in \boldsymbol{L}_0$，且 $V(x)<\infty$，则 $V(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的 Borel 可测函数。

证明 由定理 5.27，$V(x)=\lim\limits_{b\to\infty}V^b(x)$，$V^b(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的（定理 5.22），而 $V(x)$是单调不降族的极限，因此 $V(x)\mathscr{C}_0$ 下连续。

往证 $V(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 上连续的，令 S 为$(0,\infty)$中可列稠密集，由定理 5.27，对 $\rho\in\overline{C}(g)$，$r\in S$，有

$$E_xV(X_{\rho\wedge r})\leqslant V(x) \tag{5.84}$$

因为 $V(x)<\infty$，且

$$E_xV(X_{\rho\wedge r})\geqslant -E_xg^-(X_\rho)>-\infty$$

由(5.83)式可知，对固定的 $\rho\in\overline{C}(g)$，$\{V(X_{\rho\wedge r}),r\in S\}$ 是一致可积的上鞅，如同引理 5.20 所证，可知 $\lim\limits_{r\downarrow 0,r\in S}V(X_{\rho\wedge r})$ 是一个可积的随机变量，且

$$\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V(X_{\rho\wedge r})=\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V(X_r)\quad P_x-a.s. \tag{5.85}$$

从而由 L_1 收敛定理

$$\lim_{r\downarrow 0,r\in S}E_xV(X_{\rho\wedge r})=E_x\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V(X_{\rho\wedge r}) \tag{5.86}$$

从(5.84)～(5.86)式便得

$$E_x\lim_{r\downarrow 0,r\in S}V(X_r)\leqslant V(x) \tag{5.87}$$

如同引理 5.21，我们可证

$$\overline{\lim_{r\downarrow 0,r\in S}}V(X_r)=\overline{\lim_{t\downarrow 0}}V(X_t) \tag{5.88}$$

同样由于 $\overline{\lim\limits_{r\downarrow 0,r\in S}}V(X_r)$是 $\mathscr{F}_{0+}$ 可测，$P_x-a.s$ 为常数，因而

$$E_x\overline{\lim_{r\downarrow 0,r\in S}}V(X_r)=\overline{\lim_{t\downarrow 0}}V(X_t)P_x-a.s \tag{5.89}$$

联合(5.87)式

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}V(X_t)\leqslant V(x)\quad P_x-a.s,x\in E$$

这就证明 $V(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的。

定理 5.29 设 $g\in L_0$，$|S(x)|<\infty$，$x\in E$，如果在 $\overline{\mathscr{T}}$ 中（或 $\mathscr{T}$ 中）存在最优停时 τ^*，则 τ^0 最优且

$$P_x(\tau^0\leqslant\tau^*)=1,x\in E$$

证明 显然 $\tau^*\in\overline{C}(g)$，由(5.83)式

$$V(x) = E_x g(X_{\tau^*}) \leqslant E_x V(X_{\tau^*}) \leqslant E_x V(X_0) = V(x)$$

注意到

$$E_x I_{(\tau^* = \infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) = E_x I_{(\tau^* = \infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} V(X_t)$$

因此 $E_x I_{(\tau^*<\infty)} g(X_{\tau^*}) = E_x I_{(\tau^*<\infty)} V(X_{\tau^*})$，从而在$[\tau^* < \infty]$上，$g(X_{\tau^*}) = V(X_{\tau^*})$，于是 $\tau^0 \leqslant \tau^*$ $P_x - a.s$，而在$[\tau^* = \infty]$上，$\tau^0 \leqslant \tau^*$是自然的，所以 $\tau^0 \leqslant \tau^*$ $P_x - a.s.$

往证 τ^0 的最优性，因为 $g(x)$与 $V(x)$都是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，所以$\{g(X_t), t \geqslant 0\}$，$\{V(X_t), t \geqslant 0\}$都是右连续的，因此由 τ^0 的定义便知：在$[\tau_0 < \infty]$上

$$g(X_{\tau^0}) = V(X_{\tau^0}) \quad P_x - a.s.$$

从而，由(5.83)式

$$\begin{aligned}
V(x) &= E_x g(X_{\tau^*}) \\
&= E_x I_{(\tau^*<\infty)} V(X_{\tau^*}) + E_x I_{(\tau^*=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) \\
&\leqslant E_x I_{(\tau^0<\infty)} V(X_{\tau^0}) + E_x I_{(\tau^0=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) \\
&= E_x I_{(\tau^0<\infty)} g(X_{\tau^0}) + E_x I_{(\tau^0=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t) \\
&= E_x g(X_{\tau^0})
\end{aligned} \qquad (5.90)$$

§ 5.6 正则函数的结构

如 $g \in \mathbf{L}(A^-)$，则 $V(x)$ 是 g 的最小过份控制，此时由引理 5.2，

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N g(x) \qquad (5.91)$$

但如果 $g \notin \mathbf{L}(A^-)$，比如 $g \in L_0(A^+)$，则 $V(x)$是 g 的最小 $\mathscr{T}$ 正则的控制，它不能表示成(5.91)。本节主要结果表明，如 $g \in B(a^-)$，则 $g(x)$的最小 $C(g)$正则控制 $V(x)$将与某个 $G(x)$的最小过份控制一致，于是

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N G(x) \qquad (5.92)$$

设 $h \in B$，满足条件

$$h(x) = E_x h(X_\infty)$$

比如 $h(x) = -E_x g^-(X_\infty)$，$E_x g^-(X_\infty) < \infty$. 令

$$G(x) = g(X) \vee h(x)$$

$$Q_n G(x) = G(x) \vee T_{2^{-n}} G(x)$$

$$v_n(x) = \lim_{N\to\infty} Q_n^N (Gx)$$

$$v(x) = v_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N G(x)$$

注 6　易见

$$T_{2^{-n}} G(x) = E_x G(X_{2^{-n}}) \geqslant E_x h(X_{2^{-n}})$$

$$= E_x(E_{X_{2^{-n}}} g(X_\infty)) = E_x h(X_\infty) = h(x) > -\infty$$

由引理 3.9，$v_n(x) = \lim\limits_{N\to\infty} Q_n^N G(x)$ 存在，且是 $G(x)$ 的最小过份控制，由于 $v_{n+1}(x)$ 关于算子 $T_{2^{-(n+1)}}$ 是过份的，所以

$$v_{n+1}(x) \geqslant T_{2^{-(n+1)}} v_{n+1}(x) = E_x v_{n+1}(X_{2^{-(n+1)}})$$

$$\geqslant E_x E_{2^{-(n+1)}} v_{n+1}(X_{2^{-(n+1)}})$$

$$= E_x v_{n+1}(X_{2^{-n}}) = T_{2^{-n}} v_{n+1}(x)$$

这表明 $v_{n+1}(x)$ 关于算子 $T_{2^{-n}}$ 也是过份，于是 $v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) \triangleq v(x)$ 是存在的。

定理 5.30　设 $g \in \boldsymbol{L}_0$，并且 $h \in \boldsymbol{B}$ 满足

a) $h(x) = E_x h(X_\infty)$，$x \in E$，$E_x h^-(X_\infty) < \infty$

b) $h(x) \leqslant V(x)$，$x \in E$

则　1) $V(x)$ 是 $G(x) = g(x) \vee h(x)$ 的最小过份控制；

2) $V(x) = V_G(x) \triangleq \sup\limits_{\tau \in C(g)} E_x G(X_\tau)$；

3) $V(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{N\to\infty} Q_n^N G(x)$。

我们先证明下述引理。

引理 5.31　设 $g(x), h(x) \in \boldsymbol{B}$，$h(x) = E_x h(X_\infty)$，且 $E_x h^-(X_\infty)$

$<\infty$，则

1) $v(x)\in \boldsymbol{B}$；

2) $\forall\ t\geqslant 0, T_t v(x)\leqslant v(x), x\in E$；

3) $v(x)\mathscr{C}_0$ 上半连续；

4) $v(x)$ 是 $G(x)$ 的最小过份控制。

证明 1) 当 $g,h\in \boldsymbol{B}(A^-)$ 时，$G\in \boldsymbol{B}(A^-)$.

设 $\varphi\in \boldsymbol{B},\varphi\geqslant G$，往证 $\Phi(x)=E_x\varphi(X_t)\in \boldsymbol{B}$. 固定 $x\in E$，设 τ_n 是紧集首达时的停时列，且 $\tau_n\downarrow 0$.

函数 $\Phi(x)=E_x\varphi(X_t)$是 Borel 可测的，由强马氏性

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x\Phi(X_{\tau_n})=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_xE_{X_{\tau_n}}\varphi(X_t)$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_x\varphi(X_{t+\tau_n})\qquad(5.95)$$

令 $\eta_n=E_x(-h^-(X_\infty)|\mathscr{F}_{t+\tau_n}),n=1,2,\cdots$，则

$$\eta_n=E_{X_{t+\tau_n}}(-h^-(X_\infty))\leqslant E_{X_{t+\tau_n}}h(X_\infty)$$

$$=h(X_{t+\tau_n})\leqslant\varphi(X_{t+\tau_n})$$

因为 $\varphi\in B$ 是 $\mathscr{C}_0$ 下连续的，而 $-h^-(X_\infty)$可积，$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n\quad P_x-a.s.$ 存在，于是由(3.95)式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}E_x\Phi(X_{t_n})=\underline{\lim_{n\to\infty}}E_x\varphi(X_{t+\tau_n})\geqslant E_x\underline{\lim_{n\to\infty}}\varphi(X_{t+\tau_n})\geqslant E_x\varphi(X_t)=\Phi(x)$$

由此可见，Borel 可测函数 $\Phi(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，于是如同引理 5.2 所证，$v(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 下半连续的，且 $v(x)>-\infty$，因此 $v(x)\in$ $\boldsymbol{B}$.

2) 考虑函数 $v_n(x)=\lim\limits_{N\to\infty}Q_n^NG(x)$，如同引理 5.2，我们可证对一切 $k,l\in N$

$$T_{l,2^{-k}}v_n(x)\leqslant v_n(x)\qquad(5.96)$$

从而

$$T_{l,2^{-k}}v(x)\leqslant v(x)$$

令 $t\in[0,\infty]$，选取有理数(二进制)$r_i\downarrow t(i\to\infty)$，并记 $\eta_i=E_x$

$[-h^-(X_\infty)|\mathscr{F}_{\tau_i}]$，则由于 $G\in \boldsymbol{B}(A^-)$，$v\in \boldsymbol{B}(A^-)$，由 Fatou 引理及(5.96)式

$$v(x)\geqslant \varliminf_{j\to\infty} T_{\tau_j}v(x)=\varliminf_{j\to\infty} E_x v(X_{\tau_j})$$

$$\geqslant E_x \varliminf_{j\to\infty} v(X_{\tau_j})\geqslant E_x \varliminf_{h\downarrow 0} v(X_{t+h})$$

$$\geqslant E_x v(X_t)=T_t v(x) \tag{5.97}$$

3）为证 $v(x)\mathscr{C}_0$ 上半连续性，我们只要证明对于任意的包含在 x 的开邻域紧集列的首达时 τ_k，$P_x(\tau_k\downarrow 0)=1$，有

$$\varlimsup_k E_x v(X_{\tau_k})\leqslant v(x) \tag{5.98}$$

（见注 3）

先设停时 τ 取二进有理数值，即取值于$\{l\cdot 2^{-n}:l\in N\}$，往证

$$E_x v(X_\tau)\leqslant v(x) \tag{5.99}$$

为此首先证明$(v^b(X_{l.2^{-n}}),\mathscr{F}_{l.2^{-n}},P_x)$，$l\in N$ 是一致可积的上鞅，其中 $v^b(x)=v(x)\wedge b$，由于 $v(x)\geqslant G(x)\geqslant h(x)=E_x h(X_\infty)\geqslant E_x(-h^-(X_\infty))$，所以

$$b\geqslant V^b(X_{l.2^{-n}})\geqslant E_{X_{l.2^{-n}}}(-h^-(X_\infty))$$

$$=E_x(-h^-(X_\infty)|(\mathscr{F}_{l.2^{-n}})$$

因此$\{v^b(X_{l.2^{-n}})\}$是一致可积的，且由(5.97)式

$$E_x(v^b(X_{l.2^{-n}+t})|\mathscr{F}_{l.2^{-n}})=E_{X_{l.2^{-n}}}v^b(X_t)\leqslant E_{X_{l.2^{-n}}}(v(X_t)\wedge b)$$

$$=b\wedge T_t v(X_{l.2^{-n}})$$

$$\leqslant b\wedge v(X_{l.2^{-n}})=v^b(X_{l.2^{-n}})$$

因此$(v^b(X_{l.2^{-n}}),\mathscr{F}_{l.2^{-n}},P_x)$是一致可积上鞅，于是 $P_x-a.s.$ 地存在极限

$$\lim_{l\to\infty} v^b(X_{l.2^{-n}})$$

且 $E_x|\varliminf_{l\to\infty} v^b(X_{l.2^{-n}})|<\infty$. 由 Doob 停止定理，$\forall\ \tau,\sigma$ 取$\{l\cdot 2^{-n}:l\in N\}$中的值，且 $P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，有

$$E_x(v^b(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant v^b(X_\sigma)\quad P_x-a.s. \tag{5.100}$$

在上式中令 $\sigma\equiv 0$,且令 $b\to\infty$,则

$$E_x v(X_\tau)\leqslant v(x) \tag{5.101}$$

现在证明(5.101)对一切 $\tau\in\mathscr{T}$ 也是成立的,记

$$\tau_n=\begin{cases} l\cdot 2^{-n}, & (l-1)2^{-n}<\tau\leqslant l\cdot 2^{-n}\\ +\infty, & \tau=+\infty\end{cases}$$

显然 $\tau_n\downarrow\tau$,因为 v 是 $\mathscr{C}_0$ 下连续的,所以

$$\underline{\lim_{h\downarrow 0}} v(X_{\tau+h})\geqslant v(X_\tau)\quad P_x-a.s\quad x\in E$$

从而

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}} v(X_{\tau_n}) &= \lim_n \inf_{a\geqslant n} v(X_{\tau_a})\\ &\geqslant \lim_n \inf_{t\leqslant 2^{-n}} v(X_{\tau+t})\\ &\geqslant \underline{\lim_{t\downarrow 0}} v(X_{\tau+t})\geqslant v(X_\tau)\end{aligned}$$

注意到 $v(X_{\tau_n})\geqslant E_x(-h^-(X_\infty)\,|\,\mathscr{F}_{\tau_n})$,由(5.101)式

$$E_x v(X_\tau)\leqslant E_x\underline{\lim_{n\to\infty}} v(X_{\tau_n})\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} E_x v(X_{\tau_n})\leqslant v(x)$$

现在令 τ_n 是 $\mathscr{T}$ 中停时列,$P_x(\tau_n\downarrow 0)=1$,则如上所证,$E_x v(X_{\tau_n})\leqslant v(x)$,因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_x v(X_{\tau_n})\leqslant v(x)$$

这表明函数 $v(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 上连续的。

4) 由 1),3),函数 $v(x)$是 $\mathscr{C}_0$ 连续的,由 3)知 $v(x)$是 $G(x)$的过份控制,往证 v 是 G 的最小过份控制。令 $\varphi(x)$是 $G(x)$的一个过份控制,则

$$T_{2^{-n}}\varphi(x)\leqslant\varphi(x)$$

于是
$$\begin{aligned}Q_n^N\varphi(x) &= Q_n^{N-1}(\varphi(x)\vee T_{2^{-n}}\varphi(x))=Q_n^{N-1}\varphi(x)\\ &=\cdots=\varphi(x)\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)\geqslant G(x)$,所以 $\varphi(x)=Q_n^N\varphi(x)\geqslant Q_n^N G(x)$,因而,$\varphi(x)\geqslant \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} Q_n^N G(x)=v(x)$,引理得证。

定理 5.30 的证明:由引理 5.31,只需证

$$v(x) = V(x) = V_G(x) \tag{5.103}$$

先证$V_G(x)\leqslant v(x)$，因为v是G的最小过份控制，$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$，$G(X_\tau)\leqslant v(X_\tau)$，于是

$$E_xG(X_\tau)\leqslant E_xv(X_\tau)\leqslant v(x)$$

所以
$$V_G(x) = \sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_xG(X_\tau)\leqslant v(x) \tag{5.104}$$

再证$V_G(x)\geqslant v(x)$。$\forall\ \varepsilon>0$，令

$$\tau_n^\varepsilon = \inf\{k\cdot 2^{-n}: v_n(X_{k\cdot 2^{-n}})\leqslant G(X_{k\cdot 2^{-n}})+\varepsilon\}$$

首先假定$G(x)\leqslant b<\infty$，于是$G\in \boldsymbol{L}$，由引理3.9，$v_n(x)$是$G(x)$的关于$T_{2^{-n}}$的最小过份控制，由引理3.12及$G\in\boldsymbol{L}(A^+)$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}v_n(X_{k\cdot 2^{-n}}) = \overline{\lim_{k\to\infty}}G(X_{k\cdot 2^{-n}})\quad P_x - a.s.\ ,x\in E$$

且
$$P_x(\tau_n^\varepsilon<\infty) = 1 \tag{5.105}$$

显然$v_n(x)<\infty$，因此引理3.11表明

$$\begin{aligned} v_n(x) &= E_xv_n(X_{\tau_n^\varepsilon\wedge k\cdot 2^{-n}}) \\ &= E_xI_{(\tau_n^\varepsilon<k\cdot 2^{-n})}v_n(X_{\tau_n^\varepsilon}) + E_xI_{(\tau_n^\varepsilon\geqslant k\cdot 2^{-n})}v_n(X_{k\cdot 2^{-n}}) \end{aligned}$$

由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leqslant E_x\overline{\lim_{k\to\infty}}I_{(\tau_n^\varepsilon<k\cdot 2^{-n})}v_n(X_{\tau_n^\varepsilon}) + E_x\overline{\lim_{k\to\infty}}I_{(\tau_n^\varepsilon\geqslant k\cdot 2^{-n})}v_n(X_{k\cdot 2^{-n}}) \\ &\leqslant E_xv_n(X_{\tau_n^\varepsilon}) \end{aligned} \tag{5.106}$$

在一般情形，令$G^b(x) = G(x)\wedge b$，$v_n^b(x) = \lim\limits_{N\to\infty}Q_n^NG^b(x)$则可证明$\lim\limits_{b\to\infty}v_n^b(x) = v_n(x)$。

事实上，$v_n^b(x)$，是关于b不减的，记$\tilde{v}_n(x) = \lim\limits_{b\to\infty}v_n^b(x)$，由于$v_n^b(x)$是$G^b(x)$关于$T_{2^{-n}}$的最小过份控制，所以

$$T_{2^{-n}}\tilde{v}_n(x) = \lim_{b\to\infty}T_{2^{-n}}v_n^b(x)\leqslant \lim_{b\to\infty}v_n^b(x) = \tilde{v}_n(x)$$

显然$\tilde{v}_n(x)\geqslant G(x)$，所以$\tilde{v}_n(x)$是$G(x)$的过份控制，如果$\varphi(x)$是$G(x)$的过份控制，则$\varphi(x)\geqslant G(x)\geqslant G^b(x)$于是$v_n^b(x)\leqslant\varphi(x)$，$\tilde{v}_n(x)\leqslant\varphi(x)$因此$\tilde{v}_n(x)$是$G(x)$的最小过份控制，而$v_n(x)$也是$G(x)$关于$T_{2^{-n}}$的最小过份控制，于是$v_n(x)=\tilde{v}_n(x)=\lim\limits_{b\to\infty}v_n^b(x)$.

由(5.105)式

$$v_n^b(x) = E_x v_n^b(X_{\tau_n^\varepsilon}) \leqslant E_x G^b(X_{\tau_n^\varepsilon}) + \varepsilon$$
$$\leqslant E_x G(X_{\tau_n^\varepsilon}) + \varepsilon \leqslant V_G(x) + \varepsilon$$

因此
$$v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \leqslant V_G(x) \tag{5.107}$$

由(5.104),(5.107),$v(x) = V_G(x)$。显然有 $V(x) \leqslant V_G(x)$,为证(5.103),只须证 $V_G(x) \leqslant V(x)$,注意到我们一直没有利用过 g 是 $\mathscr{C}_0$ 连续及 $h(x) \leqslant V(x)$ 这两个假设,记

$$V_G^b(x) = \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E_x G^b(X_\tau), \quad b \geqslant 0$$

函数 $g^b(x)$满足 A^+,由定理 5.22

$$E_x V^b(X_\tau) \leqslant V^b(x), \tau \in \overline{\mathscr{T}}, x \in E, P_x - a.s \tag{5.108}$$

其中 $V^b(x)$是 $g^b(x)$的值函数。

由假设 b)

$$E_x G^b(X_\tau) = E_x[(g(X_\tau) \vee h(X_\tau)) \wedge b]$$
$$= E_x(g^b(X_\tau) \vee h^b(X_\tau))$$
$$\leqslant E_x[V^b(X_\tau) \vee h^b(X_\tau)] = E_x V^b(X_\tau)$$

这里 $h^b(x) = h(x) \wedge b$,所以由(5.108)式

$$V_G^b(x) = \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E_x G^b(X_\tau) \leqslant \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E_x V^b(X_\tau)$$
$$\leqslant V^b(x) \leqslant V(x)$$

对于任意的 $\tau \in \overline{\mathscr{T}}$,$E_x(G(X_\tau) \wedge b) \leqslant V(x)$,注意到 $G(x) \geqslant h(x) = E_x h(X_\infty)$且 $E_x(h^-(X_\infty)) < \infty$,由单调收敛定理,得 $E_x G(X_\tau) \leqslant V(x)$,从而 $V_G(x) \leqslant V(x)$,于是 $V(x) = V_G(x) = v(x)$且为 $G(x)$的最小过份控制。

下面的定理讨论特殊的 $h(x)$,这可使关于 $g(x)$的假设减弱。

定理 5.32 设 $g \in \boldsymbol{B}(a^-)$,则

1) $V(x)$是 $G(x) = g(x) \vee -E_x g^-(X_\infty)$的最小过份控制;

2) $V(x) = V_G(x)$;

3) $V(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_n^N G(x)$.

证明 令 $h(x)=-E_x g^-(X_\infty)$，则它是 Borel 可测的，又 $h(X_t)=-E_t(g^-(X_\infty)|\mathscr{F}_t)$，$\lim\limits_{t\downarrow 0}T_t h(x)=h(x)$，故由过份函数的性质 6，可见过份函数 $h(x)\in B$. 而由过份函数的性质 5，可见 $h(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，因此 $\{h(X_t),t\geqslant 0\}$ 右连续，因而可分。

往证 $h(x)=E_x h(X_\infty)$，由于过程 $\{h(X_t),t\geqslant 0\}$ 对任何可列稠密集 $S\subseteq[0,\infty]$ 可分

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}h(X_t)=\overline{\lim_{s\to\infty,s\in S}}h(X_t)$$

因此

$$\begin{aligned}E_x h(X_\infty)&=E_x\overline{\lim_{s\in S,s\to\infty}}h(X_s)\\&=-E_x\overline{\lim_{s\in S,s\to\infty}}E_x(g^-(X_\infty)|\mathscr{F}_s)\\&=-E_x g^-(X_\infty)=h(s)\end{aligned}$$

注意在证明定理 5.30 中，我们应用条件 $g\in L_0$($g\in L$ 且 $\mathscr{C}_0$ 连续)，只是用来证明不等式

$$V_G(x)\leqslant V(x) \tag{5.109}$$

因此我们只要在 $G\in B(a^-)$ 条件下，证明(5.109)式。

如果 $V(x)=+\infty$，，则 $V_G(x)=+\infty$，所以不妨设 $V(x)<+\infty$，对 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$，令

$$A=\{\omega:\tau(\omega)<\infty,-E_{X_\tau}g^-(X_\infty)\leqslant g(X_\tau)\}$$

$$B=\{\omega:\tau(\omega)<\infty,-E_{X_\tau}g^-(X_\infty)>g(X_\tau)\}$$

$$\sigma_\tau(\omega)=\begin{cases}\tau(\omega), & \omega\in A\\+\infty, & \omega\notin A\end{cases} \tag{5.110}$$

往证 $E_x G(X_\tau)\leqslant E_x g(X_{\sigma_\tau})$。由于

$$\begin{aligned}E_x I_{(\tau<\infty)}G(X_\tau)&=E_x I_{(\tau<\infty)}(g(X_\tau)\vee -E_{X_\tau}g^-(X_\infty))\\&=E_x I_A g(X_\tau)-E_x[I_B E_x(g^-(X_\infty)|\mathscr{F}_\tau)]\\&\leqslant E_x I_A g(X_\tau)+E_x I_B g(X_\infty)=E_x I_{(\tau<\infty)}g(X_{\sigma_\tau})\end{aligned}$$

(5.111)

又由于 $h(X_\infty)=-g^-(X_\infty)\quad P_x-a.s.$，所以

$$G(X_\infty)=g(X_\infty)\vee -g^-(X_\infty)=g(X_\infty)$$

因而(5.110)式获证。

往证当 $\tau\in\overline{\mathscr{T}}$ 时，$\sigma_\tau\in\overline{C}(g)$：由(5.111)式及 $I_{(\tau<\infty)}\in\mathscr{F}_\tau$，因而

$$\begin{aligned}E_xg(X_{\sigma_\tau})&=E_xI_{(\tau<\infty)}g(X_{\sigma_\tau})-E_xI_{(\tau=\infty)}g(X_\infty)\\&\geqslant E_xI_{(\tau<\infty)}G(X_\tau)+E_xI_{(\tau=\infty)}g(X_\infty)\\&\geqslant -E_xI_{(\tau<\infty)}E_x(g^-(X_\infty)|\mathscr{F}_\tau)-E_xI_{(\tau=\infty)}g^-(X_\infty)\\&=-E_xg^-(X_\infty)\\&=h(x)>-\infty\end{aligned}$$

所以 $\sigma_\tau\in\overline{C}(g)$，最后从(5.110)式

$$V_G(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_xG(x_\tau)\leqslant\sup_{\tau\in\mathscr{T}}E_xg(X_{\sigma_\tau})\leqslant V(x)$$

因此由定理 5.30，本定理得证。

现在考虑(5.83)式的推广。

定理 5.33　如果下面两个条件之一满足

1) $g\in\boldsymbol{L}_0$ 且存在 $h\in\boldsymbol{B}$，使 $h(x)=E_xh(X_\infty)$

$$E_xh^-(X_\infty)<\infty,h(x)\leqslant V(x)$$

2) $g\in\boldsymbol{B}(a^-)$

则 $V(x)$ 是 $g(x)$ 的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则控制。

证明　由引理 5.31，$v(x)$ 及 $v^b(x)=v(x)\wedge b$ 均为过份函数，由于 $v(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，因此 $\{v(X_t)\}$ 是右连续的，从

$$b\geqslant v^b(X_t)\geqslant -E_x(h^-(X_\infty)|\mathscr{F}_t)$$

可见 $\forall\ \tau,\sigma\in\overline{\mathscr{T}},P_x(\tau\geqslant\sigma)=1$，有

$$E_x(v^b(X_\tau)|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant v^b(X_\sigma)\quad P_x-a.s,x\in E\quad(5.112)$$

在条件 1)或 2)之下，$v(x)=V(x)$，从 $V(x)\geqslant h(x)$，或者 $g\in B(a^-)$，可知在条件 1)下

$$E_x(v^0(X_\tau))^-=E_xv^-(X_\tau)\leqslant E_xh^-(X_\infty)<\infty$$

而在条件 2)下

$$E_x(V^0(X_\tau))^- = E_x V^-(X_\tau) \leqslant E_x g^-(X_\infty) < \infty$$

对(5.112)应用单调收敛定理,则得

$$E_x(V(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leqslant V(X_\sigma)$$

于是 $V(x)$是 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则的,如另有 $\varphi(x)$为 $g(x)$的 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则控制,可是 φ 是 $g(x)$的过份控制,另外$\forall\ \tau\in\overline{\mathscr{T}}$,$\varphi(x)\geqslant E_\tau\varphi(X_\tau)\geqslant E_x g(X_\tau)$,于是在条件 1)下,$\varphi(x)\geqslant V(x)\geqslant h(x)$,因此 $\varphi(x)\geqslant G(x)\triangleq g(x)\vee h(x)$;而在条件 2)下,由于 $\varphi(x)\geqslant E_x\varphi(X_\infty)\geqslant E_x g(X_\infty)\geqslant -E_x g^-(X_\infty)$,从而 $\varphi(x)\geqslant G(x)\triangleq g(x)\vee -E_x g^-(X_\infty)$,这样 $\varphi(x)$便是 $G(x)$的过份控制,而由定理 5.30,5.31,$V(x)$是 $G(x)$的最小的过份控制,所以 $\varphi(x)\geqslant V(x)$.这样便证明了,$V(x)$是 $g(x)$的最小 $\overline{\mathscr{T}}$ 正则控制。

§5.7 $\varepsilon(x)$最优停时

由定理 5.26 可知,当 $g\in \boldsymbol{L}_O(A^+)$时,$\forall\ \varepsilon>O$

$$\tau^\varepsilon = \inf\{t\geqslant 0, V(X_t)\leqslant g(X_t)+\varepsilon\}$$

是 ε 最优的,如果 A^+ 条件不满足,则一般地说 τ^ε 不一定是 ε 最优的,下面讨论所谓 $\varepsilon(x)$ 最优性。

定义 5.10　停时 τ 称为是在 $E_0\subset E$ 上是 $\varepsilon(x)$ 最优的,如果 $\forall\ x\in E_0$,$E_x g(X_\tau)$ 有定义,且

$$V(x)\leqslant E_x g(X_\tau)+\varepsilon(x), x\in E_0 \qquad (5.113)$$

下面主要讨论 $\varepsilon(x)=\varepsilon\cdot V(x)$的问题。

定理 5.34　设 $g\in \boldsymbol{L}_O$,$\varepsilon(x)=\varepsilon V(x)$,且对 $x\in E_O=\{x: V(x)<\infty\}$

$$P_x(\varlimsup_{t\to\infty} g(X_t)\geqslant 0)=1 \qquad (5.114)$$

则$\forall\ \varepsilon>0$

$$\tilde{\sigma}^\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0 : V(X_t) \leqslant g(X_t) + \varepsilon V(X_t)\} \quad (5.115)$$

是 $\varepsilon(x)$ 最优停时，也即

$$E_x g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) \geqslant V(x)(1-\varepsilon) \quad x \in E \quad (5.116)$$

先证明两个引理。

称 $\tau \in C(g)$ 属于类 $\mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon)$，$x \in E$，$\delta \geqslant 0$，$\varepsilon \geqslant 0$ 是指

$$E_x I_{(\tau < \tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_\tau) \leqslant \delta \quad (5.117)$$

引理 5.35 设 $g \in L_0$，则对 $x \in E_0 \triangleq \{x : V(x) < \infty\}$，$\delta > 0$ 及 $\varepsilon > 0$，类 $\mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon)$ 是最优停时的充足类，亦即

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon)} E_x g(X_\tau), X \in E_0$$

证明 在集合 $\{\tau < \tilde{\sigma}^\varepsilon\}$ 上

$$g(X_\tau) < V(X_\tau) - \varepsilon V(X_\tau)$$

因此 $\forall \ \tau \in C(g)$

$$\begin{aligned} E_x g(X_\tau) &= E_x I_{(\tau < \tilde{\sigma}^\varepsilon)} g(X_\tau) + E_x I_{(\tau \geqslant \tilde{\sigma}^\varepsilon)} g(X_\tau) \\ &\leqslant E_x I_{(\tau < \tilde{\sigma}^\varepsilon)} (V(X_\tau) - \varepsilon V(X_\tau)) + E_x I_{(\tau \geqslant \tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_\tau) \\ &= E_x V(X_\tau) - \varepsilon E_x I_{(\tau < \tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_\tau) \end{aligned} \quad (5.118)$$

由定理 5.27，$V(x)$ 是最小 $C(g)$ 正则的，因此对 $\tau \in C(g) \backslash \mathscr{R}(x,\sigma,\varepsilon)$

$$E_x g(X_\tau) \leqslant V(x) - \varepsilon\delta$$

于是 $\sup\limits_{\tau \in C(g) \backslash \mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon)} E_x g(X_\tau) \leqslant V(x) - \varepsilon\delta$，但 $V(x) = \sup\limits_{t \in C(g)} E_x g(X_\tau)$，这表明 $\sup\limits_{t \in C(g)} E_x g(X_\tau)$ 不能在 $C(g) \backslash \mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon)$ 中取到，因而必须在 $\mathscr{R}(x,\varepsilon,\delta)$ 中取到，此即

$$V(x) = \sup_{t \in \mathscr{R}(x,\delta,\tau)} E_x g(X_\tau)$$

引理 5.36 设 $g \in L_0$，且 $P_x(\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} g(X_t) \geqslant 0) = 1$，$X \in E_0$，则对一切 $\varepsilon > 0$ 及 $X \in E_0$，

$$V(x) = E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon < \infty)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon = \infty)} \overline{\lim_{t \to \infty}} g(X_t)$$

$$(5.119)$$

证明 由 $P_x(\overline{\lim\limits_{t \to \infty}} g(X_t) \geqslant 0) = 1$，可见 $g \in B(a^-)$，由定理 5.33

$$E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} V(X_t) \leqslant V(x) \quad (5.120)$$

往证相反的不等式，令 $\delta_n = 2^{-n}$，$x\in E_0$，由引理 5.35 可以找到 $\tau_n \in \mathscr{R}(x,\delta_n,\varepsilon)$，使得

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} E_x g(X_{\tau_n})$$

对 $\tau=\tau_n$ 及 $\sigma=\min(\tau_n,\tilde{\sigma}^\varepsilon)$应用(5.84)式，则

$$\begin{aligned}
V(x) &= \overline{\lim_{n\to\infty}} E_x g(X_{\tau_n}) \quad (\because \tau_n \in \mathscr{R}(x,\delta,\varepsilon) \subset C(g), \tau_n < \infty)\\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E_x I_{(\tau_n<\infty)} V(X_{\tau_n})\\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E_x I_{(\tau_n\wedge\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} V(X_{(\tau_n\wedge\tilde{\sigma}^\varepsilon)})\\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} [E_x I_{(\tau_n\wedge\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)\cap(\tau_n<\tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_{\tau_n}) + E_x I_{(\tau_n\wedge\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)\cap(\tau_n\geqslant\tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon})]\\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E_x I_{(\tau_n<\tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_{\tau_n}) + E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)\cap(\tau_n\geqslant\tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) \quad (5.121)
\end{aligned}$$

由于 $\tau_n\in\mathscr{R}(x,\delta_n,\varepsilon)$

$$\lim_{n\to\infty} E_x I_{(\tau_n<\tilde{\sigma}^\varepsilon)} V(X_{\tau_n}) \leqslant \lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$$

注意到$(\tilde{\sigma}_\varepsilon<\infty)\cap(\tau_n\geqslant\tilde{\sigma}^\varepsilon)\subset(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)$，由(5.121)得

$$V(x) \leqslant E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + E_x I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_t} g(X_t)$$

从而(5.119)式获证。

定理(5.34)的证明：先证对所有的$x\in E_0$，$E_x g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon})$存在。由定理 5.28 可知在 E_0 上，$V(x)$ 是 $\mathscr{C}_0$ 连续的，因此不但$\{g(X_t),t\geqslant 0\}$，而且过程$\{V(X_t),t\geqslant 0\}$ 都是右连续的，由 $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ 的定义

$$\begin{aligned}
g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) &= I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)\\
&\geqslant (1-\varepsilon) I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)
\end{aligned}$$

当 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 时，$\forall\ x\in E_0$，则有

$$g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) \geqslant (1-\varepsilon) I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) + I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)$$

从而 $E_x g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon})\geqslant 0$；当 $\varepsilon<1$ 时，则

$$g(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) \geqslant (\varepsilon-1)\{-I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon<\infty)} V(X_{\tilde{\sigma}^\varepsilon}) - I_{(\tilde{\sigma}^\varepsilon=\infty)} \overline{\lim_{t\to\infty}} g(X_t)$$

从而 $E_x g(X_{\bar\sigma^\varepsilon})\geqslant(\varepsilon-1)V(x)>-\infty$. 因此对一切 $x\in E_0$, $E_x g(X_{\bar\sigma^\varepsilon})$ 均有定义。

往证(5.116)式,由引理 5.36 以及过程 $\{g(X_t)\}$ 和 $\{V(X_t)\}$ 的右连续性,有

$$
\begin{aligned}
V(x) &= E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon<\infty)}V(X_{\bar\sigma^\varepsilon}) + E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon=\infty)}\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t) \\
&\leqslant E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon<\infty)}[g(X_{\bar\sigma^\varepsilon}) + \varepsilon V(x_{\bar\sigma^\varepsilon})] + E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon=\infty)}\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t) \\
&\leqslant E_x g(X_{\bar\sigma^\varepsilon}) + \varepsilon.E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon<\infty)}V(X_{\bar\sigma^\varepsilon})
\end{aligned}
\tag{5.122}
$$

但 $P_x(\overline{\lim_{t\to\infty}}\,g(X_t)\geqslant0)=1$,因此

$$0\leqslant E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon=\infty)}\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t) \tag{5.123}$$

而由引理 5.36

$$\varepsilon E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon<\infty)}V(X_{\bar\sigma^\varepsilon}) = \varepsilon[V(x) - E_x I_{(\bar\sigma^\varepsilon=\infty)}\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)] \leqslant \varepsilon V(x)$$

再由(5.122),于是

$$V(x)\leqslant E_x g(X_{\bar\sigma^\varepsilon}) + \varepsilon V(x)$$

定理得证。

注 7 定理中的条件 $P_x(\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)\geqslant0)=1$,可代以:$x_0\in E$ 时,$E_x\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)>-\infty$,此时可令

$$\varepsilon(x)=\varepsilon[V(x)-E_x\overline{\lim_{t\to\infty}}g(X_t)]$$

注 8 本定理在离散情形也是成立的,此时只须要求 $g\in \boldsymbol{L}_\cdot$,且 $\forall\ x\in E_0$, $P_x(\overline{\lim_{n\to\infty}}g(X_n)\geqslant0)=1$.

§5.8 关于值函数的解

在离散情形,我们有(定理 3.26 及 §3.8)

$$V(x)=g(x)\ \vee\ TV(x)$$

因此可以从解此函数方程求得 $V(x)$,在连续情形相应的结果是什

么呢？

文献[3]§3.8的定理15叙述了这一问题：

设 $g\in L_0$，令 $\Gamma_0=\{x:g(x)=V(x)\}$，$C_0=E\backslash\Gamma_0$，则对每一个 $x\in C_0\cap\{x:V(x)<\infty\}$，$V(x)$属于特征算子 $\mathscr{U}$ 的定义域（在 $\mathscr{C}_0$ 拓扑下），并且是所谓广义的 stefan 问题的解

$$\mathscr{U}V(x)=0,x\in C_0\cap\{V(x)<\infty\}$$

$$V(x)=g(x),x\in\Gamma_0\triangleq E\backslash C_0$$

这里特征算子就是指广义无穷小算子，且对任何 $f\in\overline{\mathscr{B}}$（$\mathscr{B}$ 的完备化）

$$\mathscr{U}f(x)=\mathscr{C}_0-\overline{\lim_{U\downarrow x}}\frac{E_xf(X_{\tau(U)})-f(x)}{E_x\tau(U)}$$

其中 $\tau(U)=\inf\{t\geqslant 0:X_t\in E\backslash U\}$。

特别当过程$(X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$是一个 l 维 wiener 过程；且 $V(x)$二次可微又 $g\in L_0$ 时，则 $\mathscr{U}$ 就是 laplace 算子，所以 $V(x)$是广义 stefan 问题的解

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2}{\partial x_i}V(x)=0,x\in C_0\cap\{x:V(x)<\infty\}$$

$$V(x)=g(x),x\in E\backslash C_0$$

一般地说 stefan 问题的解不唯一，为了得到 stefan 问题的唯一解必须对 $V(x)$作其种假定。

下面考虑一种情形，在此情形我们可以得到 $V(x)$在 $\partial\Gamma_0$ 上满足所谓“光滑过去”的条件，藉此在许多时候可以确定 $V(x)$以及最优规则的表示。

设 $X=(X_t,\mathscr{F}_t,P_x)$是一维连续的标准马程，取值于$(E,\mathscr{B})$，$E\subseteq R$，$g\in L_0(A^-,A^-)$，假定$\forall\ y\in\partial\Gamma_0$，充分小的 $\varepsilon>0$，集合

$$O_\varepsilon^-(y)=\{x:y-\varepsilon<x<y\}\subseteq C_0$$

$$O_\varepsilon^+(y)=\{x:y\leqslant x<y+\varepsilon\}\subseteq\Gamma_0$$

可是，当 $y\in\Gamma_0$ 时，$V(y)=g(y)$ 且

$$O_\varepsilon^-(y) \cup O_\varepsilon^+(y) = O_\varepsilon(y) \triangleq \{x: |x-y| < \varepsilon\}$$

令 $\sigma_\varepsilon(y) = \inf\{t \geqslant 0: X_t \in E \setminus O_\varepsilon(y)\}$. 我们有下述的结论([3]之§3.8 定理 16)

设 $X=(X_t, \mathscr{F}_t, P_x), t \geqslant 0$ 是一维的连续(标准)马氏过程, $E \subseteq R, g \in \mathbf{L}_0(A^+, A^-)$, 假定

A1) $g(y) = T_{\sigma_\varepsilon}(y) g(y) + o(\varepsilon), y \in \partial \Gamma_0$

A2) 在点 $y \in \partial \Gamma_0$ 的某个邻域 $O_\varepsilon^-(y) \cup \{y\}$, 左导数 $\frac{\mathrm{d}^- g(x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^- V(x)}{\mathrm{d}x}$ 存在且连续;

A3) 对某个 $\varepsilon > 0, P_y\{X_{\sigma_\varepsilon}(y) = y - \varepsilon\} \geqslant C > 0$, 则在点 $y \in \partial \Gamma_0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}^- V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^- g(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=y \in \partial \Gamma_0}$$

关于 l 维情形见[46]。

由上述两个结论可以得到

定理 5.35 设上述条件满足, 则 $V(x)$ 是下述广义 stefan 问题的解

$$\mathscr{U} V(x) = 0, \quad x \in C_0 \triangleq E \setminus \Gamma_0$$

$$V(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_0$$

$$\frac{\mathrm{d}^- V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^- g(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=y}, \quad y \in \partial \Gamma_0, \quad O_\varepsilon^-(y) \subseteq C_0$$

$$\frac{\mathrm{d}^+ V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^+ g(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=y}, \quad y \in \partial \Gamma_0, \quad O_\varepsilon^+(y) \subseteq C_0$$

第六章　多指标最优停止

随机过程 X_t 中的 t 与其说成是时间，还不如看成为参数，其直观背景无非是依赖于 t 的一族随机变量，在单参数的情形，我们认为 t 的性态(取值范围以及全序性)与我们通常时空观下的时间是一样的，因此称 t 为时间。这样看来，依赖于多个参数的随机过程，或称多指标随机过程无疑是有实际意义的研究对象，所以讨论多指标随机过程的最优停止是十分自然的。

到了多指标情形(例如二指标)，过程 $X_{(s,t)}$ 的指标集 $\{(s,t)\}$ 就是一个偏序集，这一点使得多指标过程与多指标最优停止的理论都与单指标情形有深刻的不同。

多指标过程的最优停止最早的较系统的研究是 1966 年 Haggstrom，G. W 的文章[52]，文中作者提出了树的概念，定义了控制变量并证明了对非常特殊的过程的最优停点的存在性，[53]、[54]两文引进了增道路与策略的概念，1981 年 Walsh 在[55]中对连续两参数过程推广了可选增道路与策略的概念，Mandelbaum 和 Vanderbei[56]研究了离散两参数过程的 snell 包的结构，1982 年，Millet[57]将 B—C 拓扑引入两参数过程最优停止的研究，1983 年，Mazziotto G. 和 Szpirglas[58]利用 snell 包的方法，证明了当报酬过程 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{N}^2\}$ 是类(D)且 $\limsup\limits_{z\to\infty}X_z\leqslant X_\infty$ 时，至少存在一个最优停点的结论，1985 年[59]利用双位势理论研究了双马氏过程的最优停止问题。

本章对多指标最优停止某些最核心的内容作一叙述。

§6.1 停点、可选增道路与策略

设过程的指标集 $H=\mathscr{R}_+^2$ 或 $\mathscr{N}_+^2$ 这里 $\mathscr{R}_+$，$\mathscr{N}_+$ 分别表示非负实数或非负整数全体。

在 H 上定义偏序如下：对任一 $z=(s,t)$，$z'=(s',t')\in H$，$z\leqslant z'$ 是指 $s\leqslant s'$ 且 $t\leqslant t'$；$z<z'$ 是指 $z\leqslant z'$ 且 $z\neq z'$；$z\ll z'$ 是指 $s<s'$ 且 $t<t'$

$z=(s,t)$ 的模 $|z|$ 定义为：$|z|=s+t$；

$\overline{H}=H\cup\{\infty\}$ 为 H 上的单点紧化。

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的概率空间，$\mathscr{F}$ 的子代数族 $\{\mathscr{F}_z:z\in H\}$ 满足以下条件

F_1：对每个 $z\in H$，$\mathscr{F}_z$，是完备的；

F_2：$\forall\ z\leqslant z'$，$\mathscr{F}_z\subseteq\mathscr{F}_{z'}$；

F_3：若 $H=\mathscr{R}_+^2$，则 $\{\mathscr{F}_z\}$ 是右连续的，也即 $\mathscr{F}_z=\bigcap\limits_{z'\gg z}\mathscr{F}_{z'}$

对 $z=(s,t)$，记 $\mathscr{F}_z^1=\bigvee\limits_{v\geqslant 0}F(s,v)$，$\mathscr{F}_z^2=\bigvee\limits_{u\geqslant 0}\mathscr{F}(u,t)$

F_4：对每个 $z\in H$，$\mathscr{F}_z^1$ 和 $\mathscr{F}_z^2$ 关于 $\mathscr{F}_z$ 是条件独立的，也即 $\forall\ A\in\mathscr{F}_z^1$，$B\in\mathscr{F}_z^2$

$$P(AB|\mathscr{F}_z)=P(A|\mathscr{F}_z)\cdot P(B|\mathscr{F}_z)\qquad(6.1)$$

称 $\{\mathscr{F}_z,z\in H\}$ 是本质条件独立的，记为 $C.Q.I$、如果 $\forall\ A\in\mathscr{F}_z^1$，$B\in\mathscr{F}_z^2$，有

$$\{P(A|\mathscr{F}_z)>0\}\cap\{P(B|\mathscr{F}_z>0\}\subset\{P(AB|\mathscr{F}_z)>0\}\qquad(6.2)$$

显然 F_4 条件可推出 $C.Q.I$，且如果 F_4 条件成立，则 $\mathscr{F}_z$ 与 $\mathscr{F}_{z'}$ 关于 $\mathscr{F}_{z\wedge z'}$ 是条件独立的。

定义 6.1 在 H 中取值的随机变量 σ 称为是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，若对

每个 $z\in H$，$\{w:\sigma\leqslant z\}\in\mathscr{F}_z$.

记 $\sum=\{\sigma:\sigma$ 是 a. s. 有限的停点，且 $EX_\sigma^-<\infty\}$，$\sum_z=\{\sigma\in\sum$，且 $\sigma\geqslant z\}$. 设 σ 为一停点，记 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{z\in H}\mathscr{F}_z$

$$\mathscr{F}_\sigma=\{A\in\mathscr{F}_\infty:A\bigcap(\sigma\leqslant z)\in\mathscr{F}_z,\forall\ z\in H\}$$

对于 $\mathscr{G}$ 可测的随机变量 X，常常方便地记为 $X\in\mathscr{G}$.

停点具有许多类似于停时的性质

引理6.1 1° 若 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+{}^2\}$ 是适应过程，或 $\{X_z,,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_-{}^2\}$ 是右连续的适应过程，且 X_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\mathscr{F}_z$ 可测的，则对任何停点 σ，X_σ 是 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的；

2° 若 σ_1,σ_2 都是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，且 $\sigma_1\leqslant\sigma_2$ a. s，则 $\mathscr{F}_{\sigma_1}\subseteq\mathscr{F}_{\sigma_2}$；

3° 若 σ_1,σ_2 都是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，则 $\{\sigma_1=\sigma_2\}\in\mathscr{F}_{\sigma_2}$，$\{\sigma_1\leqslant\sigma_2\}\in\mathscr{F}_{\sigma_2}$；

4° 若 (σ_n) 为一列 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ a. s.，则 σ 也是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点；

5° 若停点列 $\sigma_n\downarrow\sigma$，则 $\mathscr{F}_\sigma=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}$.

证明 只对 $H=\mathscr{R}_+{}^2$ 的情形予以证明。

1° 首先证明右连续适应过程是循序过程，即对一切 $z\in\mathscr{R}_+{}^2$，$\mathscr{R}_z=\{z'\in\mathscr{R}_-{}^2:Z'\leqslant z\}$，$X_SI_{[\mathscr{R}_z\times\Omega]}$ 是 $\mathscr{B}(\mathscr{R}_z)\times\mathscr{F}_z$ 可测的，这里 $\mathscr{B}(\mathscr{R}_z)$ 是指 $\mathscr{R}_z$ 上 Borel 可测集的全体. 事实上，对一切 $z\in\mathscr{R}_+{}^2$，及正整数 n，令

$$X_\zeta^n(\omega)=X_{(0,0)}(\omega)I_{[\zeta-(0,0)]}$$
$$+\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}X_{(j\cdot 2^{-n},k\cdot 2^{-n})}(\omega)I_{[(\frac{(j-1)s}{2^n},\frac{(k-1)t}{2^n})<\zeta\leqslant(\frac{js}{2^n},\frac{kt}{2^n})]}\tag{6.3}$$

则 X^n 是 $\mathscr{B}(\mathscr{R}_z)\times\mathscr{F}_z$ 可测的，且

$$\lim_{n\to\infty}X_\zeta^nI_{[\mathscr{R}_z\times\Omega]}=X_\zeta I_{[\mathscr{R}_z\times\Omega]}$$

从而 $X_\zeta I_{[\mathscr{R}_z\times\Omega]}$是 $\mathscr{B}(\mathscr{R}_z)\times\mathscr{F}_z$ 可测的。

设 $B\in\mathscr{B}(\mathscr{R})$，对一切 $z\in\mathscr{R}_+^2$，由于$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$是循序过程，所以 $X_{\sigma\wedge z}$作为可测映射 $\omega\to(\sigma(\omega)\wedge z,\omega)$与$(\zeta,\omega)\to X_\zeta(\omega)$的复合是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，从而$\{w;X_{\sigma\wedge z}\in B\}\in\mathscr{F}_z$，因此$\forall\ z\in H$

$$\{X_\sigma I_{(\sigma<\infty)}\in B\}\cap(\sigma\leqslant z)=(X_{\sigma\wedge z}\in B)\cap(\sigma\leqslant z)\in\mathscr{F}_z$$

又 $X_\sigma I_{(\sigma<\infty)}=\lim\limits_{z\to\infty}X_{\sigma\wedge z}I_{(\sigma\leqslant z)}$是 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的，因此 $X_\sigma I_{(\sigma<\infty)}$为 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的，这样

$$X_\sigma=X_\infty I_{(\sigma=\infty)}+X_\sigma I_{(\sigma<\infty)}$$

是 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的。

2° 显然。

3° 设 σ_1,σ_2 是$(\mathscr{F}_z)$停点，则 $\sigma_1\vee\sigma_2$ 也是$(\mathscr{F}_z)$停点，σ_1,σ_2 都是 $\mathscr{F}_{\sigma_1\vee\sigma_2}$可测的，故对一切 $z\in\mathscr{R}_+^2$，$\{\sigma_1=\sigma_2\}\cap\{\sigma_2\leqslant z\}=\{\sigma_1=\sigma_2\}\cap\{\sigma_1\vee\sigma_2\leqslant z\}\in\mathscr{F}_z$，这表明$\{\sigma_1=\sigma_2\}\in\mathscr{F}_{\sigma_2}$，同理可证$\{\sigma_1\leqslant\sigma_2\}\in\mathscr{F}_{\sigma_2}$.

4° $\forall\ z\in\mathscr{R}_+^2$，$\{\sigma\leqslant z\}=\{\underline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant z\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{\sigma_m\leqslant z\}\in\mathscr{F}_z$.

5° 由 2°可知 $\mathscr{F}_\sigma\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}$，另一方面，对任意的 $A\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}$及 $z\in\mathscr{R}_+^2$

$$A\cap(\sigma\leqslant z)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\cap(\sigma_n\leqslant z)\in\mathscr{F}_z$$

所以 $A\in\mathscr{F}_\sigma$，因而 $\mathscr{F}_\sigma=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}$. 证毕。

要注意的是，单参数停时的许多性质并不能都推广到停点的情形，例如

(1) 对于两个$(\mathscr{F}_z)$停点 σ_1,σ_2，$\sigma_1\wedge\sigma_2$，不一定是停点，$\{\sigma_1\leqslant\sigma_2\}$也不一定属于 $\mathscr{F}_{\sigma_1}$；

(2) 对于停点列(σ_n)，$\sigma=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n$，不一定有 $\mathscr{F}_\sigma=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\sigma_n}$.

与停点的概念有紧密联系的是策略的概念。

定义 6.2 设$\{U_p;p\in\mathscr{N}_+\}$为非降的停点列，令$\tau=\inf\{p:U_{p+1}=U_p\}$，$\inf\Phi=\infty$，对停点$\sigma$，称$T=((U_p),\tau)$为从$\sigma$出发的策略，若

i) $U_0\equiv\sigma$；

ii) 当$p<\tau$时，$U_{p+1}\in D(U_p)\equiv\{U_p+(0,1),U_p+(1,0)\}$，当$p\geqslant\tau$时，$U_p=U_\tau$；

iii) $U_{p+1}\in\mathscr{F}_{U_p}$

其中$D(U_p)$称为U_p的直接后继。

所有从σ出发的策略集记为$\mathscr{Q}_\sigma$，并记$\mathscr{Q}=\mathscr{Q}_0$，易证对$T=((U_p),\tau)\in\mathscr{Q}$，$\tau$为$\mathscr{F}_{U_p}$停时，$U_\tau$为$(\mathscr{F}_Z)$停点。事实上

$$(\tau\leqslant p)\cap(U_p\leqslant z)=\bigcup_{i=1}^{p}(U_i=U_{i+1})\cap(U_p\leqslant z)\in\mathscr{F}_Z$$

$$(U_\tau\leqslant z)=\bigcup_{p\in\mathscr{N}_+}\{U_p\leqslant z\}\cap\{\tau=p\}\in\mathscr{F}_z$$

U_τ是根据策略$T=((U_p),\tau)$作出来的停点，为了表明它们的依赖关系，记$U_\tau=\alpha(T)$。

定理 6.2 设$\{\mathscr{F}_Z,z\in\mathscr{N}_+^2\}$满足$F_4$条件，$\sigma_1$、$\sigma_2$是两个在$\mathscr{N}_+^2$取值的$(\mathscr{F}_Z)$停点，$\sigma_1\leqslant\sigma_2$，则存在策略$T=((U_p),\tau)\in\mathscr{F}_{\sigma_1}$，使得$U_\tau=\sigma_2$ a.s.

证明 令$U_0=\sigma_1$，假设满足定义 6.2 的停点$U_1,U_2\cdots,U_p$已定义好，令$Q_z=\{U_p=z\}$，$A=Q_z\cap\{\sigma_2=z\}$，$B=Q_z\cap\{\sigma_2=z+(i,0)$，某个$i\geqslant1\}$，则$A\cap B=\varnothing$，令$B_0=\{P(B|\mathscr{F}_Z)>0\}$，由$F_4$条件，$P(A|\mathscr{F}_Z)\cdot P(B|\mathscr{F}_Z)=P(AB|\mathscr{F}_Z)=0$，而$P(A|\mathscr{F}_Z)=I_A$，故当$\omega\in A$时，$P(B|\mathscr{F}_Z)=0$，即$\omega\notin B_0$. 因而$A\cap B_0=\varnothing$，记$C=Q_z-A-B_0$，定义

$$U_{p+1}=\begin{cases}z, & w\in A\\ z+(1,0), & w\in B_0\\ z+(1,0), & w\in C\end{cases}\tag{6.5}$$

则U_{p+1}是$\mathscr{F}_{U_p}$可测的，这是因为$\forall\ z,z'\in\mathscr{R}_+^2$，$\{U_{p+1}=z'\}\cap\{U_p=z\}\in\mathscr{F}_Z$. 由(6.5)式可知，当$p<\tau$时，$U_{p+1}\in D(U_p)$，当$p\geqslant\tau$时，$U_p=$

$U_\tau=\sigma_2$. 证毕。

定理 6.2 表明，在 F_4 条件下，任意两个停点均可由策略连接起来。从而对任意的有限停点 σ，总存在策略 $T=((U_p),t)$，使得 $\sigma=U_\tau$

下面引入两参数鞅与上鞅的定义并介绍相应的 Doob 停止定理

定义 6.3　两指标过程 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in H\}$ 称为上鞅，如果 $\forall\ z\in H, E|X_z|<\infty$ 且 $\forall\ z\leqslant z'$

$$E(X_{z'}\mid\mathscr{F}_z)\leqslant X_z \tag{6.6}$$

若 X 与 $-X=\{-X_z,\mathscr{F}_z,z\in H\}$ 均为上鞅，则称 X 为鞅。

注 1　对于两参数过程，相应于鞅还有所谓强鞅、弱鞅，双鞅的概念。设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in H\}$ 为可积过程，记 $\mathscr{F}_z{}^*=\mathscr{F}_z{}^1\vee\mathscr{F}_z{}^2$，对 $z=(s,t)\ll z'=(s',t')$，令

$$X([z,z'])=X_{(s',t')}-X_{(s,t')}-X_{(s',t)}+X_{(s,t)}$$

如果将(6.6)换为

$$E(X([z,z'])\mid\mathscr{F}_z)=0 \tag{6.7}$$

则称 X 为弱鞅；如果将(6.7)中 $\mathscr{F}_z$ 换为 $\mathscr{F}_z{}^*$，则称 X 为强鞅；如果对固定的 t，$\{X_{(s,t)},\mathscr{F}_s{}^1;s\in\mathscr{R}_+$ 或 $\mathscr{N}_+\}$ 为单参数鞅，则称 X 为 1—鞅，类似地可定义 2—鞅，如果 X 既是 1—鞅，又是 2—鞅，则称 X 为双鞅。

类似可定义强上鞅，弱上鞅与双上鞅，容易证明强鞅是双鞅，双鞅是鞅，鞅是弱鞅，F_4 条件就是保证了鞅为双鞅。[72]

定理 6.3　设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+^2\}$，是上鞅，$\sigma_1\leqslant\sigma_2$ 是两个有界停点，则

$$E(X\sigma_2|\mathscr{F}_{\sigma_1})\leqslant X_{\sigma_1} \tag{6.8}$$

证明　由于 X 是可积过程，σ_1,σ_2 是有界停点，因此 $E|X_{\sigma_i}|<\infty, i=1,2$，由定理 6.2 存在策略 $T=((U_p),\tau)\in\mathscr{F}_{\sigma_1}$，使得 $U_1=\sigma_1$，$U_\tau=\sigma_2$. 记 $Q_z=\{U_p=z\}$，$Q\in\mathscr{F}_{U_p}$，且 $Q\subset Q_z$，A，$B_{0'}$ 如定理 6.2 所定

义，则

$$\int_Q X_{U_{p+1}} = \int_{Q\cap A} X_z + \int_{Q\cap B_0} X_{z+(1,0)} + \int_{Q\cap(Q_z-A-B_0)} X_{z+(0,1)}$$

注意到 $Q\cap A=Q\cap\{U_p=z\}\cap\{\sigma_2=z\}\in\mathscr{F}_z$，$A\cap B_0=Q\cap Q_z\cap B_0\in\mathscr{F}_z$，$Q\cap\{Q_z-A-B_0\}\in\mathscr{F}_z$. 所以

$$\int_{Q\cap B_0} X_{z+(1,0)} \leqslant \int_{Q\cap B_0} X_z$$

$$\int_{Q\cap(Q_z-A-B_0)} X_{z+(1,0)} \leqslant \int_{Q\cap(Q_z-A-B_0)} X_z$$

从而

$$\int_Q X_{U_{p+1}} \leqslant \int_Q X_z = \int_Q X_{U_p}$$

由于 σ_2 是有界停点，故存在 N，使得 $U_N=\sigma_2$，对于任意的 $Q\in\mathscr{F}_{\sigma_1}$

$$\int_Q X_{\sigma_2} = \int_Q X_{U_N} \leqslant \int_Q X_{U_{N-1}} \leqslant \cdots \leqslant \int_Q X_{\sigma_1}$$

(6.8)式得证。

为了将 Doob 停止定理推广到一般的情形，我们需涉及一点关于两指标鞅的收敛性的知识。由于$\mathscr{R}_+^2$ 或$\mathscr{N}_+^2$ 上存在着无穷多条趋于∞的增道路，因此多指标鞅的收敛性就要复杂得多。

引理 6.4′ 设(E,d)是完备的距离空间，H 为定向集，$\forall\ z\in H$，$X_z\in E$，若对于 H 中一切递增的序列$\{t_n: n\in\mathscr{N}_+\}$，元素列$\{X_{t_n}, n\in\mathscr{N}_+\}$是收敛的，则$\{X_z, z\in H\}$是网收敛的。

证明 若$\{X_z, z\in H\}$不是网收敛的，则由 E 的完备性，可知$\{X_z, z\in H\}$不是 Cauchy 网。于是存在 $\varepsilon>0$，使得$\forall\ z_0\in H$ 存在 $z'\in H$，$z'\geqslant z$，$d(X_z, X_{z'})>\varepsilon$. 于是存在一个单调增的序列$\{z_n: n\in\mathscr{N}_+\}$，而 $d(X_{z_n}, X_{z_{n+1}})>\varepsilon$，矛盾。

引理 6.5 1) 设 $X=\{X_z, \mathscr{F}_z, z\in H\}$是上鞅，且$\sup\limits_{z\in H}E\,X_z^-<\infty$，则$\{X_z, z\in H\}$必依概率收敛于可积的随机变量 X_∞；

2）设 X 是非正上鞅，且$\sup\limits_{z\in\Pi}E|X_z|^p<\infty(p>1)$，则 X_z 必 L^p 收敛于某一 $X_\infty\in L^p$；

3）设 X 是一致可积的上鞅，则必 L^1 收敛于某可积的随机变量 X_∞；

（在 2），3）情形下，均有 $E(X_\infty|\mathscr{F}_z)\leqslant X_z$，即右闭。）

4）设 $X\in L^p(\Omega)$，$p\geqslant 1$，则

$$E(X|\mathscr{F}_z)\xrightarrow{L^p}E(X|\bigvee_{z\in\Pi}\mathscr{F}_z)$$

证明　1）令 $\mathscr{E}=\{$全体 $a.s.$ 有限的随机变量$\}$，在 $\mathscr{E}$ 上引入距离

$$d(\xi,\eta)=E\frac{|\xi-\eta|}{1+|\xi-\eta|}$$

则$(\mathscr{E},d)$是一个完备的距离空间，且 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi\Leftrightarrow d(\xi_n,\xi)\to 0$. 考虑 Π 中任何递增的序列$\{Z_n:n\in\mathscr{N}_+\}$，则$\{X_{Z_n}:n\in\mathscr{N}_+\}$是单指标的上鞅，由$\sup\limits_{z\in\Pi}E\,X_z^-<\infty$，可见$\{X_{Z_n}:n\in\mathscr{N}_+\}$依概率收敛，也将按距离 d 收敛，由引理 6.4 即知$\{X_z,z\in\Pi\}$是网收敛的，从而存在 X_∞使$\{X_z,z\in\Pi\}$依概率收敛于 X_∞. 注意到$\sup\limits_{z\in\Pi}E\,X_z^-<\infty$与$\sup\limits_{z\in\Pi}E|X_z|<\infty$在上鞅的情形是等价的，由 Fatou 引理，$E|X_\infty|<\infty$；

2）考虑完备的距离空间 $L^p(\Omega)=\{\xi$ 是随机变量，$E|\xi|^p<\infty\}$，类似地可证；

3）考虑 $L^1(\Omega)$。由于在 2）、3）情形下，$\{X_z,z\in\Pi\}$是 $L^p(p\geqslant 1)$ 收敛于 X_∞，$\{X_z,z\in\Pi\}$是一致可积的，由 Fatou 引理即得：$E(X_\infty|\mathscr{F}_z)\leqslant\lim\limits_{\substack{z'>z\\ z'\to\infty}}E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)\leqslant X_z$，右闭；

4）若 $X\in L^p(\Omega)$，则 $M_z=E(X|\mathscr{F}_z)$是 L^p 有界鞅，由 2），3）$M_z\xrightarrow{L^p}M_\infty$. 显然 M_∞是 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{z\in\Pi}\mathscr{F}_z$ 可测的，由于$\{M_z\}$是右闭的，即

$$M_z=E(M_\infty|\mathscr{F}_z)\quad a.s.$$

$\forall A\in\mathscr{F}_z$，$\int_A M_\infty=\int_A M_z=\int_A X$. 由测度扩张的唯一性，易知

$\forall\ A\in\mathscr{F}_\infty$亦有上式，所以 $M_\infty=E(X|\bigvee_{z\in\Pi}\mathscr{F}_z)$.

定理 6.6　设$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+^2\}$是上鞅，而且其负部一致可积，$\sigma_1\leqslant\sigma_2$ 是两个停点，则

$$E(X_{\sigma_2}|\mathscr{F}_{\sigma_1})\leqslant X_{\sigma_1}\quad a.s. \tag{6.9}$$

证明　对每一正整数 n，令

$$\sigma_n^{(1)}=\sigma_1 I_{[\sigma_1\leqslant(n,n)]}+(\infty,\infty)I_{[\sigma_1\leqslant(n,n)]^c}$$

$$\sigma_n^{(2)}=\sigma_2 I_{[\sigma_2\leqslant(n,n)]}+(\infty,\infty)I_{[\sigma_1\leqslant(n,n)]^c}$$

易知$\sigma_n^{(1)},\sigma_n^{(2)}$都是$(\mathscr{F}_z)$停点，且$\sigma_n^{(1)}\leqslant\sigma_n^{(2)}$. 因为$\{z\in\mathscr{N}_+^2;z\leqslant(n,n);(\infty,\infty)\}$与$\{z\in\mathscr{N}_+^2;z\leqslant(n,n);(n-1,n+1)\}$序同构，而由引理 6.5 中知，在本定理的条件下，$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{\Pi}\}$是右闭的上鞅，由定理 6.3

$$E(X_{\sigma_n^{(2)}}|\mathscr{F}_{\sigma_n^{(1)}})\leqslant X_{\sigma_n^{(1)}},\quad n\geqslant 1$$

而

$$\begin{aligned}&E(X_{\sigma_n^{(2)}}|\mathscr{F}_{\sigma_n^{(1)}})I_{(\sigma_1=\sigma_n^{(1)})}\\=&E(X_{\sigma_n^{(2)}}|\mathscr{F}_{\sigma_n^{(1)}})I_{(\sigma_1=\sigma_n^{(1)})}\\\leqslant&X_{\sigma_1}I_{(\sigma_n^{(1)}=\sigma_1]}\end{aligned}$$

注意到$\sigma_n^{(i)}\downarrow\sigma_i(i=1.2)$，$\lim\limits_{n\to\infty}X_{\sigma_n^{(2)}}=X_{\sigma_2}$. 由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}&E(X_{\sigma_2}|\mathscr{F}_{\sigma_1})I_{[\sigma_1=\sigma_n^{(1)}]}\\\leqslant&\varliminf_{m\to\infty}E(X_{\sigma_m^{(2)}}|\mathscr{F}_{\sigma_1})I_{[\sigma_1=\sigma_n^{(1)}]}\\\leqslant&X_{\sigma_1}I_{[\sigma_1=\sigma_n^{(1)}]}\end{aligned}$$

而$[\sigma_1=\sigma_n^{(1)}]\uparrow\Omega$，所以(6.9)式成立。

现在转到 $\Pi=\mathscr{R}_+^2$ 情形讨论策略与可选增道路的概念

定义 6.4　称$\{U_t;t\geqslant0\}$为可选增道路，如果

i) $\forall\ z\in\mathscr{R}_+^2$，$U_t$ 是$(\mathscr{F}_z)$停点；

ii) 当 $t'\geqslant t$ 时 $U_{t'}\geqslant U_t$；

iii) 对几乎所有的 ω，映射 $t\to U_t$ 连续。

定义 6.5　设$\{U_t,t\geqslant0\}$为可选增道路，τ 为$(\mathscr{F}_{U_t})_{t\geqslant0}$停时，则

称 $T=((U_z),\tau)$ 为策略。

引理 6.7 设 $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 是可选增道路，τ 是 $(\mathscr{F}_{U_t})_{t\geqslant 0}$ 停时，则 U_τ 是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点。

证明 因 $\{\mathscr{F}_z;Z\in\mathscr{R}_+^2\}$ 是右连续的，故 $\mathscr{F}_Z=\bigcap\limits_{\zeta\gg Z}\mathscr{F}_\zeta$. $\forall\ Z\in\mathscr{R}_+^2$, $\{U_\tau\leqslant Z\}=\bigcap\limits_{\zeta\gg Z}\{U_\tau\ll\zeta'\}$，从而只要证对任何 $\zeta>z, z<\zeta'<\zeta$, $\{U_\tau\ll\zeta'\}\in\mathscr{F}_\zeta$. 记 Q_+ 为全体有理数，则

$$\{U_\tau\ll\zeta'\}=\bigcup_{r\in Q_+}\{\tau\leqslant r\}\cap\{U_r\leqslant\zeta'\}\cap\{U_\tau\ll\zeta'\}$$

因此 $\{U_\tau\ll\zeta'\}\in\mathscr{F}_{\zeta'}\subset\mathscr{F}_\zeta$.

下面的定理表明，对任意两个有限停点 σ_1,σ_2，存在一条可选增道路将它们连接起来，而且存在一个策略 $T=((U_t),\tau)$，使得 $U_\tau=\sigma_2$ a. s.

定理 6.8 设 $\{\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$ 满足 F_4 条件，$\sigma_1\leqslant\sigma_2$ 是两个有限的停点，则必存在策略 $T=((U_t),\tau)$ 使得 $U_\tau=\sigma_2$ a. s.

证明 对 $i=1,2$，令

$$\sigma_i^n=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{j}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)I_{[((j-1)2^{-n},(k-1)2^{-n})\leqslant\sigma_i<(j2^{-n},k2^{-n})]}\tag{6.10}$$

则 $\sigma_i^n(i=1,2)$ 是在平面上二进有理点集 Q_n 中取值的停点，且 $\sigma_1^n\leqslant\sigma_2^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_i^n=\sigma_i, i=1,2$.

对每个 n，由定理 6.2，存在策略 $T^n=((U_r^n),\tau^n)$，使得 $U_{\tau^n}^n(\omega)=\sigma_2^n$, $U_0^n=\sigma_1^n$，其中 (U_r^n) 是在上述 Q_n 中取值的停点列。

记 $U_r^n=(S_r^n,T_r^n)$，定义

$$U_t^n=U_p^n+(2^nt-p)(U_{p+1}^n-U_p^n),\ p2^{-n}\leqslant t\leqslant(p+1)2^{-n}\tag{6.11}$$

则可证明 $\{U_t^n,t\geqslant 0\}$ 是可选增道路，$U_0^n=\sigma_1^n$，事实上，对任意的 $z=(z_1,z_2)$，当 $p2^{-n}<t<(p+1)2^{-n}$ 时

$$\{U_t^n \leqslant z\} = \sum_{j=1}^{[2^n z_1]} \sum_{k=1}^{[2^n z_2]} \{U_p^n = (j2^{-n}, k2^{-n})$$

$$U_{p+1}^n \leqslant \frac{z-(j2^{-n}, k2^{-n})}{2^n t - p} + (j2^{-n}, k2^{-n})\} \in \mathscr{F}_z$$

而当 $t = p2^{-n}$ 时，$\{U_t^n \leqslant z\} = \{U_p^n \leqslant z\} \in \mathscr{F}_z$ 是明显的。可见 $\{U_t^n\}$ 是 $\mathscr{R}_+^2$ 中取值的停点列，且关于 t，U_t^n 非降且连续，这表明 (U_t^n) 是 $\mathscr{R}_+{}^2$ 中可选增道路。

注意到，对每个固定的 ω，$\sigma_2(\omega) \equiv (\sigma_2^{(1)}(\omega), \sigma_2^{(2)}(\omega))$ 的两个分量均是有限的实数，记 $D(\omega) = \sigma_2^{(1)}(\omega) + \sigma_2^{(2)}(\omega)$，由定理 6.2 的证明看出，对于 Q_n 中的策略 T^n，有 $\tau^n \leqslant 2^n \times (\sigma_2^n(\omega)$ 中两个分量之和）$\leqslant 2^n D(\omega) + 1$. 换言之，当 $p > 2^n D(\omega) + 1$ 时，$U_p^n \equiv \sigma_2^n(\omega)$ a. s. 从而由(6.11)式，当 $t > D(\omega) + \frac{1}{2}$ 时，对一切 n

$$U_t^n(\omega) \equiv U_{\tau^n}^n(\omega) = \sigma_2^n(\omega) \quad a.\ s. \tag{6.12}$$

对于有限区间 $[0, D(\omega) + \frac{1}{2}]$ 上的函数列 $U_t^n = (s_t^n, T_t^n)$，因为 $\{s_t^n\}$，$\{T_t^n\}$ 都是有界数集，用对角线选取法不难选取一个子列（仍记为）$\{s_r^n\}$，$\{T_r^n\}$，使得对一切 $r \in Q_+ \cap [0, D(\omega) + \frac{1}{2}]$，有

$$S_r^n \to S_r, \ T_r^n \to T_r \tag{6.13}$$

可以证明对一切 $n \geqslant 1$

$$|S_t^n - S_s^n| \leqslant 3|t-s|, \ |T_t^n - T_s^n| \leqslant 3|t-s| \tag{6.14}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\forall\ t \in [0, D(\omega) + \frac{1}{2}]$，可取 $r \in Q_+ \cap [0, D(\omega) + \frac{1}{2}]$，使 $|t-r| < \frac{\varepsilon}{12}$，而由于

$$\begin{aligned} &|S_t^{n+p} - S_t^n| \\ \leqslant &|S_t^{n+p} - S_r^{n+p}| + |S_r^{n+p} - S_r^n| + |S_r^n - S_t^n| \\ \leqslant &6|t-r| + |S_r^{n+p} - S_r^n| \end{aligned}$$

由(6.13)及 $6|t-r| < \frac{\varepsilon}{2}$，存在 N 当 $n > N$ 时，$\forall\ t \in [0, D(\omega) + \frac{1}{2}]$

$$|S_t^{n+p}-S_t^n|<\varepsilon$$

这表明$\{S_t^n\}$是一致 Cauchy 序列，于是S_t^n一致收敛于某S_t，同理T_t^n一致收敛于T_t. 这样对于$t\in[0,D(\omega)+\frac{1}{2}]$

$$U_t^n \text{ 一致收敛于 } U_t=(S_t,T_t)$$

而当$t>D(\omega)+\frac{1}{2}$时，$U_t(\omega)=\lim_{n\to\infty}U_t^n(\omega)=\sigma_2(\omega)$. 令

$$\tau=\inf\{t\geq 0: U_t(\omega)=\sigma_2(\omega)\}$$

显然$\tau<\infty$，且由U_t的连续性，可知

$$U_\tau=\sigma_2 \quad a.s.$$

证毕

注 2 (6.14)式补证如下：$\forall\ t,h\geq 0, t\geq h$，如$|t-h|>\frac{1}{2^n}$，且$p2^{-n}\leqslant h\leqslant(p+1)2^{-n}$，$q2^{-n}\leqslant t\leqslant(q+1)2^{-n}$，则

$$\begin{aligned}
&|S_t^n-S_h^n|\\
&=|S_q^n+(2^nt-q)(S_{q+1}^n-S_q^n)-S_p^n-(2^nh-p)(S_{p+1}^n-S_p^n)|\\
&\leqslant|S_q^n-S_p^n|+|S_{p+1}^n-S_p^n|+|S_{q+1}^n-S_p^n|\\
&\leqslant|q-p|2^{-n}+2\cdot 2^{-n}\leqslant 3|t-h|.
\end{aligned}$$

如果$|t-h|\leqslant\frac{1}{2^n}$，显然$|S_t^n-S_h^n|\leqslant 2|t-h|$.

注 3 本定理的意义在于将二维的停点σ_1,σ_2用一条依赖于单参数的道路$\{U_t,t\geq 0\}$将其连结，由此将两指标的最优停止化为单参数的问题来处理。

虽然对于平面上停点σ总对应着一条从原点出发的可选增道路及策略T，使得$\sigma=\alpha(T)$，但对于三维空间上的停点都不一定能用一个策略来表示。[54]

对于连续两参数的随机过程有下面的停止定理。

称上鞅$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$是类$R$的，如果存在右连续的上鞅序列$\{X_z^n,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$，使得$X_z^n\uparrow X_z(n\to\infty)$.

定理 6.9 设U,V是有界的$(\mathscr{F}_z)$停点，且$U\leqslant V$，$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$是类$R$上鞅，则

$$E(X_V|\mathscr{F}_U)\leqslant X_U$$

证明 对每个正整数 p,令

$$U_p=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j2^{-p},k2^{-p})I_{[((j-1)2^{-p},(k-1)2^{-p})\leqslant U<(j2^{-p},k2^{-p})]}$$

$$V_p=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j2^{-p},k2^{-p})I_{[((j-1)2^{-p},(k-1)2^{-p})\leqslant V<(j2^{-p},k2^{-p})]}$$

则 $U_p\leqslant V_p$,且是在 Q_p 中取值的有界停点,由定理 6.3,$E(X^n_{U_p}|\mathscr{F}_{U_{p+1}})\leqslant X^n_{U_{p+1}}$,因此 $X^n_0,\cdots,X^n_{U_{p+1}},X^n_{U_p},\cdots,X^n_{U_1}$ 为上鞅。由于 $U_p\downarrow U$,且 X^n_z 是右连续的,有 $\lim\limits_{p\to\infty}X^n_{U_p}=X^n_U$,而 $\lim\limits_{p\to\infty}EX^n_{U_p}\leqslant EX^n_{U_1}<\infty$,$\{X^n_{U_p}\}_{p\in\mathscr{N}}$ 是一致可积的,于是 $X^n_0,X^n_U,\cdots,X^n_{U_2},X_{U_1}$ 是上鞅,另一方面,由 $U_p\leqslant V_p$,$X^n_0,X^n_U,\cdots,X^n_{U_p},X^n_{V_p},\cdots,X^{(n)}_{V_1}$ 也是上鞅,同理可知 X^n_0,$X^n_U,X^n_V,X^n_{V_1}$ 是上鞅,此即 $E(X^n_V|\mathscr{F}_U)\leqslant X^n_U$. 由假设 $X^n_z\uparrow X_z$,且 $-\infty<EX^1_V\leqslant EX^n_V\leqslant EX^n_U$,应用单调收敛定理,则得

$$E(X_V|\mathscr{F}_U)=\lim_{n\to\infty}E(X^n_V|\mathscr{F}_V)\leqslant X_U$$ 证毕

由定理 6.9 显然可知:如 $\{X_z,\mathscr{F}_z\}$ 是类 R 上鞅,$\{U_t,t\geqslant 0\}$ 是有界的可选增道路,则 $\{X_{U_t},\mathscr{F}_{U_t},t\geqslant 0\}$ 为单参数上鞅。

下面的定理表明:在两参数情形,求最优停点可化为所谓求最优策略的问题。

记 $\mathscr{Q}^*_z=\{T\in\mathscr{Q}_z;T=((U_t),\tau),\tau<\infty\quad a.s.\}$,$\mathscr{Q}^*=\mathscr{Q}^*_{(0,0)}$. 对任意的 $T\in\mathscr{Q}^*$,定义

$$X_T=X_{\sigma(T)}\triangleq X_{U_\tau}\tag{6.15}$$

定理 6.10 设 $\{\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$ 满足 F_4 条件,则

$$\sup\{EX_\sigma;\sigma\in\sum\}=\sup\{EX_T;T\in\mathscr{Q}^*\}$$

证明 因为 $\forall\ \tau\in\mathscr{Q}^*$,$U_\tau$ 是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点,所以

$$\sup\{EX_T;T\in\mathscr{Q}^*\}\leqslant\sup\{EX_\sigma;\sigma\in\sum\}$$

而对于任意的 $\sigma\in\sum$,由定理 6.8,存在 $T\in\mathscr{Q}^*$,使得 $\sigma=U_\tau$. 因此

$$\sup\{EX_\sigma \in \sum\} \leqslant \sup EX_T : T \in \mathscr{Q}^*\}$$

今后总假定报酬过程$\{X_z; z\in\mathscr{N}_+^2\}$是可积的，也即$\forall z\in\mathscr{N}_+^2, E|X_z|<\infty$.

§6.2 离散两指标的最优停止

本节设指标集$H=\mathscr{N}_+^2$. 我们考虑一类更为广泛的最优停止问题。

称$X^1=\{X_z, \mathscr{F}_z\}$为停止报酬过程，它表示停在某Z处所获得的停止报酬；称$X^2=\{X_{z,z'}, \mathscr{F}_z, z\in\mathscr{N}_+^2, z'\in D(z)\}$为转移报酬过程，相应于策略$T=((U_n),\tau)\in\mathscr{Q}$，定义报酬

$$X_T=\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n X_{U_n,U_{n+1}}+\alpha^\tau X_{U_\tau} \tag{6.16}$$

其中$\alpha\in(0,1)$，称为折扣因子，这里右边理解为当$\tau=0$时，和式为零，如果$X^2\equiv 0$，且$\alpha=1$，则(6.16)式与(6.15)式一致，因此讨论(6.16)形式的最优策略问题包含了最优停点问题；如果$X^1\equiv 0$，$\tau\equiv\infty$，则$X_T=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n X_{U_n U_{n+1}}$，这种不停止的策略正是动态规划中所研究的内容。[71]

本节中假定X^1满足A^+条件，即

$$E\sup_{z\in\mathscr{N}^2} X_z^+<\infty \tag{6.17}$$

我们从有限情形开始，即限制指标在$z^N=\{Z\in\mathscr{N}_+^2; (0,0)\leqslant Z\leqslant(N,N)\}$之中，此时只须考考虑步数$\leqslant 2N$的策略，记

$$\mathscr{Q}_z^N=\{T=((U_n)_{n\leqslant 2N},\tau)\in\mathscr{Q}|U_0=z, \tau\leqslant(N,N)\}$$

$$\gamma^N(Z)=\operatorname{esssup}\{E(X_T|\mathscr{F}_z): T\in\mathscr{Q}_z^N\}$$

于是

$$\gamma^N(Z)=X_{(N,N)}^1 \tag{6.18}$$

下面的定理将证明：$\forall\ z\in Z^N$

$$\gamma^N(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\gamma^N(z')\mid\mathscr{F}_z)\qquad(6.19)$$

这样由(6.18)，(6.19)，便可用后退归纳法定义出每一个 $\gamma^N(z)$，$z\in z^N$.

定义 6.4　称 $T=((U_n)_{n\leqslant 2N},\tau)\in\mathscr{D}_z^N$ 为可取策略，如果 $\gamma^N(U_\tau)=X_{U_\tau}$，且在 $\tau>n$ 上

$$\gamma^N(U_n)=E(X_{U_nU_{n+1}}+\alpha\gamma^N(U_{n+1})\mid\mathscr{F}_{U_n})\qquad(6.20)$$

可取策略的直观意义是每一步都选取达到 max 的最优路线

定理 6.11　1) $\forall\ z\in z^N$

$$\gamma^N(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\gamma^N(z')\mid\mathscr{F}_z)$$

2) 若 $T^*\in\mathscr{Q}_z^N$ 是可取的，则

$$\gamma^N(z)=E(X_{T^*}\mid\mathscr{F}_z)$$

且最优。

本定理的证明完全类同于定理 6.12 以及定理 6.13 之(6.30)式与定理 6.14，这里就不详细给出了。

现在讨论无限阶段的最优策略，假设$\forall\ T\in\mathscr{Q}_z$

$$E(\sum_{i=0}^{\tau}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}})<\infty\qquad(6.23)$$

$$\gamma(z)=\text{esssup}\{E(X(T)\mid\mathscr{F}_z);T\in\mathscr{Q}_z\}\qquad(6.24)$$

$$R(\gamma)(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\gamma(z')\mid\mathscr{F}_z)\qquad(6.25)$$

对任意的 $\sigma\in\Sigma$ 及 $\sigma'\in\{\sigma\}\cup\mathscr{D}(\sigma)$，定义

$$Q(\gamma)(\sigma,\sigma')=I_{(\sigma'=\sigma)}X_\sigma+I_{(\sigma'>\sigma)}E(X_{\sigma\sigma'}+\alpha\gamma(\sigma')\mid\mathscr{F}_\sigma)$$

由于$\mathscr{N}_+^2$ 是可列集，容易证明：$\forall\ \sigma\in\Sigma$

$$\gamma(\sigma)=\text{esssup}\{E(X(T)\mid\mathscr{F}_\sigma);T\in\mathscr{Q}_\sigma\}\qquad(6.26)$$

$$R(\gamma)(\sigma)=X_\sigma\vee\max_{u\in D(\sigma)}E(X_{\sigma,u}+\alpha\gamma(u)\mid\mathscr{F}_\sigma)\qquad(6.27)$$

定理 6.12　设(6.23)成立，则 $\gamma(z)$满足 Bellman 方程

$$\gamma(z)=R(\gamma)(z)$$

证明 1° 对$\forall\ T=((U_n),\tau)\in\mathscr{Q}_z$

$$
\begin{aligned}
&E(X(T)|\mathscr{F}_z)\\
&=E(\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n X_{U_n,U_{n+1}}+\alpha^\tau X_{U_\tau}|\mathscr{F}_z)\\
&=I_{(\tau=0)}X_z+I_{(\tau>0)}E(X_{z,U_1}+\alpha J_T(U_1)|\mathscr{F}_z)
\end{aligned}
$$

其中 $J_T(U_1)=E(\sum_{n=1}^{\tau-1}\alpha^{n-1}X_{U_n,U_{n+1}}+\alpha^{\tau-1}X_{U_\tau}|\mathscr{F}_{U_1})$，将$((U_n)_{n=1},\tau)$看成是 $\mathscr{Q}_{U_1}$中的策略，于是 $J_T(U_1)\leqslant\gamma(U_1)$。从而

$$
\begin{aligned}
&E(X(T)|\mathscr{F}_z)\\
&\leqslant I_{(\tau=0)}X_z+I_{(\tau>0)}E(X_{z,U_1}+\alpha\gamma(u)|\mathscr{F}_z)\\
&\leqslant X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{z,z'}+\alpha\gamma(z')|\mathscr{F}_z)\\
&=R(\gamma)(z)
\end{aligned}
$$

由此，$\gamma(z)\leqslant R(\gamma)(z)$.

2° 下面证明 $\gamma(z)\geqslant R(\gamma)(z)$，我们只须证明

$$\gamma(z)\geqslant\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\gamma(z')|\mathscr{F}_z)$$

任取 $z'\in\mathscr{D}(z)$，以及任意的 $T'\in\mathscr{Q}_{z'}$，记 $T'=((U_n)_{n=1},\tau)$，其中 $U_1=z'$，$\tau=\inf\{n\geqslant1;U_n=U_{n+1}\}$. 令 $U_0=z$，则 $T=((U_n)_{n\geqslant0},\tau)\in\mathscr{Q}_z$. 于是

$$
\begin{aligned}
\gamma(z)\geqslant E(X(T)|\mathscr{F}_z)&=E(X_{zz'}+\alpha X_{z'U_2}+\cdots+\alpha^\tau X_{U_\tau}|\mathscr{F}_z)\\
&=E\{X_{zz'}+\alpha E(X_{U_1U_2}+\cdots+\alpha^{\tau-1}X_{U_\tau}|\mathscr{F}_{z'})|\mathscr{F}_z\}\\
&=E\{X_{zz'}+\alpha E(X(T')|\mathscr{F}_{z'})|\mathscr{F}_z\}
\end{aligned}
$$

由于 $\tau\in\mathscr{Q}_{z'}$ 的任意性，上式表明

$$\gamma(z)\geqslant\max_{z'\in D(z)}(X_{zz'}+\alpha\gamma(z')|\mathscr{F}_z)$$

证毕

注 4 条件(6.23)是为了保证 $EX(T)$有意义，如果 $\alpha<1$，则当 $E\sup\{X_{zz'}^+;z\in\mathscr{N}_+^2,z\in D(z)\}<\infty$时，(6.23)总是成立的；如果 $\alpha=1$，则当 τ 一致有界时，对于可积的转移报酬$\{X_{zz'}\}$，(6.23)也成立。

现在来研究什么样的策略是最优的。

定义 6.5　策略 $T=((U_n),\tau)$ 称为是可取的，如果 $\gamma(U_\tau)=X_{U_\tau}$，且在 $\tau>n$ 上

$$\gamma(U_n)=E(X_{U_nU_{n+1}}+\alpha\gamma(U_{n+1})\mid\mathscr{F}_{U_n}),\quad a.s.\quad(6.28)$$

这里可取的直观意义是"走最好的方向，停在非停不可之时"。

首先证明在 $\mathscr{D}_z$ 中存在着可取的策略。

令 $U_0=z$，记 $z^1=z-(0,1)$，$z^2=z+(1,0)$，$z^0=z$，作 Ω 的剖分

$$\Omega=H_{zz^0}\cup H_{zz^1}\cup H_{zz^2}$$

其中

$$H_{zz^0}=\{\omega;\gamma_z=X_z\}$$

$$H_{zz^1}=\{\omega;\gamma(z)=E(X_{zz^1}+\alpha\gamma(z^1)\mid\mathscr{F}_z)\}\backslash H_{zz^0}$$

$$H_{zz^2}=\{\omega;\gamma(z)=E(X_{zz^2}+\alpha\gamma(z^2)\mid\mathscr{F}_z)\}\backslash\bigcup_{i=0}^{1}H_{zz^i}$$

取 $U_1=\sum_{i=0}^{2}Z^iI_{H_{zz^i}}$，则 U_1 是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，且

$$\gamma(U_0)=Q(\gamma)(U_0,U_1)$$

类似地，对每个 z^i，在 $[U_1=z^i]$ 上可作剖分

$$H_{z^i(z^i)^0},H_{z^i(z^i)^1},H_{z^i(z^i)^2}$$

且令

$$\widetilde{H}_{z^i}=\sum_{j=0}^{2}(z^i)^jI_{H_{z^i(z^i)^j}}$$

$$U_2=\sum_{i=0}^{2}\widetilde{H}_{z^i}I_{(U_1=z^i)}$$

同样可知 U_2 是 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，且

$$\gamma(U_1)=Q(\gamma)(U_1,U_2)$$

以此类推，可得到一个满足(6.28)的策略 T，且

$$\tau=\inf\{k\geqslant0;X_{U_k}=\gamma(U_k)\}\quad(6.29)$$

这表明在 $\mathscr{D}_z$ 中存在着可取的策略。

定理 6.13　设(6.17)，(6.23)成立，T^* 是 $\mathscr{D}_z$ 中最优策略，则

$$E(X(T^*)\mid\mathscr{F}_z)=\gamma_z\quad a.s.\quad(6.30)$$

且

$$EX(T^*)=E\gamma_z \qquad (6.31)$$

证明 我们只须证明(6.35)式。显然 $\gamma_z \geqslant E(X(T^*)|\mathscr{F}_z)$ a.s，只须证 $P(\gamma_z > E(X(T^*)|\mathscr{F}_z))=0$。如不然，记 $A=\{\gamma_z > E(X(T^*)|\mathscr{F}_z\}$，$T^*=((U_n^*),\tau^*)$，由 γ_z 的定义，$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $T_k \in \mathscr{Q}_z$，使

$$E(X(T_k)|\mathscr{F}_z) > \gamma_z - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6.32)$$

令 $\varepsilon = \int_A \gamma_z - \int_A X(T^*)$，则由(6.32)

$$\int_A X(T_k) > \int_A \gamma_z - \frac{\varepsilon}{2} > \int_A X(T^*)$$

记 $T_k=((U_n^k),\tau^k)$，取

$$\widetilde{U}_n = U_n^k I_A + U_n^* I_{A^c}$$

$$\widetilde{\tau} = \tau^k I_A + \tau^* I_{A^c}$$

易证 $\widetilde{T}=((\widetilde{U}_n),\widetilde{\tau}) \in \mathscr{Q}_z$，而

$$EX(\widetilde{T}) = \int_A X(T^k) + \int_{A^c} X(T^*) > EX(T^*)$$

与 T^* 为最优矛盾，同此(6.30)，从而(6.31)成立。

上面的定理称为最优原理。

定理 6.14 设(6.17)，(6.23)成立，$T\in\mathscr{Q}_z$，则 T 最优必可取；反之，如果 $\alpha<1$ 或 $\alpha=1$，$\tau<\infty$，则 τ 可取必最优。

证明 设 $T\in\mathscr{Q}_z$ 为最优策略，令

$$J_T(U_k)=\begin{cases}\alpha^{-k}E\left(\sum_{n=k}^{\tau-1}\alpha^n X_{U_nU_{n+1}}+\alpha^\tau X_{U_\tau}\,\middle|\,\mathscr{F}_{U_k}\right), & \tau>k\\ X_{U_\tau} & ,\tau\leqslant k\end{cases} \qquad (6.33)$$

易证当 $k<\tau$ 时

$$J_\tau(U_k)=E(X_{U_kU_{k+1}}+\alpha J_T(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k}) \qquad (6.34)$$

且

$$J_T(U_k)\leqslant\gamma(U_k),\quad k\geqslant 0 \qquad (6.35)$$

下面用归纳法证明：$\forall\ k\geqslant 0$

$$\gamma(U_k)=J_T(U_k) \qquad (6.36)$$

事实上，当 $k=0$ 时，由定理 6.13，$E\gamma(z)=EX(T)=E(E(X(T)|\mathscr{F}_z))$ 以及 $\gamma_z\geqslant E(X(T)|\mathscr{F}_z)$，可见 $\gamma(z)=E(X(T)|\mathscr{F}_z)=J_T(Z)$；假设(6.36)对 k 成立，则由 Bellman 方程

$$\begin{aligned}I_{(\tau>k)}\gamma(U_k)&\geqslant E[I_{(\tau>k)}(X_{U_kU_{k+1}}+\alpha\gamma(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k}]\\&\geqslant EI_{(\tau>k)}(X_{U_kU_{k+1}}+\alpha J_T(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k}]\\&=I(\tau>k)J_T(U_k)\\&=I(\tau>k)\gamma(U_k)\end{aligned}$$

从而，$E(I_{(\tau>k)}\gamma(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k})=E(I_{(\tau>k)}J_T(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k})$，$E(I_{(\tau>k)}\gamma(U_{k+1}))=E(I_{(\tau>k)}J_T(U_{k+1}))$，于是

$$I_{(\tau>k)}\gamma(U_{k+1})=I_{(\tau>k)}J_T(U_{k+1})$$

再注意到$[\tau\leqslant k]=[U_{k+1}=U_k]$，于是(6.36)对 $k+1$ 成立，因此

$$\gamma(U_k)=J_T(U_k)=E(X_{U_kU_{k+1}}+\alpha\gamma(U_{k+1})|\mathscr{F}_{U_k})$$

$$\gamma(U_\tau)=J_T(U_\tau)=X_{U_\tau}$$

从而 T 为可取的策略。设 T 为 $\mathscr{D}_z$ 中可取的策略，往证在 $\alpha<1$ 或 $\alpha=1,\tau<\infty$时，它是最优的。

首先证明

$$E\gamma(z)=E\sum_{i=0}^{k}X(\tau)I_{(\tau=i)}+E(I_{(\tau>k)}\sum_{i=0}^{k}\alpha^iX_{U_iU_{i+1}}+\alpha^{k+1}\gamma(U_{k+1}))\tag{6.37}$$

事实上，当 $k=0$ 时，因为$[U_1=U_0]=[\tau=0]$，$[U_1>U_2]=[\tau>0]$均是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，由(6.28)式

$$\gamma(z)=X_zI_{(\tau=0)}+E[I_{(\tau>0)}(X_{zU_1}+\alpha\gamma(U_1)|\mathscr{F}_z]$$

(6.37)式是成立的，如果(6.37)对 $k-1$ 成立，即

$$E\gamma(z)=E(\sum_{\tau=0}^{k-1}X(T)I_{(\tau=i)})+E(I_{(\tau>k-1)}\sum_{\tau=0}^{k-1}\alpha^iX_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k\gamma(U_k))$$

由于

$$EI_{(\tau>k-1)}(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^iX_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k\gamma(U_k))$$

$$=EI_{(\tau=k)}+I_{(\tau>k)})(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k\gamma(U_k))$$

而$(\tau>k)=[U_{k+1}>U_k]\in\mathscr{F}_{U_k}$，且

$$I_{(\tau=k)}(\sum_{\tau=0}^{(k-1}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k\gamma(U_k))$$

$$=I_{(\tau=k)}(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k X_{U_k})$$

$$I_{(\tau>k)}(\sum_{\tau=0}^{(k-1}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}}+\alpha^k\gamma(U_k))$$

$$=I_{(\tau>k)}(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i X_{U_iU_{i+1}}+\alpha^{(k+1)}\gamma(U_{k+1}))$$

因此(6.37)式对 k 成立，于是

$$E\gamma(z)-X(T)$$

$$=\alpha^{k+1}\int_{[\tau\geqslant k+1]}(\gamma(U_{k+1})-\sum_{i=k+1}^{\tau-1}\alpha^{i-(k+1)}X_{U_iU_{i+1}}-\alpha^{\tau-(k+1)}X_{U_\tau})$$

(6.38)

当 $0<\alpha<1$ 或 $\alpha=1$ 但 $\tau<\infty$时，由于(6.17)及(6.23)式的条件，(6.38)式的右端当 $k\to\infty$时趋于 0，因此 T 是最优的。

定理 6.15　在(6.17)，(6.23)式下，过程 $\Gamma=\{\gamma(z):z\in\mathscr{N}^2\}$ 是满足 $\Gamma\geqslant R(\Gamma)$，即$\forall\ z\in\mathscr{N}_+{}^2$

$$\gamma(z)\geqslant X_z$$

$$\gamma(z)\geqslant\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\gamma(z')\,|\,\mathscr{F}_z)$$

的最小过程。

证明　由于 $\gamma(z)\geqslant R(\gamma)(z)$，故只须证明其最小性，设过程 $\tilde{\Gamma}=\{\tilde{\gamma}(z):z\in\mathscr{N}^2\}$满足 $\tilde{\Gamma}\geqslant R(\tilde{\Gamma})$。对 $z\in\mathscr{N}^2$，取 $T=((U_n),\tau)\in\mathscr{Q}_z^*$ 是可取的，从而 T 在 $\mathscr{Q}_z^*$ 中最优，于是

$$\tilde{\gamma}(z)\geqslant R(\tilde{\gamma})(z)$$

$$=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha\tilde{\gamma}(z')\,|\,\mathscr{F}_z)$$

$$\geqslant X_z \vee E(X_{zv_1}+\alpha\tilde{\gamma}(U_1)\mid\mathscr{F}_z)$$
$$\geqslant X_z \vee E\{X_{zv_1}+\alpha(X_{v_1}\vee \max_{y\in D(z)} E(X_{v_1y}+\alpha\tilde{\gamma}(y)\mid\mathscr{F}_{v_1}))\mid\mathscr{F}_z\}$$
$$\geqslant X_z \vee E\{X_{zv_1}+\alpha(X_{v_1}\vee E(X_{v_1v_2}+\alpha\tilde{\gamma}(U_2)\mid\mathscr{F}_{v_1}))\mid\mathscr{F}_z)\}$$
$$\geqslant\cdots$$
$$\geqslant X_z \vee E(\sum_{n=0}^{\tau}\alpha^n X_{v_nv_{n+1}}+\alpha^\tau\tilde{\gamma}(U_\tau)\mid\mathscr{F}_z) \tag{6.39}$$

由于 $\tilde{\gamma}(U_\tau)\geqslant R(\tilde{\gamma})(U_\tau)\geqslant X_{v_\tau}=\gamma_{v_\tau}$，代入(6.39)则

$$\tilde{\gamma}(z)\geqslant E\{\sum_{n=0}^{\tau-1}\alpha^n X_{v_nv_{n+1}}+\alpha^\tau X_{v_\tau}\mid\mathscr{F}_z\}=\gamma(z)$$

从而 $\tilde{\Gamma}\geqslant\Gamma$.

对于 $\gamma(Z)$ 还有如下的构造性定理

定理 6.16 对 $z\in\mathscr{N}_-^2$，定义

$$Y^0(z)=X_z$$
$$Y^{(k)}(z)=R(Y^{(k-1)}(z))$$
$$=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha Y^{(K-1)}(z')\mid\mathscr{F}_z)$$

则

$$\gamma(z)=\lim_{k\to\infty}Y^{(k)}(z)\uparrow$$

证明 首先用归纳法证明 $\{Y^{(k)}(z)\}$ 是单调不减的。事实上，$Y^{(1)}(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha X_{z'}\mid\mathscr{F}_z)\geqslant Y^{(0)}(z)$，如果假定 $Y^{(k)}(z)\geqslant Y^{(k-1)}(z)$，则

$$Y^{(k+1)}(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha Y^{(k)}(z')\mid\mathscr{F}_z)$$
$$\geqslant X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(X_{zz'}+\alpha Y^{(k-1)}(z')\mid\mathscr{F}_z)$$
$$=Y^{(k)}(z)$$

因此极限 $Y^{(\infty)}(z)=\lim_{k\to\infty}Y^{(k)}(z)$ a. s. 存在，且

$$Y^{(\infty)}(z)\geqslant R(Y^\infty)(z)$$

由定理 6.15 知 $Y^{(\infty)}(z)\geqslant\gamma(z)$. 而由归纳法容易证明：$Y^{(k)}(z)\leqslant\gamma(z)$，$k\geqslant0$，事实上，若对某 K 有 $Y^{(k)}(z)\leqslant\gamma(z)$，则

$$
\begin{aligned}
Y^{(k+1)}(z) &= X_z \vee \max_{z' \in D(z)} E(X_{zz'} + \alpha Y^{(k)}(z') \mid \mathscr{F}_z) \\
&\leqslant X_z \vee \max_{z' \in D(z)} E(X_{zz'} + \alpha \gamma(z') \mid \mathscr{F}_z) \\
&= R(\gamma)(z) \\
&= \gamma(z)
\end{aligned}
$$

所以 $Y^{(\infty)}(z) \leqslant \gamma(z)$，从而 $\gamma(z) = Y^{(\infty)}(z)$. a. s. 证毕

注 5 本节结果均可直接应用于以一般偏序集 H 为指标集的随机过程，只要这个偏序集 H 中满足

i）有最小元 0；

ii）$\forall\ z \in H$，$D(z)$ 是一个有限集；

iii）H 是局部有限的，亦即 $\forall\ s, r \in H$，$s < r$，$\{u; s \leqslant u \leqslant r\}$ 是一个有限集。

由定理 6.10，当 $X^2 \equiv 0$，$\alpha \equiv 1$ 时，由本节结果可以推出两指标最优停点问题的有关结论。

在下面有关两指标最优停点的命题中，我们总假定 F_4 条件成立。

推论 6.17 设 $X = \{X_z, \mathscr{F}_z, z \in \mathscr{N}_+^2\}$ 满足(6.17)，则 X 的 Snell 包 $\gamma(z) = \operatorname*{esssup}_{T \in \mathscr{D}_z^*} E(X_{\alpha(T)} \mid \mathscr{F}_z)$ 满足 Bellman 方程

$$
\gamma_z = X_z \vee \max_{z' \in D(z)} E(\gamma_{z'} \mid \mathscr{F}_z)
$$

$$
E\gamma_0 = \sup\{EX_\sigma; \sigma \in \Sigma\}
$$

这里 $X_{\alpha(T)}$ 的定义见(6.15)式。

推论 6.18 设报酬过程满足(6.17)，则 $\alpha(T)$ 是 Σ 中最优停点当且仅当 T 是可取的策略。这里 $T = ((U_n), \tau)$ 称为可取的是指

$$
\gamma(U_n) = E(\gamma(U_{n+1}) \mid \mathscr{F}_{U_n}) \qquad (\tau > n)
$$

$$
\gamma(U_\tau) = X_{U_\tau}
$$

推论 6.19 设(6.17)成立，T 是最优策略，则

$$
E(X_{\alpha(T)} \mid \mathscr{F}_z) = \gamma_z
$$

关于 Snell 包的性质，我们还有所谓最小 $\mathscr{D}$ 正则性

定义 6.6 称上鞅 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+^2\}$是 $\mathscr{Q}$ 正则的，如果 $\forall z\in\mathscr{N}_+^2,\tau\in\mathscr{Q}_z^*$，有

$$E(X_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant X_z \qquad (6.40)$$

引理 6.20 对每个 $Z\in\mathscr{N}_+^2$ 存在着策略序列 $T^k=((\sigma_z^k,\tau^k)\in\mathscr{Q}_z)$使得

$$E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\uparrow\gamma(z) \qquad (6.41)$$

证明 易知存在 $\nu^k\in\mathscr{Q}_z,k=1,2,\cdots$，使得

$$\gamma_z=\sup_k E(X_{\alpha(\nu^k)}|\mathscr{F}_z)$$

置 $T^1=\nu^1$，设 T^k 已定义好，令

$$\sigma^{k+1}=\alpha(T^k)I_{\{E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\geqslant E(X_{\alpha(\nu^{k+1})}|\mathscr{F}_z)\}}$$
$$+\alpha(\nu^{k+1})I_{\{E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)<E(X_{\alpha(\nu^{k+1})}|\mathscr{F}_z)\}},$$

则 σ^{k+1}是$(\mathscr{F}_z)$停点，且 $\sigma^{k+1}\geqslant z$，记

$$A=\{E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\geqslant E(X_{\alpha(\nu^{k+1})}|\mathscr{F}_z)\}$$

则

$$E(X_{\sigma^{k+1}}|\mathscr{F}_z)\geqslant E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\vee E(X_{\alpha(\nu^{k+1})}|\mathscr{F}_z)$$

由定理 6.8，存在 $T^{k+1}\in\mathscr{Q}_z$，使得 $\alpha(T^{k+1})=\sigma^{k+1}$，故

$$E(X_{\alpha(T^{k+1})}|\mathscr{F}_z)\geqslant E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\vee E(X_{\alpha(\nu^{k+1})}|\mathscr{F}_z)$$

由此易知

$$E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\uparrow\gamma_z$$

定理 6.21 设(6.17)满足，则 X 的 *Snell* 包(γ_z)是控制 X 的最小 $\mathscr{Q}$ 正则上鞅。

证明 由定义 $\gamma_z\geqslant X_z$ a. s. 由引理 6.20，存在 $T^k\in\mathscr{Q}_z,k=1,2\cdots$，使得 $E(X_{\alpha(T^k)}|\mathscr{F}_z)\uparrow\gamma_z$. 由 A^+ 条件(即(6.17)式以及 $E\gamma_z^-\leqslant EX_z^-<\infty$，可见$(\gamma_z)$是可积过程。

$\forall z\in\mathscr{N}_+^2,U\in\mathscr{N}_+^2$，若 $u\geqslant z$，由于存在 $T_u^k\in\mathscr{Q}_u,k=1,2,\cdots$，使得 $E(X_{\alpha(T_u^k)}|\mathscr{F}_u)\uparrow\gamma_u$，由单调收敛定理，有

$$E(\gamma_u|\mathscr{F}_z)=\lim_{k\to\infty}E(X_{\alpha(T_u^k)}|\mathscr{F}_z)\leqslant\gamma_z$$

因此(γ_z)是上鞅，往证它的 $\mathscr{Q}$ 正则性，如果存在 $z\in\mathscr{N}_+{}^2, T\in\mathscr{Q}_z$，使得 $E(\gamma_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant\gamma_z$ 不 $a.s.$ 成立，则存在 $\varepsilon>0, A\in\mathscr{F}_z, P(A)>0$，使得

$$\int_A\gamma_z\mathrm{d}P+\varepsilon\leqslant\int_A\gamma_{\alpha(T)}\mathrm{d}P$$

由引理 6.20，对每个 $u=(m,n)\geqslant z$，存在 $T_u\in\mathscr{Q}_u$，使得

$$\int_A\gamma_u\mathrm{d}P-\frac{1}{2^{m+n}}\leqslant\int_A X_{\alpha(T_u)}\mathrm{d}P$$

令 $\nu^*=\sum\limits_{u\geqslant z}\alpha(T_u)I_{A\cap(\alpha(T)=u)}+zI_{A^c}$，则

$$\begin{aligned}\int_A E(X_{\nu^*}|\mathscr{F}_z)&=\sum_{u\geqslant z}\int_{A\cap\{\alpha(t)=u\}}X_{\alpha(T_u)}\\&\geqslant\sum_{u\geqslant z}\int_{A\cap\{\alpha(T)=u\}}\gamma_u-\frac{\varepsilon}{2}\\&=\int_A\gamma_{\alpha(T)}-\frac{\varepsilon}{2}\\&\geqslant\int_A\gamma_z+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

而 $\nu^*\in\sum,\nu^*\geqslant z$，于是存在 $T^*\in\mathscr{Q}_z$，使 $\alpha(T^*)=\nu^*$，

$$\int_A E(X_{\alpha(T^*)}|\mathscr{F}_z)\geqslant\int_A\gamma_z+\frac{\varepsilon}{2}$$

从而 $P(E(X_{\alpha(T^*)}|\mathscr{F}_z)>\gamma_z)>0$ 与 γ_z 的定义矛盾。因此$\forall\ T\in\mathscr{Q}_z, E(X_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant\gamma_z$.

最后，若(y_z)是另一控制 X 的 $\mathscr{T}$ 正则上鞅，则$\forall\ T\in\mathscr{Q}_z$，有

$$y_z\geqslant E(y_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\geqslant E(X_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)$$

对引理 6.20 中(T^t)，也有 $y_z\geqslant E(X_{\alpha(T^t)}|\mathscr{F}_z)$，所以 $y_z\geqslant\gamma_z\quad a.s.$

证毕

定理 6.22　设报酬过程 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+{}^2\}$满足 A^+条件，且类 D，则由(6.28)，(6.29)式所定义的策略是最优的。

证明　因为这里只考虑停止报酬，相当于在(6.16)式中取 $X^2\equiv0,\alpha=1$，因此相应的(6.28)，(6.29)式成为

$$\gamma(U_k)=E(\gamma(U_{k+1})|\mathscr{F}_z),\quad k<\tau$$
$$\gamma(U_\tau)=X_{U_\tau},\quad k\leqslant\tau \tag{6.42}$$
而由(6.30)
$$\tau=\inf\{k:X_{U_k}=\gamma_{U_k}\} \tag{6.43}$$
由定理 6.14，只须证明 $\tau<\infty$ a. s.，由 A^+ 条件，可见 $V\triangleq\sup\{EX_{U_\tau}:((U_k),\tau)\in\mathscr{Q}\}<\infty$。

考虑单指标过程$\{X_{U_n},\mathscr{F}_{U_n},n\in\mathscr{N}\}$的最优停止问题。设$(\tau'_k)$，$\tau'$都是$(\mathscr{F}_{U_n})$停时，且$\tau'_k\uparrow\tau'$，于是$U_{\tau'_k}\to U_{\tau'}$，$X_{U_{\tau'_k}}\to X_{U_{\tau'}}$，由于这里的 X 是类 D 的，因此 $EX_{U_{\tau'_k}}\to EX_{U_{\tau'}}$，由 Rasche 方法(定理 2.55)知$\{X_{U_n},\mathscr{F}_{U_n},n\in\mathscr{N}\}$存在最优规则 τ_0，而由定理 2.23，可见由(6.42)定义的 $\tau<\infty$ 且是$\{X_{U_n},\mathscr{F}_{U_n},n\in\mathscr{N}\}$的最优停时，所以满足(6.42)，(6.43)式的策略 $T=((U_n),\tau)$是最优策略。

§6.3 Snell 包的三重极限定理

本节只讨论停止报酬过程的 Snell 包，设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_2^+\}$为停止报酬过程，它的 Snell 包
$$\gamma(z)=\operatorname{esssup}\{E(X_{a(T)}|\mathscr{F}_z);T\in\mathscr{Q}_z\} \tag{6.44}$$
对正整数 N，记 $Z^N=\{z\in\mathscr{N}_+^2:0\leqslant z\leqslant(N,N)\}$，考虑报酬过程 $X^N=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in Z^N\}$，相应的 Snell 包
$$\gamma^N(z)=\operatorname{esssup}\{E(X_{a(T)}|\mathscr{F}_z);T\in\mathscr{Q}_z^N\}$$
显然$\mathscr{Q}_z^N\subseteq\mathscr{Q}_z^{N+1}\subset\cdots$，因此 $\gamma^N(z)\leqslant\gamma^{N+1}(z)\leqslant\cdots$

令
$$\gamma'(z)=\lim_{N\to\infty}\gamma^N(z) \tag{6.44}$$
$$V'(z)=\lim_{N\to\infty}V^N(z) \tag{6.45}$$
其中 $V^N(z)=\sup\{EX_{a(T)}:\tau\in\mathscr{N}_z^N\}$，一个自然的问题是 $\gamma(z)=\gamma'(z)$

吗？$V(z)=V'(z)$吗？

定理 6.23 设报酬过程 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{N}_+^2\}$的负部一致可积，则 $\gamma(Z)=\gamma'(Z)$，$V(Z)=V'(Z)$。

证明 由于$\mathscr{Q}_z'\subseteq\mathscr{Q}_z$，所以 $\gamma'(Z)\leqslant\gamma(Z)$是显然的，另一方面，对每个 $T\in\mathscr{Q}_z$，由定理 6.6，$E(\gamma'_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant\gamma'(z)$，因而

$$E(X_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant E(\gamma'_{\alpha(T)}|\mathscr{F}_z)\leqslant\gamma'(Z)$$

于是 $\gamma(z)\leqslant\gamma'(Z)$. 从而 $\gamma(z)=\gamma'(Z)$，$V(Z)=V'(Z)$。

下面讨论一般的可积报酬过程，并令

$$\overline{\sum}=\{\sigma:\sigma\text{ 是}(\mathscr{F}_z)\text{停点，且 }EX_\sigma^-<\infty\}$$

$$\overline{\sum}_z=\{\sigma:\sigma\in\overline{\sum}\text{且 }\sigma\geqslant z\}$$

对$-\infty\leqslant a<0<b\leqslant+\infty$，令

$$X_z(a,b)=(X_z\vee a)\wedge b$$

$$X_z(b)=X_z(-\infty,b),X_z(a)=X_z(a,+\infty)$$

$\gamma_z(a,b)$，$\gamma_z(b)$，$\gamma_z(a)$为相应的 snell 包。

引理 6.24 若过程$\{\beta_z,X_z,z\in\overline{\mathscr{N}}_+{}^2\}$，满足

i) 存在非负可积的随机变量 u，使

$$X_z\leqslant\beta_z\leqslant E(u|\mathscr{F}_z),z\in\overline{\mathscr{N}}_+{}^2$$

ii) $\beta_z=X_z\vee\max\limits_{z'\in\mathscr{D}(z)}E(\beta_{z'}|\mathscr{F}_z)$

iii) 在任何可选增道路$(U_n)_{n\in\overline{\mathscr{N}}}$上，$\beta_{U_\infty}=X_{U_\infty}$（这里 $\overline{\mathscr{N}}_+=\mathscr{N}_+\cup\{\infty\}$，$\overline{\mathscr{N}}_+{}^2=\mathscr{N}_+{}^2\cup\{(\infty,\infty)\}$）

$$\beta_{U_\infty}=\limsup_{n\to\infty}\beta_{U_n}$$

$$X_{U_\infty}=\limsup_n X_{U_n}$$

则

$$\beta_z\leqslant\gamma(z)$$

证明 由于当 $T\in\mathscr{Q}$ 时 $\alpha(T)\wedge Z$ 不一定是停点，所以证明的方法与单指标的情况有所不同。只需证明$\forall A\in\mathscr{F}_z$，有

$$\int_A \beta_z \leqslant \int_A \gamma(z) \tag{6.46}$$

如若不然，则存在 $\varepsilon>0$ 及 $A\in\mathscr{F}_z$，使得

$$\int_A \beta_z > \int_A \gamma(z)+\varepsilon \tag{6.47}$$

往证存在 $T\in\mathscr{Q}_z$，使得

$$\int_A \gamma(z) < \int_A E(X_{a(T)}\mid\mathscr{F}_z) \tag{6.48}$$

从而与 $\gamma(z)$ 的定义的矛盾。为此，$\forall\ u\geqslant Z$，令

$$H_{uu}=\{\beta_u=X_u\}$$

$$H_{uu^1}=\{\beta_u>X_u,\ \beta_u=E(\beta_{u^1}\mid\mathscr{F}_u)\}$$

$$H_{uu^2}=\{\beta_u>X_u,\ \beta_u>E(\beta_{u^1}\mid\mathscr{F}_u),\ \beta_u=E(\beta_{u^2}\mid\mathscr{F}_u)\}$$

其中 $u^1=u+(0,1)$，$u^2=u+(1,0)$.

$$A_j^n=\bigcup_{(p,q)=t(0)<t(1)<\cdots<t(n)=(p+j,n+q-j)}\ \bigcap_{i=0}^{n-1} H_{t(i)t(i+1)}$$

其中，$z=(p,q)$，$j=0,1,2,\cdots$，$n=1,2,\cdots$，$t(0),t(1),\cdots$ 均属于 $\mathscr{N}_+^2$，且 $t(i+1)\in\mathscr{D}(t(i))$. 置

$$\sigma_0=Z$$

$$\sigma_n=\sum_{j=0}^{n}(p+j,n+q-j)I_{A_j^n}+\sigma_{n-1}I_{(\bigcup_{j=0}^{n}A_j^n)^c},\quad n=1,2,\cdots \tag{6.49}$$

则易证 (σ_n) 是可选增道路，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 0:X_{\sigma_n}\geqslant\beta_{\sigma_n}-\varepsilon\} \tag{6.50}$$

则 $T=((\sigma_n),\tau)\in\mathscr{Q}_z$，$\forall\ B\in\mathscr{F}_z$，可证

$$-\infty<\int_B\beta_z\leqslant\int_{B\cap(\tau<\infty)}\beta_{a(T)}+\int_{B\cap(\tau=\infty)}X_{\sigma_\infty} \tag{6.51}$$

事实上，由于在 $[\tau>m]$ 上，$X_{\sigma_m}<\beta_{\sigma_m}$，由 (6.49) 可知，在 $[\tau>m]$ 上

$$\sigma_{m+1}=\sigma_m^1 I_{(\beta_{\sigma_m}=E(\beta_{\sigma_m^1}\mid\mathscr{F}_{\sigma_m}))}+\sigma_m^2 I_{[(\beta_{\sigma_m}>E(\beta_{\sigma_m^1}\mid\mathscr{F}_{\sigma_m}),(\beta_{\sigma_m}=E(\beta_{\sigma_m^2}\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})]}$$

于是 $I_{(\tau>m)}E(\beta_{\sigma_{m+1}}\mid\mathscr{F}_{\sigma_m})=I_{(\tau>m)}\beta_{\sigma_m}$，由此容易证明 $\{\beta_{\sigma_{\tau\wedge m}},\mathscr{F}_{\sigma_m},m$

$\geqslant 1\}$是鞅。任取 $E\in\mathscr{F}_{\sigma_m}, N\geqslant m+1$

$$\int_{E\cap(\tau\geqslant m)}\beta_{\sigma_m}=\int_{E\cap(\tau\geqslant m)}\beta_{\sigma_{\tau\wedge N}}=\int_{E\cap(m\leqslant\tau\leqslant N)}\beta_{\sigma_\tau}+\int_{E\cap(\tau>N)}\beta_{\sigma_N}$$

令 $N\to\infty$，由 Fatou 引理

$$\int_{E\cap(\tau\geqslant m)}\beta_{\sigma_m}\leqslant\int_{E\cap(\tau\geqslant m)}\beta_{\sigma_\tau}$$

从而在$(\tau\geqslant m)$上

$$E(\beta_{\sigma_\tau}|\mathscr{F}_z)\geqslant\beta_{\sigma_m} \tag{6.52}$$

特别取 $m=0, B\in\mathscr{F}_z$，有

$$\begin{aligned}-\infty<\int_B X_z&\leqslant\int_B\beta_z\\ &\leqslant\int_{B\cap(\tau<\infty)}\beta_{\sigma_\tau}+\int_{B\cap(\tau=\infty)}\beta_{\sigma_\infty}\\ &=\int_{B\cap(\tau<\infty)}\beta_{\sigma_\tau}+\int_{B\cap(\tau=\infty)}X_{\sigma_\infty}\end{aligned}$$

从而(6.51)式得证，由此可知 $P(\tau=\infty, X_{\sigma_\infty}=-\infty)=0$，而由 $X_{\sigma_\infty}=\beta_{\sigma_\infty}$及 τ 的定义 $P(\tau=\infty, X_{\sigma_\infty}>-\infty)=0$，于是 $P(\tau=\infty)=0$. 因为 $\alpha(T)=\infty$，当且仅当 $\tau=\infty$，故 $P(\alpha(T)=\infty)=0$，这样 $T\in\mathscr{Q}_z^*$.

对任意的 $A\in\mathscr{F}_z$，由于 $\sigma_\tau=\alpha(T)$

$$\int_A\beta_z\leqslant\int_A\beta_{\alpha(T)}\leqslant\int_A X_{\alpha(T)}+\varepsilon$$

于是，由(6.47)式

$$\int_A\gamma(Z)<\int_A\beta_z-\varepsilon\leqslant\int_A X_{\alpha(T)}$$

这与 $\gamma(Z)$的定义矛盾，因此 $\beta_z\leqslant\gamma(z)$。证毕。

现在讨论 $\gamma_z(a)$逼近 γ_z 的问题。

引理 6.25 设 A^-条件满足，则 $\lim\limits_{a\to-\infty}\gamma_z(a)=\gamma(z)$.

证明 令 $\gamma_z^*=\lim\limits_{a\to-\infty}\gamma_z(a)$，显然 $\gamma_z^*\geqslant\gamma(z)$. 由 $\gamma_z(a)=X_z(a)\vee\max\limits_{z'\in D(z)}E(\gamma_{z'}(a)|\mathscr{F}_z)$及条件期望的单调收敛定理可得

$$\gamma_z^*=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(\gamma_{z'}^*|\mathscr{F}_z)$$

记 $X_\infty(a)=\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}X_z(a), \gamma_\infty(a)=\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}\gamma_z(a)$，则

$$\gamma_\infty(a) \geqslant X_\infty(a) \tag{6.53}$$

对 $0\leqslant v\leqslant z$，有

$$\gamma_z(a) \leqslant E(\sup_{u\geqslant v} X_u(a) \mid \mathscr{F}_z) \tag{6.54}$$

记 $\xi=\sup\limits_{u\geqslant v} X_u(a)$，$y_z=E(\xi|\mathscr{F}_z)$，在 A^+ 条件下，$E|\xi|\leqslant|a|\vee E\sup\limits_{u\in\mathscr{N}_+^2} X_u^+<\infty$. 由引理 6.5 之 4)，$E(\xi|\mathscr{F}_z)\xrightarrow{L^1}E(\xi|\bigvee\limits_{z\in\mathscr{N}_+^2}\mathscr{F}_z)=\sup\limits_{u\geqslant v} X_u(a)$. 注意到上述收敛是 $\mathscr{N}_+^2$ 中网收敛，因此存在子网 D，使得

$$\lim_{z\to\infty, z\in D} E(\xi|\mathscr{F}_z)=\sup_{u\geqslant v} X_u(a) \quad a.s. \tag{6.55}$$

由(6.45)式及(6.55)式

$$\gamma_\infty(a)\leqslant \sup_{u\geqslant v} X_u(a) \quad a.s$$

再令 $v\to\infty$，则 $\gamma_\infty(a)\leqslant X_\infty(a)$，从而 $\gamma_\infty(a)=X_\infty(a)$. 于是，$\gamma_\infty^*\leqslant\gamma_\infty(a)=X_\infty(a)\downarrow X_\infty(a\to-\infty)$，而由 $\gamma_z^*\geqslant X_z$，则得 $\gamma_\infty^*\geqslant X_\infty$，所以 $\gamma_\infty^*=X_\infty$. 注意到对任何可选增道路 $(\sigma_n)_{n\in\mathscr{T}}$，$\gamma_{\sigma_\infty}^*=\gamma_\infty^*=X_\infty$，由引理 6.24，则对一切 $z\in\mathscr{N}_+^2$，$\gamma_z^*\leqslant\gamma(z)$，这样 $\gamma_z^*=\gamma(z)$。证毕。

引理 6.26　设 A^+ 条件满足，则对每个 $z\in\mathscr{N}^2$，$\bar\gamma(z)=\gamma(z)$，其中

$$\bar\gamma(z)=\operatorname{esssup}E(X(T)|\mathscr{F}_z):T\in\overline{\mathscr{D}}_z)$$

$$\overline{\mathscr{D}}_z=\{T=((\sigma_n)_{n\in\mathscr{T}_+},\tau)\text{为策略},\tau\text{取}+\infty,\sigma_0=z\text{ 且 }EX_{\alpha(T)}^-<\infty\}$$

证明　定理 6.2 可以推广到在 $\overline{\mathscr{N}}_+^2$ 取值的停点的情形，此时所得的策略 $T=((\sigma_n)_{n\in\mathscr{T}_+},\tau)$ 中的 τ 可取 $+\infty$ 的值，如同定理 6.12 可证关于 $\bar\gamma(z)$ 的 Bellman 方程，于是

$$\bar\gamma(z)=X_z\vee\max_{z'\in D(z)}E(\bar\gamma(z')|\mathscr{F}_z) \tag{6.55}$$

往证对任何策略 $T=((\sigma_n)_{n\in\mathscr{T}},\tau)\in\overline{\mathscr{D}}_z$，有

$$\bar\gamma(\sigma_\infty)=X_{\sigma_\infty} \tag{6.56}$$

事实上，由 $\bar\gamma(z)\geqslant X_z$，因此 $\bar\gamma(\sigma_\infty)=\bar\gamma_\infty \triangleq \varlimsup\limits_{z\to\infty}\bar\gamma(z)\geqslant\varlimsup\limits_{z\to\infty}X_z=X_\infty=$

X_{σ_∞}. 另一方面，由

$$X_z \leqslant \bar{\gamma}(z) \leqslant E(\sup_{z' \geqslant u} X_{z'} \mid \mathscr{F}_z), \quad u \leqslant z$$

以及 A^+ 条件，根据引理 6.5，对趋于(∞,∞)的网存在着子网，使得 $E(\sup_{z' \geqslant u} X_{z'} \mid \mathscr{F}_z) \to \sup_{z' \geqslant u} X_{z'}$ $a.\ s.$ 再令 $u \to (\infty,\infty)$则 $\bar{\gamma}_\infty \leqslant X_\infty$，所以(6.56)成立

由引理 6.24 及(6.55)，(6.56)式，$\bar{\gamma}(z) \leqslant \gamma(z)$，所以 $\bar{\gamma}(z) = \gamma(Z)$。证毕。

引理 6.27 $\lim_{b \to \infty} \bar{\gamma}_z(b) = \bar{\gamma}(z)$ （证明请读者补足）

由引理 6.25，6.26 及 6.27 可得 snell 包的三重极限定理

定理 6.28 对每个 $z \in \mathscr{N}^2$，有

$$\gamma(z) = \lim_{b \to \infty} \lim_{a \to -\infty} \lim_{n \to \infty} \gamma_z^n(a,b) \quad (6,57)$$

$$V(z) = \lim_{b \to \infty} \lim_{a \to -\infty} \lim_{n \to \infty} V_Z^n(a,b) \quad (6.58)$$

证明由读者补足。

§6.4 随机化策略与 BC 拓扑

为了讨论连续时间过程的最优停止问题，我们曾在 §4.7 中引入了 BC 拓扑，为此先将概率空间扩大为$(\Omega \times [0,1], \mathscr{F} \times \mathscr{B}, P \times \lambda)$，引进随机化停时 $T(\omega,\cdot)$。对每个随机化停时 $T \in \Gamma$，对应的 ω 分布为 $A(\omega,[0,t]) = \lambda(v: T(\omega,v) \leqslant t)$，它与 T 是一一对应的。因为对固定的 ω，$A(\omega,\cdot)$是 $\overline{\mathscr{R}}_+$ 上的概率测度，而对于每一个固定的 $t \in \overline{\mathscr{R}}_+$

$$A_t \triangleq A(\omega,[0,t])$$

是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，因此 A_t 是一个适应的增过程，对于每个适应增过程 $\{A_t; t \in \overline{\mathscr{R}}_+\}$对应着$(\Omega \times \overline{\mathscr{R}}_+, \mathscr{F} \times \mathscr{B}(\overline{\mathscr{R}}_+)$上的概率测度

$$\mu_A(H)=E\left(\int_{[0,\infty]} I_H(s,\cdot)\mathrm{d}A_s\right), H\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\overline{\mathscr{R}}_+)$$

在一一对应的意义上，我们自然可将 T，A 与 μ_A 三者等同起来，都称为随机化停时。

现在讨论两参数随机过程的问题，定理 6.8 表明每一个停点都可用一条可选增道路来描述，所以随机化停点实质上就是随机化可选增道路，增道路无非是一个单参数的停点族 $\{U_t, t\geqslant 0\}$，我们可以方便地选取 $|U_t|\triangleq U_t$ 的两个分量之和为参数，所以我们只要对 $(U_a)_{a\geqslant 0}$，$(|U_a|=a)$ 进行随机化。对 U_a 的随机化，就意味着在固定的 $t+s=a$ 的直线上，给出 $U_a(\omega,\cdot)$ 一个分布，或者说对应着一个增过程 $A_a(\cdot)$，基于这样的观点，我们引入下面的正式定义。

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的概率空间，$\mathscr{D}$ 为二进制有理数集，I 表示 $\overline{\mathscr{N}}_+{}^2$ 或 $\overline{\mathscr{R}}_+{}^2$，$J$ 表示 $\overline{\mathscr{N}}_+$ 或 $\overline{\mathscr{R}}_+$. 对 $z=(s,t)\in\overline{\mathscr{R}}_+^2$，记

$$\mathscr{R}_z=[0,s]\times[0,t]$$

对每个 $a\in J$，记

$$\triangle_a=\{Z\in I \mid |z|=a\}$$

这里 $|z|$ 表示 Z 的两个分量之和。

设 $\{\mathscr{F}_s^1; s\in J\}$，$\{\mathscr{F}_t^2; t\in J\}$ 是两个单参数的递增 σ 代数族。令 $\mathscr{F}_z=\mathscr{F}_s^1\cap\mathscr{F}_t^2$，并设 $\mathscr{F}_{(0,0)}$ 包含一切零概集。

定义 6.7 一条随机化道路是指 $(I\times\Omega,\mathscr{B}(I)\times\mathscr{F})$ 上的概率测度族 $v=\{\mu_a : a\in J\}$，它满足：当 $a\neq\infty$ 时，μ_a 的支撑含于：$\triangle_a\times\Omega$；当 $a=\infty$ 时，μ_a 的支撑含于 $\{(\infty,\infty)\}\times\Omega$，且对任意的 $F\in\mathscr{F}$

$$\mu_a(\triangle_a\times F)=P(F)$$

记 $I_s^a=\{(u,v): 0\leqslant u\leqslant s, u+v=a\}$，令

$$Q_s^a(F)=\mu_a(I_s^a\times F)$$

则 $Q_s^a(F)\leqslant P(F)$，从而 $Q_s^a\ll P$，因此存在唯一的单参数的右连续可测增过程 $\{A_a(s), 0\leqslant s\leqslant a\}$，使 $\forall\ H\in\mathscr{B}(\triangle_a)\times\mathscr{F}$，有

$$\mu_a(H)=E\left(\int_{[0,a]} I_H(s,\cdot)\mathrm{d}A_a(s)\right) \tag{6.59}$$

(见[3]6.15)于是，对任意的$\triangle_a\times\Omega$上正的有界可测过程X

$$\mu_a(X)\triangleq\int X\mathrm{d}\mu_a=E\left(\int_{[0,a]}X_{s,a-s}\mathrm{d}A_a(s)\right)\qquad(6.60)$$

事实上，对于任意的$z'=(u,v)\in I,F\in\mathscr{F},X=I_{R_{z'}\times F}$

$$\mu_a(X)=\mu_a(R_{z'}\times F)=E\left(\int_{[0,a]}I_{H'}(s,\cdot)dA_a(s)\right)$$

这里$H'=(\triangle_a\cap R_{z'})\times F$，因为

$$\triangle_a\times R_{z'}=\{(s,t):a-v\leqslant s\leqslant a-u,t=a-s\},\quad |z'|\geqslant a$$

又

$$\begin{aligned}&E\int_{[0,a]}X_{s,a-s}\mathrm{d}A_a(s)\\&=E\int_{[a-v,a-u]}\mathrm{d}A_a(s)\\&=E\int_{[0,a]}I_{H'}(s,\cdot)\mathrm{d}A_a(s)\end{aligned}$$

故对于简单函数$X_z(\omega)=I_{R_{z'}\times F}(z,\omega)$，有

$$\mu_a(X)=E\left(\int_{[0,a]}X_{s,a-s}\mathrm{d}A_a(s)\right)$$

对正的有界可测过程X，可用$\mathscr{B}(\triangle_a)\times\mathscr{F}$可测的简单过程来逼近。

注 6 由上所知，对于一条随机化道路$\nu=\{\mu_a;a\in J\}$，对应着增过程族$\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，满足(4.59)式；反之，给定一增过程族$\{A_a(s);0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，则按(4.59)式定义概率测度$\mu_a$，则$\{\mu_a,a\in J\}$是一条随机化道路。

定义 6.8 如果取值于[0,1]上的增过程族$\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$满足条件

i) $A_a(0)=0,A_a(a)=1$ (6.61)

ii) $A_a(s)$ $(0\leqslant s\leqslant a<\infty)$是$\mathscr{F}_{(s,a-s)}$可测的 (6.62)

iii) 对于任意的$s\in J,s\leqslant a\leqslant b<\infty,A_a(s)\geqslant A_b(s),A_a(a-s)\leqslant A_b(b-s)$，且$A_a(s)$关于$a$左连续，关于$s$右连续，a. s. (6.63)

则称由$\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a<\infty\}$所确定的$I\times\Omega$上的概率族$\nu=\{\mu_a;a$

$\in J\}$为一条随机化的可选增道路。

引理 6.29　可选增道路的全体与几乎处处取值为 0 或 1 的 $\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a<\infty\}$所确定的随机化可选增道路全体是 1—1 对应的。

证明　设$\{U_a,a\in J\}$是可选增道路，对每个 $a\in J$，$|U_a|=a$，令

$$A_a(s)=I_{[U_a\leqslant(s,a)]},\quad 0\leqslant s\leqslant a,a\in J$$

由于$\{U_a\leqslant(s,a)\}=\{U_a<(a,a-s)\}^c\setminus\{U_a=(a,0)\}$，$\{U_a\leqslant(s,a)\}\in\mathscr{F}_{(s,a)}$，$\{U_a<(a,a-s)\}^c\in\mathscr{F}_{(a,a-s)}$，$\{U_a=(a,0)\}\in\mathscr{F}_{(a,0)}\subset\mathscr{F}_{(a,a-s)}$。故 $A_a(s)$是 $\mathscr{F}_{(s,a-s)}$可测的。往证当 $a\leqslant b$ 时，$A_a(a-t)\leqslant A_b(b-t)$，为此只需证明

$$\{U_a\leqslant(a-t,a)\}\subseteq\{U_b\leqslant(b-t,t)\}\tag{6.64}$$

记 U_a^1,U_b^1 分别为 U_a,U_b 的第一坐标，则

$$U_a^1\leqslant U_b^1 \text{ 且 } a-U_a^1\leqslant b-U_b^1$$

由 $U_a^1\leqslant a-t$，则 $U_b^1\leqslant b-(a-U_a^1)\leqslant b-t$，(6.61)式得证。而当 $a\leqslant b$ 时，$\{U_b\leqslant(s,b)\}\subseteq\{U_a\leqslant(s,a)\}$，故 $A_a(s)\geqslant A_b(s)$。

对于任意$\triangle_a\times\Omega$上非负的有界可测过程 $X=(X_z)$

$$\mu_a(X)\triangleq\int Xd\mu_a=E\left(\int_{[0,a]}X_{(s,a-s)}dA_a(s)\right)=EX_{U_a}$$

因此$\{\mu_a,a\in J\}$是随机化可选增道路。

反之，设$\{\mu_a,a\in J\}$是随机化可选增道路，它所对应的$\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a\}$几乎处处取值为 0 或 1，固定 $a\in\overline{D}\triangleq D\cup\{\infty\}$，因 $A_a(s)$依 s 右连续且是增的，作映射 $U_a:\Omega\to\mathscr{R}_+^2$ 如下

$$U_a(\omega)=(u_\omega^a,a-u_\omega^a)$$

其中 $u_\omega^a=\inf\{s\geqslant 0:A_a(s)=1\}$，则 U_a 是停点，且当 $0\leqslant a\leqslant b<\infty$，$a\in D$，$b\in D$ 时，$U_a\leqslant U_b$，$|U_a|=a$. 事实上，对 $z=(s,t)\in\mathscr{R}_+^2$，$\{U_a\leqslant(s,a)\}=\{A_a(s)=1\}$，$\{U_a<(a,t)\}=\{A_a(a-t)=0\}$，于是

$$\begin{aligned}\{U_a\leqslant Z\}&=\{U_a\leqslant(s,a)\}\cap\{U_a\leqslant(a,t)\}\\&=\{A_a(s)=1\}\cap\{A_a(a-t)^-=0\}\end{aligned}$$

(这里 $A_a(a-t)^-$ 表示左极限)当 $s+t<a$ 时，$\{A_a(s)=1\}\cap\{A_a(a-t)^-=0\}=\phi\in\mathscr{F}_Z$；当 $s+t\geqslant a$ 时，$\{A_a(s)=1\}\cap\{A_a(a-t)^-=0\}\in\mathscr{F}_{(s,a-s)}\vee\mathscr{F}_{(a-t,t)}$，而 $\mathscr{F}_{(s,a-s)}\subseteq\mathscr{F}_{(s,t)}$，$\mathscr{F}_{(a-t,t)}\leqslant\mathscr{F}_{(s,t)}$，故知 U_a 是停点。

由 u_ω^a 的定义及 $A_a(s)\leqslant A_b(s)$ 可知 $u_\omega^b\geqslant u_\omega^a$. 而 $a-u_\omega^a=\inf\{s\geqslant 0;A_a(a-s)=0\}$，且 $A_a(a-s)\leqslant A_b(b-s)$. 因此由 $A_b(b-s)^-=0$，故 $a-u_\omega^a\leqslant b-u_\omega^b$. 从而 $U_a\leqslant U_b$.

显然 $|U_a|=a$.

对于 $a\in\mathscr{R}_+^2$，令 $U_a(\omega)=\lim\limits_{\substack{b\in D\\ b\to a}}U_b(\omega)$，由 $(\mathscr{F}_Z)$ 的右连续性，U_a 是停点，且 $\forall\ a,b\in\mathscr{R}_+$，$a\leqslant b$，有 $U_a\leqslant U_b$. 由于

$$
\begin{aligned}
&\{A_a(s)=1\}\\
\subseteq&\bigcap_{a_n\in[0,a]\cap D}\{A_{a_n}(s)=1\}\\
=&\bigcap_{a_n\in[0,a]\cap D}\{U_{a_n}\leqslant(s,a)\}\\
=&\{U_a\leqslant(s,a)\}
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\{U_a\leqslant(s,a)\}\\
=&\bigcap_{a_n\in[0,a]\cap D}\{U_{a_n}\leqslant(s,a)\}\\
=&\bigcap_{a_n\in[0,a]\cap D}\{A_{a_n}(a_n-(a_n-s))=1\}\\
\subseteq&\bigcap_{a_n\in[0,a]\cap D}\{A_a(a_n-(a_n-s))=1\}\\
\subseteq&\{A_a(s)=1\}
\end{aligned}
$$

可知，$A_a(s)=I_{[U_a\leqslant(s,a)]}$. 于是 $\{U_a,a\in J\}$ 是可选增道路，且对任意的非负可测过程 X，$\mu_a(X)=EX_{U_a}$.

综上所述，引理得以证明。

下面来讨论策略的随机化，因为策略是可选增道路 $(U_a)_{a\geqslant 0}$ 与 $(\mathscr{F}_{U_a})$ 停时 τ 的二元对 $T=((U_a),\tau)$，所以对策略的随机化，就要将 $(U_a)_{a\geqslant 0}$ 随机化为随机化可选增道路，而且要将 τ 进行随机化，因

此随机策略对应为 $J\times I\times\Omega$ 上的概率族。

定义 6.9 设 $\theta=\{\nu_a,a\in J\}$ 是 $J\times I\times\Omega$ 上的概率族，使得每个 ν_a 在 $I\times\Omega$ 上的投影是一条随机化的可选增道路，即

$$\nu_a(\mathscr{R}_+\times R_z\times F)=\mu_a(R_z\times F),(F\in\mathscr{F})$$

是支撑在 $\triangle_a\times\Omega$ 上的概率测度，且所对应的增过程族 $\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$ 满足(6.61)，(6.62)，(6.63)式，而每个 ν_a 在 $J\times\Omega$ 上的投影是与 a 无关的 $J\times\Omega$ 上的概率测度 ν，要所对应的增过程为 $\{B_b,b\in J\}$，满足

i) $B_0=0,B_\infty=1$ (6.65)

ii) $\forall\ (a,b)\in J^2,z=(s,t)\in I,b\leqslant a,s\leqslant a,|z|\geqslant a$

$$B_b(A_a(s)-A_a(a-t))\text{是 }\mathscr{F}_z\text{ 可测的} \qquad (6.66)$$

则称 $\theta=\{\nu_a,a\in J\}$ 为随机化策略。

也可以说随机化策略就是二元对 (A,B)，其中 A 满足(6.61)—(6.63)式，B 满足(6.65)、(6.66)式。

记 $\mathscr{D}$ 为策略全体，Θ 为随机策略全体，$\mathscr{S}$ 为随机化可选增道路全体。

引理 6.30 $\mathscr{D}$ 与 $\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，$\{B_b,b\in J\}$ 几乎处处取值为 0 或 1 的随机化策略全体是一一对应的。

证明 设 $T=((\sigma_a)_{a\in J},\tau)\in\mathscr{D}$，令

$$A_a(s)=I_{[\sigma_a\leqslant(s,a)]}$$

$$B_b=I_{[\tau\leqslant b]}$$

$$\nu_a([0,b]\times R_z\times F)=\int_F B_b[A_a(s)-A_a(a-t)^-]\mathrm{d}p$$

由 ν_a 产生的 $J\times I\times\Omega$ 上的概率测度仍记为 ν_a，易知 ν_a 在 $I\times\Omega$ 上的投影

$$\begin{aligned}&\nu_a(\mathscr{R}_+\times R_z\times F)\\=&E[I_F(A_a(s)-A_a(a-t)^-]\\=&\mu_a(R_z\times F)\end{aligned}$$

为随机化可选增道路，ν_a 在 $J\times\Omega$ 上的投影

$$\nu_a([0,b]\times R_2\times F)=\int_F B_b\mathrm{d}p=\nu([0,b]\times F)$$

是 $J\times\Omega$ 上与 a 无关的概率测度，显然 $A_a(s)$，$0\leqslant s\leqslant a$，$a\in J$，B_b，$b\in J$，几乎处处为 0 或 1，因为 $A_a(s)-A_a(a-t)^-=I_{[\sigma_a\leqslant(s,t)]}$ 是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$ 可测的，$B_b=I_{[\tau\leqslant b]}$ 是 $\mathscr{F}_{c_b}$ 可测的，故对 $b\leqslant a$，$z=(s,t)$，$|z|\geqslant a$

$$(\tau\leqslant b)\cap(\sigma_a\leqslant z)=(\tau\leqslant b)\cap(\sigma_b\leqslant z)\cap(\sigma_a\leqslant z)\in\mathscr{F}_z$$

所以 $B_b[A_a(S)-A_a(a-t)^-]$ 是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，从而 $\theta=\{\nu_a,a\in J\}$ 是一个随机化策略。

反之，设 $\theta=\{\nu_a,a\in J\}$ 是随机化策略，其相应的 $A_a(s)$，$B_b(s)$ 几乎处处取值 0 或 1，令

$$\tau=\inf\{b\in J:B_b=1\}$$

则对任意 $t\in J$，$z\in\mathscr{R}_+{}^2$，$z=(s,t)$，有

$$\begin{aligned}&(\tau\leqslant t)\cap(\sigma_t\leqslant z)\\&=(B_t=1)\cap(A_a(s)=1)\cap(A_a(a-t)=0)\\&=\{B_t[A_a(s)-A_a(a-t)^-]=1\}\in\mathscr{F}_z\end{aligned}$$

于是 τ 是 $(\mathscr{F}_{c_t})_{t\geqslant0}$ 停时，$((\sigma_t)_{t\in J},\tau)\in\mathscr{D}$. 证毕。

我们在 $\mathscr{S}$ 上引入 $B-C$ 拓扑 Υ 如下：它使得对 $\forall\ a\in J$，$s\in J\cap[0,a]$，$Y\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$

$$\varphi:\mathscr{S}\to\mathscr{R},T\mapsto EYA_a(S)$$

为连续的最粗拓扑。

在 Θ 上也引入 $B-C$ 拓扑 Υ_1 如下：它使得对每个 $a\in J$，$b\in J$，$s\in J\cap[0,a]$，$Y\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，

$$\psi_1:\Theta\to\mathscr{R}:\theta_1\mapsto EYA_a(s)$$

$$\psi_1:\Theta\to\mathscr{R}:\theta_1\mapsto EYB_b$$

为连续的最粗拓扑。

定理 6.31　$\mathscr{S}$ 与 Θ 在 BC 拓扑下是紧的，如果 $\mathscr{F}$ 是可数生成的，则 $\mathscr{S}$，Θ 都是可度量化的，因而是列紧的。

证明本定理的关键是要证明 $\mathscr{S},\Theta$ 能作为一个紧子集嵌入一个乘积空间之中，为此对固定的 $A=\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}\in\mathscr{S}$，考虑映射族 $\alpha_{a,s}:L^1(\Omega)\to\mathscr{R}$ 如下

$$\alpha_{a,s}(Y)=EYA_a(s)$$

于是 $\alpha_{a,s}$ 是 $L^1(\Omega)$ 上的有界线性函，满足

i) $\alpha_{a,0}(Y)=0.\ \alpha_{a,a}(Y)=EY$ (6.67)

ii) 当 $Y\geqslant 0$ 时，$\alpha_{a,s}(Y)$ 关于 s 不减，关于 a 不增 (6.68)

iii) $\alpha_{a,s}(Y)$ 关于 a 左连续，关于 s 右连续 (6.69)

iv) $\alpha_{a,s}(E\{Y|\mathscr{F}_{(s,a-s)}\})=\alpha_{a,s}Y$ (6.70)

记 Λ 为满足(6.67)—(6.70)式的映射族。

引理 6.32 Λ 与 $\mathscr{S}$ 之间存在一一对应，且 $\mathscr{S}$ 的 BC 拓扑同构于 Λ 上的弱 * 拓扑。

证明 由定义 6.8 之(6.61)～(6.63)式，易知 Λ 满足(6.67)～(6.70)式。反之，如有族 Λ 满足(6.67)～(6.70)式，往证必有一族相应的 $\{A_a(s)\}$ 满足(6.61)～(6.63)式，先考虑 $a.s.$ 均为有理数，由泛函表示定理，对每个 $\alpha_{a,s}\in(L^1(\Omega))'$，存在 $A_a(s)\in L^\infty(\Omega)$，使得 $\forall\ Y\in L_1(\Omega)$

$$\alpha_{a,s}(Y)=EYA_a(s)$$

往证 $\{A_a(s)\}$ 即为所求。首先 $A_a(s)$ 有一个 $\mathscr{F}_{(s,a-s)}$ 可测的修正，从而不妨取 $A_a(s)$ 就是要的修正。事实上，设

$$G=\{A_a(s)>E(A_a(s)|\mathscr{F}_{(s,a-s)})\}$$

如 $P(G)>0$，则

$$\begin{aligned}EI_GA_a(s)&>EI_GE(A_a(s)|\mathscr{F}_{(s,a-s)})\\&=E\{E[I_GE(A_a(s)|\mathscr{F}_{(s,a-s)})|\mathscr{F}_{(s,a-s)}]\}\\&=E\{E(A_a(s)|\mathscr{F}_{(s,a-s)})E(I_G|\mathscr{F}_{(s,a-s)})\}\\&=E[A_a(s)E(I_G|\mathscr{F}_{(s,a-s)})]\\&=\alpha_{a,s}(E(I_G|\mathscr{F}_{(s,a-s)})]\\&=\alpha_{a,s}(I_G)=EI_GA_a(s)\end{aligned}$$

矛盾，所以 $P(G)=0$。类似地可证 $P((A_a(s)<E(A_a(s)|\mathscr{F}_s,a-s))=0$，这表明 $A_a(s)a.s$ 是 $\mathscr{F}_{(s,a-s)}$ 可测的。用同样的手法可证明 $A_a(s)$ 关于 s a.s. 右连续，关于 a a.s. 左连续等。

对于一般的 a.s.，则定义

$$A_a(s)=\sup_t \inf_b \{A_b(t); b\geqslant a, t\geqslant s, b,t \text{ 为有理数}\}$$

可以证明 $A_a(s)$ 满足(6.61)～(6.63)式且 a.s. 唯一。因此 Λ 与 Γ 之间是一一对应的，根据弱 * 拓扑的定义可知 BC 拓扑同构于 Λ 上的弱 * 拓扑。

定理 6.31 的证明：我们知道在弱 * 拓扑空间中有界闭球是紧的，我们只要证明 $\Lambda\subset(L^1(\Omega))'$ 是有界闭球，首先 $\forall$ a,s

$$|\alpha_{a,s}(Y)|\leqslant \|Y\|_{L_1}\|A_a(s)\|_\infty$$

是有界的，往证 Λ 是闭的，如 $\{\alpha^\beta_{as};\beta\in D\}$ 是 Λ 中的一个网，且依 BC 拓扑收敛于 $(\alpha_{a,s})\triangleq\alpha$，容易直接验证 $\alpha=(\alpha_{a,s})$ 满足(6.67)～(6.70)式，这表明 Λ 是闭的，因此 Λ 是紧的，即 $(\mathscr{S},\Upsilon)$ 紧空间。

当 $\mathscr{F}$ 是可数生成时，$L(\Omega)$ 是可分的，又 $\alpha_{a,s}$ 关于 $a(s)$ 是左(右)连续的，因此每个 $\alpha_{a,s}(Y)$ 的值可由可数多个形如 $\sum_{i=1}^n r_i I_{G_i}$ (r_i 为有理数，$\mathscr{F}=\sigma(G_1,G_2,\cdots)$))以及有理数 $a_i,s_i\in J$ 的全体所唯一确定，从而 Λ 可嵌入到一个可数维乘积空间之中，因此是可度量化的，所以 $(\mathscr{S},\Upsilon)$ 是列紧的。

关于 Θ 的紧性是类似的，定理证毕。

对每个 $\theta=\{\nu_a,a\in J\}\in\Theta$，存在唯一的 $A\in\mathscr{S}$，$B=B_b;b\in J)$ 与之相对应，使

$$\nu_a([0,b]\times R_s\times F)=E(I_F B_b(A_a(s)-A_a(a-t)^-)$$

所以我们可记 $\theta=(A,B)$，对给定的 $\theta\in\Theta$，记

$$\mathscr{S}(\theta)=\{A\in\mathscr{S};(A,B)\in\Theta\}$$

$$B(\theta)=\{B=(B_b,b\in J)\text{ 为增过程},(A,B)\in\Theta\}$$

引理 6.33 $\mathscr{S}$ 是凸的，且对于任意的 $\theta\in\Theta$，$\mathscr{S}(\theta)$，$B(\theta)$ 也是

凸集。

证明 设$T_1,T_2\in\mathscr{S}$，相应的增过程族分别为$\{A_a^1(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$与$\{A_a^2(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，设$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，，则当$0\leqslant a\leqslant b<\infty$时，有

$$\alpha A_a^1(s)+(1-\alpha)A_a^2(s)\geqslant\alpha A_b^1(s)+(1-\alpha)A_b^2(s)$$

$$\alpha A_a^1(a-t)+(1-\alpha)A_a^2(a-t)\leqslant\alpha A_b^1(a-t)+(1-\alpha)A_b^2(a-t)$$

因此$\alpha A^1+(1-\alpha)A^2$满足(6.62)，同样可证明它满足(6.61)及(6.63)式，可见对应的$T\in\mathscr{S}$，凸性得证。$\mathscr{S}(\theta)$，$B(\theta)$的凸性也容易证得。

定理 6.34 1) 可选增道路全体与$\mathscr{S}$的端点集1—1对应；

2) 固定$\theta\in\Theta,\theta=(A,B)$，其中$B=(B_b,b\in J)$是几乎处处取0或1的增过程，则$\mathscr{S}(\theta)$中可选增道路与$\mathscr{S}(\theta)$的端点一一对应，从而$\mathscr{S}(\theta)\times\{B\}$中策略与$\mathscr{S}(\theta)\times\{B\}$的端点1—1对应；

3) 固定$\theta\in\Theta$，$B(\theta)$的端点与$B(\theta)$中几乎处处取值为0或1的增过程1—1对应。

证明 对$I=\overline{\mathscr{R}}_+{}^2$、$J=\overline{\mathscr{R}}_+{}^2$证明定理。

(1) 由引理6.29，6.30，每一条可选增道路与一个取值(a.s)为0或1的增过程族$\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$一一对应，它所确定的随机化可选增道路$T$显然是$\mathscr{S}$的端点。往证相反，只需证明：对于满足(6.61)～(6.63)式的增过程族$\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，若存在$a_0\in J,s_0\in[0,a_0],F\in\mathscr{F},P(F)>0$，使得$0<A_{a_0}(s_0)<1(\omega\in F)$，则$\{A_a(s):0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$所对应的$T$不是$\mathscr{S}$的端点。

由定义6.7，当$a=\infty$时，对一切$s<\infty$，$A_\infty(s)=0$，$A_\infty(\infty)=1$，由$A_a(s)$关s的右连续性，故可设上述$a_0\in\mathscr{D}$(二进制有理数集)，$s_0\in[0,a_0]\cap D$，取$0<\lambda<1$，令

$$A_a^1(s)=\frac{A_a(s)}{\lambda}\wedge 1,A_a^2(s)=\frac{A_a(s)-\lambda}{1-\lambda}\vee 0$$

易知$A_a(s)=\lambda A_a^1(s)+(1-\lambda)A_a^2(s)$。只需证明由$\{A_a{}^1(s),0\leqslant s\leqslant a,a$

$\in J\}$和$\{A_a^2(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$所确定的$T_1,T_2$是两条不同的随机化增道路。

事实上，容易证明$A_a^1(s),A_a^2(s)$都是递增的，关于s右连续且$\mathscr{F}_{(s,a-s)}$可测的，由函数$x\mapsto\frac{x}{\lambda}$及$x\mapsto\frac{x-\lambda}{1-\lambda}\vee 0$的递增性，可见当$0\leqslant a\leqslant b<\infty$时，$A_a^i(s)\geqslant A_b^i(s),A_a^i(a-t)\leqslant A_b^i(b-t),i=1,2$，因此$T_1,T_2\in\mathscr{S}$. 因为当$\omega\in F$时，$0<A_{a_0}(s_0,\omega)<1$，故$\frac{A_{a_0}(s_0,\omega)}{\lambda}\wedge 1\neq\frac{A_{a_0}(s_0,\omega)}{1-\lambda}\vee 0$，亦即在$F$上$A_{a_0}^1(s_0)\neq A_{a_0}^2(s_0)$，从而$T_1\neq T_2$.

2) 只需证明：对于随机化可选增道路$T=\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\},(A,B)\in\Theta$，如存在$a_0\in J,s_0\in[0,a_0],F\in\mathscr{F},P(F)>0$，使当$\omega\in F$时，$0<A_{a_0}(s_0,\omega)<1$，则$T$是$\mathscr{S}(\theta)$中元素的严格凸组合且$(A,B)$也是$\mathscr{S}(\theta)\times\{B\}$中元素的严格凸组合。

固定$0<\lambda<1$，取

$$A_a^1(s)=\frac{A_a(s)}{\lambda}\wedge 1,A_a^2(s)=\frac{A_a(s)-\lambda}{1-\lambda}\vee 0$$

则$A^1,A^2\in\mathscr{S}$，且$A^1\neq A^2$，往证$(A^i,B)\in\Theta,i=1,2$.

当$s+t\geqslant a,b\leqslant a$时

$$\begin{aligned}
&B_b[A_a^1(s)-A_a^1(a-t)]\\
&=B_b[(\frac{A_a(s)}{\lambda}\wedge 1)-(\frac{A_a(a-t)}{\lambda}\wedge 1)]\\
&=\frac{1}{\lambda}I_{[A_a(s)\leqslant\lambda]}B_b[A_a(s)-A_a(a-t)]\\
&\quad+\frac{1}{\lambda}I_{[A_a(a-t)\leqslant\lambda<A_a(s)]}I_{[B_b>0]}(\lambda-A_a(a-t))B_b\\
&=\frac{1}{\lambda}I_{[A_a(s)\leqslant\lambda]}B_b[A_a(s)-A_a(a-t)]\\
&\quad+\frac{1}{\lambda}(\lambda-A_a(a-t))I_{[A_a(a-t)\leqslant\lambda<A_a(s)]\cap\{B_b[A_a(s)-A_a(a-t)]>0\}}
\end{aligned}$$

因为$A_a(s)$是$\mathscr{F}_{(s,a-s)}$可测的，从而$\mathscr{F}_{(s,t)}$可测，同样$A_a(a-t)$也是

$\mathscr{F}_{(s,t)}$可测，而 $B_b[A_a(s)-A_a(a-t)]$是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$可测的，因此 $B_b[A_a^1(s)-A_a^1(a-t)]$是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$可测。同理可证 $B_b[A_a^2(s)-A_a^2(a-t)]$是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$可测，因而$(A^i,B)\in\Theta$, $i=1,2$.

显见 $A^1\neq A^2$，且 $A_a(s)=\lambda A_a^1(s)+(1-\lambda)A_a^2(s)$。

3）只需证明：如果 $B=(B_b,b\in J)$，$(A,B)\in\Theta$，若存在 $b_0\in D$，$0<\lambda<\frac{1}{2}$，使 $P(\lambda<B_{b_0}<1-\lambda)>0$，则 B 是 $B(\theta)$中元素的严格凸组合。

记 $F=\{\lambda<B_{b_0}<1-\lambda\}$，令

$$B_b^1=\frac{B_b}{\lambda}\wedge 1$$

$$B_b^2=\frac{B_b-\lambda}{1-\lambda}\vee 0$$

则 $B_b=\lambda B_b^1+(1-\lambda)B_b^2$，且在 F 上，$B_{b_0}^1\neq B_{b_0}^2$，往证 $B^i\in B(\theta)$，$i=1,2$，当 $s+t\geqslant a$，$b\leqslant a$ 时

$$\begin{aligned}&B_b^1[A_a(s)-A_a(a-t)]\\&=\frac{1}{\lambda}\{B_b[A_a(s)-A_a(a-t)]\wedge\lambda[A_a(s)-A_a(a-t)]\}\end{aligned}$$

故 $B_b^1[A_a(s)-A_a(a-t)]$是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$可测的，同理 $B_b^2[A_a(s)-A_a(a-t)]$也是 $\mathscr{F}_{(s,t)}$可测的，于是 $B_i\in B(\theta)$，$i=1,2$，定理证毕。

§6.5 两参数过程最优停点的存在性

对于 $T=((\sigma_a,a\in J),\tau)\in\mathscr{Q}$，定义

$$EX_T=EX_{\sigma_\tau} \tag{6.71}$$

相应于 T 的随机化策略，仍记为 T：$A_a(s)=I_{[\sigma_a\leqslant(s,a)]}$，$B_b=I_{[\tau\leqslant b]}$.

设 $I=\overline{\mathscr{N}}_+{}^2$，$J=\overline{\mathscr{N}}_+$，由(6.71)式，则

$$EX_T=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}EX_{(m,n-m)}I_{[\tau=n]\cap[\sigma_n=(m,n-m)]} \tag{6.72}$$

记

$$C(b,a,z)=\begin{cases}B_b[A_a(s)-A_a(a-t)^-], & s+t\geqslant a\\ 0, & s+t<a\end{cases}$$

$$D(n,z)=C(n,n,z)-C(n-1,n,z)$$

$$D(-\infty,z)=0$$

$$D(\infty,(\infty,\infty))=1-\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}D(n,z)$$

则 $D(n,z)=[B(n)-B(n-1)][A_s(m)-A_s(n-p)^-]$，其中 $z=(m,p)$，于是

$$EX_T=\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}EX_zD(n,z) \tag{6.73}$$

因此，对于随机化策略 $\theta=(A,B)\in\Theta$，自然有

定义 6.10 如果 $\{X_z,z\in\overline{\mathscr{N}}_+{}^2\}$ 是非负过程，或者 $\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E(|X_z|D(n,z))<\infty$，则

$$\begin{aligned}EX_\theta&=\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E(X_zD(n,z))\\&=\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E\{X_{(m,n-m)}(B_n-B_{n-1})(A_s(m)-A_s(m-1)\}\end{aligned} \tag{6.74}$$

为了对 $I=\overline{\mathscr{R}}_+{}^2$，$J=\overline{\mathscr{R}}_+$ 的情况定义 EX_θ，我们先考虑 θ 与 EX_θ 的积分表示。

Choquet **定理** 设 S 是实的局部凸的准赋范空间，K 是 S 的紧凸子集，则对每个 $x_0\in K$，存在支撑在 K 的端点集 ext K 上的 Borel 概率测度 μ_{x_0}，使得对于任意有界线性泛函 f

$$f(x_0)=\int_K f(x)\mathrm{d}\mu_{x_0} \qquad \text{(证明见[60])}$$

设 $\theta=(A,B)\in\Theta$，记 ext $B(\theta)$ 为 $\{A\}\times B(\theta)$ 的端点集，ext $\mathscr{S}(\theta)$ 为 $\mathscr{S}(\theta)\times\{B\}$ 的端点集。由定理 6.31 知，$\{A\}\times B(\theta)$ 是可度量化的紧凸集（Θ 的闭子集）。由 Choquet 定理，存在 $\{A\}\times B(\theta)$ 上 *Borel* 概率测度 μ_θ 使得 $\mu_\theta(\text{ext}B(\theta))=1$，且

$$\theta = \int_{\mathrm{ext}B(\theta)} (A, B')\,\mathrm{d}\mu_\theta(A, B')$$

而 $\mathscr{S}(\theta)\times\{B'\}$ 也是可度量化的紧凸集，$\Theta\cap\Gamma(\theta)\times\{B'\}$ 同构于 $\Gamma(\theta)\times\{B'\}$ 的端点集，故存在 $\mathscr{S}(\theta)\times\{B'\}$ 上的 Borel 概率测度 $\Pi_{(A,B')}$，使得

$$\Pi_{(A,B')}(\mathrm{ext}(\mathscr{S}(\theta)\times\{B'\}))=1$$

$$(A,B')=\int_{\mathscr{D}\cap(\mathscr{S}(\theta)\times\{B'\})}(A',B')\,\mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(A',B')$$

从而对于双线性的连续泛函

$$f:(\prod_{a\in J}\prod_{e\in J}L^\infty\times\prod_{b\in J}L^\infty)\to R$$

有

$$f(\theta)=\int_{\mathrm{ext}B(\theta)}\left\{\int_{\mathscr{D}\cap(\mathscr{S}(\theta)\times\{B'\})}f(T)\,\mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(\theta')\right\}\mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$

$$\triangleq\int_{\mathscr{D}}f(T)\,\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T) \qquad (6.75)$$

引理 6.35 设 $\{X_z, z\in\overline{\mathscr{N}}_+^{\,2}\}$ 是非负过程或者是可积的，即 $\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E(|X_z|D(n,z))<\infty$，$\theta=(A,B)\in\Theta$，$\mu_\theta$，$\Pi(A,B')$ 分别是由 Choquet 定理所确定的 $\mathrm{ext}B(\theta)$ 和 $\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta)\times\{B'\})$ 上的概率测度，则

$$EX_\theta=\int_{\mathrm{ext}B(\theta)}\left\{\int_{\mathscr{D}(\Gamma(\theta)\times\{B'\})}EX_{T'}\,\mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(T')\right\}\mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$

证明 考虑线性泛函 $\varphi:\Theta\to R$，它对于 $\theta=(T,B)\in\Theta$，$\varphi(\theta)=EX_\theta^+=\sum_{n\in\overline{\mathscr{N}}_+}\sum_{|z|=n}E(X_z^+D(n,z))$

对于固定的 $n\in\overline{\mathscr{N}}_+$，$z\in\overline{\mathscr{N}}_+^{\,2}$，$z=(m,n-m)$，映射

$$\varphi_z:\Theta\to R,\ \varphi_z(\theta)$$
$$=E(X_z^+D(n,z))$$
$$=E\{X_z^+(B_n-B_{n-1})[A_n(m)-A_n(m-1)]\}$$

易知 φ_z 是双线性的，由于 $EX_z^+<\infty$，所以对于任意的 $\theta=(T,B)\in\Theta$

$$|\varphi_z(\theta)|=|EX_z^+D(n,z)|$$

$$\leqslant EX_z^+ \| B_n - B_{n-1} \|_\infty \| A_n(m) - A_n(m-1) \|_\infty$$
$$< \infty$$

从而 φ_z 是双线性连续泛函。因此

$$EX_z^+ D(n,z)$$
$$= \varphi_z(\theta)$$
$$= \int_{\text{ext}B(\theta)} \{ \int_{\mathscr{Q} \cap (\Gamma(\theta) \times \{B'\})} \varphi_z(T) \mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(T) \} \mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$
$$= \int_{\text{ext}\, B(\theta)} \{ \int_{\mathscr{Q} \cap (\Gamma(\theta) \times \{B'\})} EX_z^+ I_{[\sigma_n = z] \cap [\tau = n]} \mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(T) \} \mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$

从而

$$EX_\theta^+ = \sum_{n \in \mathscr{N}_+} \sum_{|z|=n} EX_z{}^+ D(n,Z)$$
$$= \int_{\text{ext}\, B(\theta)} \{ \int_{\mathscr{Q} \cap (\Gamma(\theta) \times \{B'\})} EX_T^+ \Pi_{(A,B')}(T') \} \mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$
$$= \int_{\mathscr{Q}} EX_T^+ \mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)$$

因为 $EX_T = EX_T^+ - EX_T^-$，当 $\{X_z, z \in \overline{\mathscr{N}}_+\}$ 为正时，$EX_T = EX_T{}^+$，当 $\sum\limits_{n \in \mathscr{N}} \sum\limits_{|z|=n} E(|X_z| D(n,Z)) < \infty$ 时，有 $\sum\limits_{n \in \mathscr{N}} \sum\limits_{|z|=n} E(X_z{}^+ D(n,Z)) < \infty$，从而 $\int_{\mathscr{Q} \cap (\Gamma(\theta) \times \{B'\})} EX_T{}^+ \mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(T) < \infty \quad a.s. - \mu_\theta$，所以，对 $a.s - \mu_\theta$ 的 T，$EX_T^+ < \infty \quad a.s - \Pi_{(T,B')}$，这样 $EX_T = EX_T^+ - EX_T^-$ 有定义，故

$$EX_\theta = \int_{\mathscr{Q}} E(X_T) d(\mu\Pi)_\theta(T)$$

证毕

现在来讨论用取值于 $\mathscr{D}^2$（二进制有理数集）的停点来逼近在 $\mathscr{R}_+{}^2$ 中取值停点的问题。

设 $J = \overline{\mathscr{R}}_-{}^2$，$I = \overline{\mathscr{R}}_+$，给定 $T = ((\sigma_t, t \in J), \tau) \in \mathscr{Q}$，令

$$A(n,k,i) = \{\omega: 2^{-n}(k-1) < 2^{-n}k, 2^{-n}(i-1) < (\sigma_{2^{-n}k})_1 \leqslant i2^{-n}\}$$

其中

$(\sigma_{2^{-n}k})_1$ 表示 $\sigma_{2^{-n}k}$ 的第一坐标， $2 \leqslant i \leqslant k \leqslant 2^n \cdot n$

$$A(n,k,1) = \{\omega: 2^{-n}(k-1) < \tau \leqslant 2^{-n}k, (\sigma_{2^{-n}K})_1 \leqslant 2^{-n}\}$$
$$A(n,1,1) = \{\omega: \tau \leqslant 2^{-n}\}$$

$$A(n,\infty)=\{\tau>n\}$$

$$T[n]=\sum_{k=1}^{n2^n}\cdot\sum_{i=1}^{k}(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})I_{A(n,k,i)}+(\infty,\infty)I_{A(n,\infty)}$$

显然，$T[n]$是一个停点，且

$$\sigma_\tau<T[n]$$

$$\lim_{n\to\infty}T[n]=\sigma_\tau$$

$$EX_{T[n]}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n2^n}\sum_{|z|=(k+1)2^{-n}}E(X_zI_{[T[n]=z]})+EX_{(\infty,\infty)}I_{A(n,\infty)}$$

当 $\theta\in\Theta,\theta=(T,B)$对应的增过程族为$\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in J\}$，$B=(B_b,b\in J)$，令

$$\delta(n,k,i)=[B_{k2^{-n}}-B_{(k-1)2^{-n}}(A_{k2^{-n}}(i2^{-n})A_{k2^{-n}}((i-1)2^{-n})]$$

$$2\leqslant i\leqslant k\leqslant n\cdot 2^{-n}$$

$$\delta(n,k,1)=(B_{k2^{-n}}-B_{(k-1)2^{-n}})A_{k2^{-n}}(2^{-n})$$

$$\delta(n,1,1)=B_{2^{-n}}$$

$$\delta(n,\infty)=1-B_n$$

定义

$$X_{\theta[n]}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n2^n}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}X_{(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})}\delta(n,k,i)+X_{(\infty,\infty)}\delta(n,\infty) \tag{6.76}$$

则

$$EX_{\theta[n]}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n2^n}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\int_{\mathscr{D}}[X_{(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})}\delta_T(n,k,i)d(\mu\Pi)_\theta(T)$$
$$+\int_{\mathscr{D}}E(X_{(\infty,\infty)}\delta_T(n,\infty))\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)$$

其中 δ_T 是将 T 作为随机化策略而得到的。

如果$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in I\}$是右连续类$(D)$过程(即$\{X_\sigma I_{(\sigma<\infty)}\}_{\sigma\in\mathscr{T}}$为一致可积族，其中 $\mathscr{T}$ 为停点的全体)，$\theta\in\Theta$，则由引理 6.35

$$EX_{\theta[n]}=\int_{\mathscr{D}}EX_{T[n]}\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T) \tag{6.77}$$

引理 6.36 设$\{X_z,\mathscr{F}_Z,Z\in I\}$为右连续类$(D)$过程 $\theta\in\Theta,\mu_\theta$，

$H_{(A,B')}$分别是由 choquet 定理确定的 ext$B(\theta)$和 $\mathscr{D}\cap(I'(\theta)\times\{B'\})$上的概率测度，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{\theta[n]}$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}EX_{\theta[n]}=\int_{\mathscr{D}}E(X_T)\mathrm{d}(\mu H)_\theta(T)$$

证明 由于$\lim T[n]=T$ 且 $T[n]$单调下降，以及$\{X_z,z\in I\}$的右连续性和$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T[n]}=X_T$ 由于$\{X_z,z\in I\}$是类(D)过程，由 Fatou 引理知

$$\lim_{n\to\infty}EX_{T[n]}=EX_T$$

又由$\sup\ E\{|X_T|,T\in\mathscr{D}\}<\infty$，根据控制收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{\theta[n]}=\int_{\mathscr{D}}\lim\limits_{n\to\infty}EX_{T[n]}\mathrm{d}(\mu H)_\theta(T)=\int_{\mathscr{D}}EX_T\mathrm{d}(\mu H)_\theta(T)$。证毕。

由上述引理，我们自然定义

$$EX_\theta=\lim_{n\to\infty}EX_{\theta[n]}$$

下面的定理表明，随机化策略的引入不改变最优停止问题的值。

定理 6.37 设 i) $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{\mathscr{N}}_+^2\}$满足$\sup\{E|X_T|,T\in\mathscr{D}\}<\infty$或者 ii) $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{\mathscr{R}}_+^2\}$是右连续类$(D)$过程，则

$$V=\sup\{EX_T;T\in\mathscr{D}\}=\sup\{EX_\theta,\theta\in\Theta\}$$

如果上式一端能达到，则另一端也能达到。如果存在$\theta=(A,B)\in\Theta$，使得$EX_\theta=V$，且$\lim\limits_{b\to\infty}B_b=1$，则存在停点$\sigma$，$P(\sigma<\infty)=1$使$V=EX_\sigma$.

证明 在F_4条件下，$V\triangleq\sup\{EX_\sigma,\sigma$ 为停点$\}=\sup\{EX_T,T\in\mathscr{D}\}$，故只需证明

$$\sup\{EX_T,T\in\mathscr{D}\}=\sup\{EX_\theta;\theta\in\Theta\}\tag{6.78}$$

显然，$\sup\{EX_T,T\in\mathscr{D}\}\leqslant\sup\{EX_\theta,\theta\in\Theta\}$。往证相反的不等式，由条件(ii)及引理 6.36，$\forall\ \theta\in\Theta$

$$EX_\theta=\int_{\mathscr{D}}EX_T\mathrm{d}(\mu H)_\theta(T)$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{D}} \sup\{EX_T, T\in\mathscr{D}\}\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)$$

$$=\sup\{EX_T, T\in\mathscr{D}\}$$

从而$\sup\limits_{\theta\in\Theta}EX_\theta\leqslant\sup\limits_{T\in\mathscr{D}}EX_T$，(6.78)式获证。

在条件 i)下，固定 $\theta\in\Theta$，对固定的 $k\in\mathscr{N}_+$

$$\sum_{n\leqslant k}\sum_{|z|=n}E\{|X_z|D(n,Z)\}$$

$$=\sum_{n\leqslant k}\sum_{|z|=n}\int_{\mathscr{D}}E\{|X_z|I_{(\tau=n,\sigma_n=z)}\}\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)$$

$$=\int_{\mathscr{D}}E\{|X_z|I_{[\tau\leqslant k]}\}\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)$$

$$\leqslant\sup\{E|X_z|;T\in\mathscr{D}\}<\infty$$

而 $X_{(\infty,\infty)}\in L^1$，故

$$\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E\{|X_z|D(n,Z)\}<\infty$$

由引理 6.35

$$EX_\theta=\int_{\mathscr{D}}EX_T\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T)\leqslant\sup\{EX_T, T\in\mathscr{D}\}$$

所以，在条件 i)或 ii)下均有

$$V=\sup\{EX_T, T\in\mathscr{D}\}=\sup\{EX_\theta;\theta\in\Theta\}$$

设存在 $\theta^*=(A^*,B^*)\in\Theta$，使 $V=EX_{\theta^*}$，因为

$$EX_{\theta^*}$$

$$=\int_{\text{ext }B(\theta^*)}\{\int_{\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})}EX_T\mathrm{d}\Pi_{(A^*,B')}(T)\}\mathrm{d}\mu_{\theta^*}(A^*,B')$$

$$\leqslant\int_{\text{ext }B(\theta^*)}\{\int_{\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})}\sup\{EX_T, T\in\mathscr{D}\}\mathrm{d}\Pi_{(A^*,B')}(T)\}\mathrm{d}\mu_{\theta^*}(A^*,B')$$

$$=V$$

所以，对每个$(A^*,B')\in\text{ext }B(\theta^*)$，有

$$\int_{\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})}EX_T\mathrm{d}\Pi_{(A^*,B')}(T)=V\quad a.s.-\mu_{\theta^*}$$

从而，存在 B°，使$(A^*,B^\circ)\in\text{ext }B(\theta^*)$，且

$$\int_{\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})}EX_T\mathrm{d}\Pi_{(A^*,B^\circ)}(T)=V$$

因为对$\forall\ T\in\mathscr{Q}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})$，$EX_T\leqslant V$，由上式知存在$T\in\mathscr{Q}$使得$EX_T=V$

最后，如果上面的$B^*=(B_b^*,b\in J)$，满足$\lim\limits_{b\to\infty}B_b^*=1$，则由

$$X_{\theta^*[n]}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n\cdot 2^n}\sum_{i=1}^{k}X_{(i2^{-n},(K+1-i)2^{-n})}\delta(n,k,i)+X_{(\infty,\infty)}\delta(n,\infty) \tag{6.79}$$

以及$\delta(n,\infty)=1-B_n^*\to 0(n\to\infty)$，且

$$\begin{aligned}
&EX_{\theta^*}\\
&=\sum_{n\in\overline{\mathscr{N}}_+}\sum_{|z|=n}E(X_zD(n,Z))\\
&=\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}E(X_zD(n,Z))\\
&=\int_{\mathrm{ext}B(\theta^*)}\{\int_{\mathscr{Q}\cap(\Gamma(\theta^*)\times\{B'\})}\sum_{n\in\mathscr{N}}\sum_{|z|=n}E(X_zI_{(\tau=n,\sigma_n=z)})\mathrm{d}H_{(A^*,B')}(T)\}\mathrm{d}\mu_{\theta^*}(A^*,B')\\
&=V
\end{aligned} \tag{6.80}$$

可知存在$T\in\mathscr{Q}$，$P(\alpha(T)<\infty)=1)$，使$EX_{\alpha(T)}=V$，证毕。

对于离散两指标过程，有

定理6.38　设$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{\mathscr{N}}_+^2\}$是可积的类$(D)$过程，且$\limsup\limits_{z\to\infty}X_z\leqslant X_{(\infty,\infty)}$，则存在最优停点，即存在$\sigma^*$为$(\mathscr{F}_z)_{z\in\mathscr{N}_+^2}$停点，使得$EX_{\sigma^*}=V$.

证明　由过程的类(D)性质，$V<\infty$. 由定理6.37只需证明存在$\theta^*\in\Theta$，使$EX_{\theta^*}=V$.

由于存在$\theta_n\in\Theta$，$n=1,2,\cdots$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}EX_{\theta_n}=V$，而$\Theta$在$BC$拓扑下是列紧的，于是存在$\theta\in\Theta$，及子列(仍记为)$\{\theta_n\}$，使$\theta_n\to\theta(n\to\infty$，$BC$拓扑下)。

往证$EX_\theta=\lim\limits_{n\to\infty}EX_{\theta_n}$即可。

设$\theta=(A,B)$，$A=\{A_a(s),0\leqslant s\leqslant a,a\in\overline{\mathscr{N}}_+\}$，$B=\{B_b,b\in\overline{\mathscr{N}}_+\}$，$\theta_m=(A_m,B_m)$，$A_m=\{A_a^m(s),s\in[0,a]\cap\overline{\mathscr{N}}_+,a\in\overline{\mathscr{N}}_+\}$，$B_m=$

$\{B_b^m, b\in \overline{\mathscr{N}}_+\}$. 注意到

$$EX_\theta = E\{\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{|z|=n} X_z D(n,Z)\} + E\{\sum_{k\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n} X_z D(n,Z)\}$$
$$+ EX_{(\infty,\infty)} D(\infty,(\infty,\infty)) \qquad (6.81)$$

由定理6.37的证明知 $\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n} E(|X_z|D(n,Z))<\infty$，故

$$EX_\theta = \int_{extB(\theta)} \{ \int_{\mathscr{D}\cap(\Gamma(\theta)\times\{B'\})} E(X_T)\mathrm{d}\Pi_{(A,B')}(T)\}\mathrm{d}\mu_\theta(A,B')$$

$$E|X_\theta| = \int_{\mathscr{D}} E|X_T|\mathrm{d}(\mu\Pi)_\theta(T) \leqslant \sup\{E|X_T|, T\in\mathscr{D}\}<\infty$$

因为 $\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}|X_z|D(n,Z)<\infty$，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，存在正整数 k_1，使

$$E\{\sum_{k_1\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}|X_z|D(n,Z)\}<\varepsilon \qquad (6.82)$$

由 $X_{(\infty,\infty)}\in L^1(\Omega)$ 且 $\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}D(n,Z)\leqslant 1$（见下面补证(1)），知存在正整数 K_2，使

$$E\{\sum_{K_2\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}|X_{(\infty,\infty)}|D(n,Z)\}<\varepsilon \qquad (6.83)$$

取 $k=\max(k_1,k_2)$，则

$$EX_\theta \geqslant E\{\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}X_z D(n,Z)\} + E\{X_{(\infty,\infty)}\sum_{k\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}D(n,Z)\} - 2\varepsilon$$
$$(6.84)$$

由于 $\theta_m\to\theta$(BC 拓扑)，存在 $m_0\in\mathscr{N}_+$，使

$$|E(\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}[D(n,z)-D_m(n,z)]X_z)|<\varepsilon, \quad m\geqslant m_0$$

$$|E(\sum_{n\geqslant k}\sum_{|z|=n}[D(n,z)-D_m(n,z)]X_{(\infty,\infty)})|<\varepsilon, \quad m\geqslant m_0$$

从而

$$EX_\theta \geqslant E\{\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}[D_m(n,z)X_z\}$$
$$+ E\{\sum_{n\geqslant k}\sum_{|z|=n}[D_m(n,z)X_{\infty,\infty}\} - 4\varepsilon \qquad (6.85)$$

记 $A_k=\{\omega: X_{(\infty,\infty)}\geqslant \sup\limits_{|z|=n\geqslant k} X_z(\omega)-\varepsilon\}$. 由于过程是类 D 的，对上面的 ε，存在 $\alpha>0$，使对一切满足 $P(A)\leqslant\alpha$ 的 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\sup\{E|X_T|I_A \quad T\in\mathscr{Q}\}<\varepsilon \tag{6.86}$$

$$E|X_{(\infty,\infty)}|I_A<\varepsilon \tag{6.87}$$

取 k 充分大，则有 $P(A_k^c)\leqslant\alpha$（见下面补证(2)），其中 α 使得(6.86)，(6.87)式同时成立，从而

$$E\{I_{A_k^c}\sum_{k\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}D_m(n,Z)|X_{(\infty,\infty)}|\}\leqslant E\{I_{A_k^c}|X_{(\infty,\infty)}|\}\leqslant\varepsilon$$

于是由(6.85)式

$$\begin{aligned}
&EX_\theta\\
\geqslant &E(\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}X_zD_m(n,z))+E(I_{A_k^c}\sum_{k\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}X_{(\infty,\infty)}D_m(n,z))\\
&+EI_{A_k}\sum_{K\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}D_m(n,z)(X_z-\varepsilon)\\
&+E\{X_{(\infty,\infty)}D(\infty,(\infty,\infty))\}-4\varepsilon\\
\geqslant &E\{\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}X_zD_m(n,z)\}-E\{I_{A_k^c}\sum_{K\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}D_m(n,Z)|X_{(\infty,\infty)}|\}\\
&+E\{I_{A_k}\sum_{k\leqslant n<\infty}\sum_{|z|=n}X_zD(n,Z)\}-5\varepsilon+E\{X_{(\infty,\infty)}D(\infty,(\infty,\infty))\}\\
\geqslant &E\{\sum_{n<k}\sum_{|z|=n}X_zD(n,Z)\}+E\{X_{(\infty,\infty)}D_m(\infty,(\infty,\infty))\}\\
&+\int_{\mathscr{Q}}E(I_{A_k\cap(k\leqslant\sigma_T<\infty)}X_{\sigma_T})d(\mu\Pi)_{\theta_m}(T)-6\varepsilon\\
\geqslant &EX_{\theta_m}-7\varepsilon \qquad (m\geqslant m_0)
\end{aligned}$$

所以

$$EX_\theta=\lim_{m\to\infty}EX_{\theta_m}=V$$

证毕

补证(1)：

$$0\leqslant\sum_{n\in\mathscr{N}_+}\sum_{|z|=n}D(n,Z)$$

$$=\sum_{s\in\mathscr{N}_+}\sum_{n=1}^{s}(B_n-B_{n-1})(A_n(s)-A_n(s-1))$$

$$=\sum_{n\in\mathcal{N}_+}(B_n-B_{n-1})(A_n(n)-A_n(0))\leqslant\sum_{n\in\mathcal{N}_+}(B_n-B_{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(B_n-B_0)\leqslant 1$$

补证(2)：令 $L(\omega)=\limsup_{z\to\infty}X_z(\omega)$，则由 $L\leqslant X_{(\infty,\infty)}$，知 $L\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$。因为

$$A_k\supseteq\{\omega;L(\omega)\geqslant\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)-\varepsilon\}$$

$$(P)\limsup_{z\to\infty}X_z=L$$

故

$$\lim_{k\to\infty}P\{|\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)-L(\omega)|>\varepsilon\}=0$$

对于使(6.86)，(6.87)成立的 $\alpha>0$，存在 $k_3>0$，使

$$P(|\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)-L(\omega)|>\varepsilon)\leqslant\alpha\qquad(k\geqslant k_3)$$

从而

$$P(|\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)-L(\omega)|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\alpha\qquad(k\geqslant k_3)$$

于是

$$P(\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)\leqslant L(\omega)+\varepsilon)$$

$$\geqslant P(|\sup_{k\leqslant|z|<\infty}X_z(\omega)-L(\omega)|\leqslant\varepsilon)$$

$$\geqslant 1-\alpha\qquad(k\geqslant k_3)$$

取使(6.85)式成立的($k\geqslant k_3$)，则有

$$P(A_k^c)\leqslant\alpha,\qquad k\geqslant\max(k_1,k_2,k_3)$$

对于连续两参数的过程，有

定理6.39 设$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$是右连续类$(D)$过程，且

$$\limsup_{n\to\infty}\{|E(X_T-X_{T[n]})|;T\in\mathscr{D}\}=0\qquad(6.88)$$

则存在最优停点，即存在停点 σ^*，使

$$EX\sigma^*=\sup\{EX_\sigma;\sigma_n\text{为停点}\}$$

证明 由于所考虑的过程是右连续的，故可认为 $\mathscr{F}$ 是可列生成的，从而 Θ 是列紧的，设$\{\theta_j\}\subseteq\Theta$，使$\lim_{j\to\infty}EX_{\theta_j}=V$. 由列紧性，存

在子列(仍记为)$\{\theta_j\}$,使 $\theta_j\to\theta(j\to\infty, BC$ 拓扑)。设 $\theta_j=(A_j,B_j)$,则

$$EX_{\theta_j[n]}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n2^{-n}}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\{EX_{(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})}\delta^j(n,k,i)+EX_{(\infty,\infty)}\delta^j(n,\infty)\}$$

由于 $\theta_j\to\theta(BC$ 拓扑),故

$$\lim_{j\to\infty}E\{X_{(\infty,\infty)}\delta^{(j)}(n,\infty)\}=E\{X_{(\infty,\infty)}\delta(n,\infty)\}$$

$$\lim_{j\to\infty}E\{X_{(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})}\delta^j(n,k,i)\}=E\{X_{(i2^{-n},(k+1-i)2^{-n})}\delta(n,k,i)\}$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}EX_{\theta_j[n]}=EX_{\theta[n]}$$

对于任意固定的 $\theta'=(A',B')\in\Theta$,设 $\mu_{\theta'},H_{(A',B')}$是由 Choquet 定理确定的概率测度,则

$$\begin{aligned}&|EX_{\theta'}-EX_{\theta'[n]}|\\ \leqslant&\int_{\mathscr{D}}|EX_T-EX_{T[n]}|\mathrm{d}(\mu H)_{\theta'}(T)\\ \leqslant&\sup\{|EX_T-EX_{T[n]}|;T\in\mathscr{D}\}\end{aligned}$$

因此

$$|EX_{\theta_j}-EX_\theta|\leqslant|EX_{\theta_j}-EX_{\theta_j[n]}|+|EX_{\theta_j[n]}-EX_{\theta[n]}|+|EX_{\theta[n]}-EX_\theta|$$

而$\limsup\limits_{n\to\infty}\{|EX_T-EX_{T[n]}|;T\in\mathscr{D}\}=0$. 故$\forall\ \varepsilon>0$,总存在 $N\in\mathscr{N}_+$,使

$$|EX_{\theta[n]}-EX_\theta|<\varepsilon,\quad n\geqslant N$$

$$|EX_{\theta_j}-EX_{\theta_j[n]}|<\varepsilon,\quad n\geqslant N$$

又存在 $K\in\mathscr{N}_+$,,使当 $j\geqslant K$ 时

$$|EX_{\theta_j[N]}-EX_{\theta[N]}|<\varepsilon$$

从而,当 $j\geqslant K$ 时,恒有

$$|EX_{\theta_j}-EX_\theta|<3\varepsilon$$

这便证明了,$EX_\theta=V$,这表明 θ 是最优的随机化策略,由定理6.37可见存在着最优的停点。

关于条件(6.88)式的成立,有

定理6.40 设$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\mathscr{R}_+^2\}$是右连续的类$(D)$过程,如果$\forall\ \varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{P(|X_T - X_{T[n]}| > \varepsilon) : T \in \mathscr{D}\} = 0 \qquad (6.89)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{|EX_T - EX_{T[n]}| : T \in \mathscr{D}\} = 0$$

证明 由于过程类(D)

$$\sup\{E|X_T| : T \in \mathscr{D}\} < \infty$$

且$\forall\ \varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使当$P(A) < \delta$时,有

$$\sup_{T\in\mathscr{D}} \int_A |X_T| \mathrm{d}P < \varepsilon/4$$

由条件(6.89)式,对$\delta > 0$,$\exists\ N \in \mathscr{N}_+$,使当$n > N$时

$$\sup\{P(|X_T - X_{T[n]}|) > \varepsilon/2 : T \in \mathscr{D}\} < \delta$$

于是当$n > N$时,有

$$\sup\{|EX_T - EX_{T[n]}| : T \in \mathscr{D}\}$$

$$\leqslant \sup \int_{\{|X_T - X_{T[n]}| > \varepsilon/2\}} |X_T - X_{T[n]}| \mathrm{d}p + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

所以(6.88)式获证。

第七章　各种应用模型

前几章我们已经讨论了几种应用模型，如第一章中的秘书问题，即最优选择问题；第二章中的窃贼问题、Bayes 序贯估计问题。这里再讨论几种应用模型，它们的共同特点是：都牵涉到某种随机试验，而且每一步都有一个报酬函数作为衡量收益大小的标准，所要回答的问题都是一个：何时停止最为有利。

§7.1　统计中的序贯方法与序贯 Bayes 估计

从某种意义讲，最优停止理论是受统计应用的激励而发展起来的，最优停止理论某些最初的结果是在本世纪40年代后期，由统计学家 Wald，Wolfowitz[60,61]和 Arrow，Blackwell，Girshick 在研究序贯统计决策时得到的，本节主要介绍最优停止理论在序贯方法中的应用。

早期的统计方法是固定样本的，也就是假定样本容量是固定的。此时我们要根据来自母体 X 的样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来进行统计推断，虽然样本是独立且与母体同分布，但样本究竟不是母体本身，所以这种推断必须含有误差，因此招致损失。我们抽象地用某个$R(\delta, n)$来表示这种损失，初看起来，似乎 n 愈大，会使 $R(\delta, n)$愈小，其实这并不一定。另一方面，样本容量的增大意味着统计费用的增加，对于那些费用昂贵的统计试验，这成为突出的问题，这就

导致序贯统计方法的出现。

考虑到统计费用 $c(n)$，序贯方法的一般方式是这样的：首先结合损失函数及统计费用考虑要不要做试验，如果不做试验为好，那么就直接给出某种判决，否则就做一次试验并做出相应的判决，如果这种判决已经达到某种预想的目标，则试验就停止，否则继续做一次试验并给出相应的判决，如此进行下去，这样每一步骤都面临着是否停止试验或继续试验的问题，这正好与最优停止的模型相吻合。

即使不考虑到统计费用，序贯方法也有其优越性，下面的例子说明了这一点。

设 $X\sim N(a,\sigma^2)$，a,σ^2均为未知参数，我们要求一个 a 的无偏估计 $g(X_1\cdots X_n)$，使其均方误差 $E(|g(X_1,\cdots,X_n)-a|^2)<\varepsilon$（$\varepsilon$ 预先给定）。如果考虑固定样本，比如容量为 n，那么我们可得到一个样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，由 Cramer—Rao 不等式

$$E|g(X_1,\cdots,X_n)-a|^2\geqslant\frac{1}{n}\sigma^2$$

由于$\frac{1}{n}\sigma^2$不可能对一切 σ^2均小于预先给定的 ε，所以不论样本容量 n 取多大，都不可能达到这个目标。

现在考虑序贯抽样：第一批观察 m 次，得到 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，算出 $S^2=\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，令 $c>0$，记

$$d(X_1,X_2,\cdots,X_m)=[cS^2]+1$$

然后再抽样 $d=d(X_1,\cdots,X_m)$次，得到 $X_{m+1},\cdots,X_{m+d}$，记 $\overline{X}=\frac{1}{m+d}\sum\limits_{i=1}^{m+d}X_i$ 则可证明 $E\overline{X}=a$，且可选择 m 和 c，使 $E(|\overline{X}-a|^2)\leqslant\varepsilon$，对任何的 a，σ^2都成立。事实上

$$\begin{aligned}&E(\overline{X}|X_1,\cdots,X_m)\\&=\frac{1}{m+d}(\sum_{i=1}^{m}X_i+da)\end{aligned}$$

$$=a+(\sum_{i=1}^{m}X_i-ma)/(m+d)$$

注意到 $d=d(X_1,\cdots,X_m)$ 与 $\sum_{i=1}^{m}X_i$ 独立，故

$$\begin{aligned}E\overline{X}&=E(E(\overline{X}\mid X_1,\cdots X_m))\\&=a+E\{(\sum_{i=1}^{m}X_i-ma))/[(m+d(X_1,\cdots,X_m)]\}\\&=a+E(\sum_{i=1}^{m}X_i-ma))E(\frac{1}{m+d})\\&=a\end{aligned}$$

完全类似可算得

$$\begin{aligned}&E(\overline{X}^2\mid X_1,\cdots,X_m)\\&=\frac{1}{(m+d)^2}[(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+2\sum_{i=1}^{m}X_ida+d\sigma^2+(d^2-d)a^2]\end{aligned}$$

于是

$$E\overline{X}^2=E(E(\overline{X}^2\mid X_1,\cdots X_m))=E(\frac{\sigma^2}{m+d})+a^2-E(\frac{a^2}{m+d})$$

$$\begin{aligned}E(\overline{X}-a)^2&\leqslant E(\frac{\sigma^2}{m+d})\leqslant E(\frac{1}{d/\sigma^2})\\&\leqslant\frac{1}{c}E(\frac{1}{\chi^2_{m-1}})=\frac{1}{c(m-3)}\end{aligned}$$

所以可选 m 或 c 充分大，使估计的均方误差小于预见给定的 ε.

现在正式地描绘序贯方法的模型。

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，X 是 Ω 上的随机变量，在统计中常称之为母体，假设它的概率分布族为 $\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$，其中 θ 为参数，Θ 为参数空间。在固定样本时（比如样容量为 n），我们取样本空间为 $(R^n,\mathscr{B}^n,P_\theta^n)$，其中

$$P_\theta^n=P_\theta\times\cdots\times P_\theta$$

在样本个数不定时，我们取样本空间为 $(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,P_\theta^\infty)$，其中 P_θ^∞ 是无穷维乘积测度，$\forall\ B_n\in\mathscr{B}^n$ 及柱形集 $B=B_n\times R\times R\times\cdots$，$P_\theta^\infty(B)=P_\theta^n(B_n)$。一般地，记样本空间为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta)$，其中 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 为 $\mathscr{X}$ 上

的 σ 代数。

对于不同的统计问题，我们需要作出不同方式的统计“判决”，比如在点估计中，我们的判决就是取 $(-\infty,\infty)$ 中的一个数；在检验问题中，我们的判决就是接受（记为 d_0）或拒绝（记为 d_1）原假设。全体判决构成判决空间 $\mathscr{D}$，比如点估计中 $\mathscr{D}=\{(-\infty,\infty)\}$，而在检验问题中 $\mathscr{D}=\{d_0,d_1\}$。

当实行某种判决 δ 时，我们根据实际的问题可引入损失函数 $L(\theta,\delta)$ 来描述这种判决的优劣，比如在前面提到的估计正态母体的参数 a 的问题中，判决就是取 $d(X_1,\cdots,X_n)=\bar{X}$，而

$$L(\theta,d)=(\bar{X}-a)^2$$

定义 7.1　设参数空间为 Θ，而判决空间为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$（$\mathscr{B}_{\mathscr{D}}$ 为 $\mathscr{D}$ 上 Borel σ 代数），任一定义在 $\Theta\times\mathscr{D}$ 上的函数 $L(\theta,d)$ 如满足以下两个条件，都可称为是损失函数

i)　$0\leqslant L(\theta,d)<\infty,\forall\ \theta\in\Theta,d\in\mathscr{D}$

ii)　$\forall\ \theta\in\Theta,L(\theta,d)$ 是 $\mathscr{B}_{\mathscr{D}}$ 可测的；

判决是根据样本值而作出的，所以称为判决函数。

定义 7.2　设样本空间为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$，判决空间为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$，任何定义于 $\mathscr{X}$ 而取值于 $\mathscr{D}$ 的可测变换 $\delta(X)$ 都叫做是判决函数。

定义 7.3　设样本空间为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}},P_\theta)$，$\theta\in\Theta$，判决空间为 $(\mathscr{D},\mathscr{B}_{\mathscr{D}})$，损失函数为 $L(\theta,d)$，$\delta(x)$ 为一判决函数，则称下面的 $R(\theta,\delta)$ 为判决 δ 的风险函数

$$\begin{aligned}R(\theta,\delta)&=E_\theta L(\theta,\delta(X))\\&=\int_{\mathscr{X}}L(\theta,\delta(X))\mathrm{d}P_\theta(X),\quad\theta\in\Theta\end{aligned}\qquad(7.1)$$

在序贯分析中，我们要决定停时 t 和判决函数 δ. 取 $\mathscr{F}_n=\sigma(\omega:X_1,X_2,\cdots,X_n)$，停时 t 就是一个 $\Omega\to R$ 的可测函数，且 $\{\omega:t=n\}\in\mathscr{F}_n$，对任何的 n 成立。设样本空间为 $(R^\infty,\beta^\infty,P_\theta^\infty)$，$\theta\in\Theta$，则由 Doob 复合函数定理，停时 t 也可看成是 $R^\infty\to R$ 可测映射. 记 $A_0=R$ 或

Φ, $A_n=\{x\in R^\infty;t(x)=n\}$，则 $A_n=B_n\times R\times R\times\cdots$，其中 $B_n\in\mathscr{B}^n$，这样停时 t 就与序列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 一一对应，统计学家宁肯把这一串 (A_n) 称为停止法则。此时 $x\in A_n$，意味着 $t=n$，试验在第 n 步停止。考虑到试验的费用，我们用 $L(\theta,\delta,t)$ 表示损失函数，其中 $L(\theta,\delta,t)$ 为样本容量为 t 时，判决为 δ 的损失，而 $c(t)$ 表示统计费用，$c(0)=0$，$c(\cdot)$ 是单调增加函数，于是风险也由两部分组成

$$R(\theta,\delta,t)=R_1(\theta,\delta,t)+R_2(\theta,t) \tag{7.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&R_1(\theta,\delta,t)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}L(\theta,\delta(X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots),n)\mathrm{d}P_\theta^\infty(x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}L(\theta,\delta(X_1,X_2,\cdots,X_n),n)\mathrm{d}P_\theta^n(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

$$R_2(\theta,t)=E_\theta c(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)P_\theta^n(t=n)+c(\infty)P_\theta^\infty(t=\infty)$$

在统计决策中，我们首先要寻求使得 $R(\theta,\delta)$ 达到最小的最小风险解。一般地说，很难找到对 θ 一致的最优解，在统计中常常根据实际问题的需要而去寻求使得 $M(\delta)=\sup\limits_{\theta\in\Theta}R(\theta,\delta)$ 为最小的解，此即 Minmax 解。但 Bayes 学派另有做法，根据 Bayes 学派的观点，可假设 θ 在 Θ 中有先验分布 $\xi(\theta)$，对于取定的停止规则 t，称

$$R_\xi(\delta,t)=\int_\Theta R(\theta,\delta,t)d\xi(\theta) \tag{7.3}$$

为 δ 的 Bayes 风险，亦即 $R(\theta,\delta,t)$ 按测度 $\xi(\theta)$ 在 Θ 上的平均值。

满足 $R_\xi({}^*\delta,t)=\inf\limits_{\delta}R_\xi(\delta,t)$ 的判决函数 ${}^*\delta$ 称为问题的 Bayes 解。

设样本空间 $\mathscr{X}$ 及参数空间 Θ 都是欧氏空间，那么存在 $\xi(\cdot|x)$ 为给定 $X=x$ 时 θ 的正则条件分布，并称它为 θ 的后验分布，假定对 $\mathscr{X}$ 上测度 $P_\theta\ll\mu$，其中 μ 为 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 上 σ 有限测度，则存在拉东

一尼古丁导数 $P(x,\theta)=\mathrm{d}P_\theta(x)/\mathrm{d}\mu$，于是对任一 $F\in\mathscr{B}_\theta$（Θ 上的 σ 代数）

$$\xi(F|x)=\int_F P(x,\theta)\mathrm{d}\xi(\theta)\Big/\int_\Theta P(x,\theta)\mathrm{d}\xi(\theta) \qquad (7.4)$$

$\forall\ A\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$（$\mathscr{X}$ 上的 σ 代数），令

$$P(A)=\int_\Theta P_\theta(A)\mathrm{d}\xi(\theta)$$

并称之为 X 的"绝对分布"。此时 Bayes 风险

$$\begin{aligned}R_\xi(\delta,t)&=\int_\Theta R(\theta,\delta,t)\mathrm{d}\xi(\theta)\\&=\int_\Theta\int_{\mathscr{X}}L(\theta,\delta,t)\mathrm{d}P_\theta(x)\mathrm{d}\xi(\theta)\\&=\int_{\mathscr{X}}\int_\Theta L(\theta,\delta,t)\xi(\mathrm{d}\theta|x)\mathrm{d}P(x)\end{aligned} \qquad (7.5)$$

称 $R_\xi(\delta,x,t)\triangleq\int_\Theta L(\theta,\delta(x),t)\xi(d\theta|x)$ 为 δ 的后验风险。

所谓序贯 Bayes 决策就是寻求最优的停时规则 t^* 及最优判决 δ^*，使得

$$R_\xi(\delta^*,t^*)=\inf_\delta\inf_t R_\xi(\delta,t) \qquad (7.6)$$

对于序贯 Bayes 决策

$$R(\theta,\delta,t)=R_1(\theta,\delta,t)+R_2(\theta,\delta)$$

因此

$$R_\xi(\delta,t)=\int_\Theta\int_{\mathscr{X}}L(\theta,\delta,t)\mathrm{d}P_\theta(x)\mathrm{d}\xi(\theta)+\int_\Theta E_\theta c(t)\mathrm{d}\xi(\theta)$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_\Theta E_\theta c(t)\mathrm{d}\xi(\theta)\\=&\int_\Theta\sum_{n\leqslant\infty}c(n)P_\theta(x:t=n)\mathrm{d}\xi(\theta)\\=&\sum_{n\leqslant\infty}\int_{[x:t=n]}\xi(\mathrm{d}\theta|x)\mathrm{d}P(x)\\=&\sum_{n\leqslant\infty}c(n)P(x:t=n)=Ec(t)\end{aligned}$$

而

$$\int_{\Theta}\int_{\mathscr{X}} L(\theta,\delta,t)\mathrm{d}P_{\theta}(x)\mathrm{d}\xi(\theta) = \int_{\mathscr{X}} R_{\xi}(\delta,x,t)\mathrm{d}P(x) \quad (7.7)$$

由此可见，如果停止规则 t 固定，如果 δ^* 使得后验风险 $R_{\xi}(\delta,x,t)$ 达到最小 $(P(x)-a.s)$，则 δ^* 也使得 $R_{\xi}(\delta,t)$ 达到最小。

在实际问题中，我们往往要考虑试验最大次数被限定的序贯方法，也即假定 $t(x)\leqslant N$，N 为某一给定的正整数，此即为 § 1.1所讨论的有限情形，由定理1.2便知最优规则存在且由(1.8)式给出。在统计中，我们将它翻译成样本空间的表达方式。设观察到样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其后验风险为

$$W_n(x_1,\cdots,x_n)=C_n(x_1,\cdots,x_n)+r_n(x_1,\cdots,x_n)$$

第一项为观察费用，第二项为由判决不当带来的后验风险，令

$$\gamma_N(x_1,\cdots,x_N)=W_N(x_1,\cdots,x_N) \quad (7.8)$$

$$\gamma_N(x_1,\cdots,x_N)$$
$$=W_N(x_1,\cdots,x_N)\wedge E(\gamma_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1})) \quad (7.9)$$

其中，期望要对在 $(X_1,\cdots,X_{n+1})$ 绝对分布下，X_{n+1} 在 $X_1,\cdots,X_n$ 给定为 $x_1,\cdots,x_n$ 下的条件分布而取。

$$W_0=\inf_{d\in\mathscr{D}}\int_{\Theta} L(\theta,d)\mathrm{d}\xi(\theta)$$
$$\gamma_0=W_0\wedge E(\gamma_1(X_1))$$

于是

$$t(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\inf\{n\leqslant N\,|\,\gamma_n(x_1,\cdots,x_n)=W_n(x_1,\cdots,x_n)\} \quad (7.10)$$

便是最优的停止规则。

定理7.1 若当 $N\to\infty$，费用函数 $C_N(x_1,\cdots,x_N)$ 一致地趋于 ∞，但对固定的 N，$C_N(x_1,\cdots,x_N)$ 有界，而 $r_N(x_1,\cdots,x_N)$ 一致地趋于0，则最优停止规则是一致有界的，即存在 N，使 $t\leqslant N$，如果 $C_N(x_1,\cdots,x_N)=CN$，而 $r_N(x_1,\cdots,x_N)$ 只与 N 有关，则序贯判决 Bayes 是固定样本的。

证明 由假定存在 N_0，致 $r_{N_0}(x_1,\cdots,x_{N_0})\leqslant 1$，这时若只作 N_0

次试验，则后验风险不超过 sup $C_{N_0}(x_1,\cdots,x_{N_0})+1\triangleq M$，再由假定存在 $N_1>N_0$，使当 $N>N_1$时，inf $C_N(x_1,\cdots,x_{N1})>M$，可见 Bayes 判决的停止规则 $t\leqslant N_1-1$。

如果 $C_N(x_1,\cdots,x_N)=cN, r_N(x_1,\cdots,x_N)=a_N$ 则作 N 次试验的后验风险为 $cN+a_N$ 与试验的结果无关。设 $cN_0+a_{N_0}=\inf_N[cN+aN]$，显然作 N_0次试验是最优的，因而序贯 Bayes 判决退化为固定样本的情形。

例7.1 设 $X_1,X_2,\cdots$为 iid，X_1的分布为

$$P_\theta(X=1)=\theta$$

$$P_\theta(X=0)=1-\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

θ 的先验分布为[0,1]上均匀分布，费用函数 $C_N(x_1,\cdots,x_N)=cN$，损失函数为 $L(\theta,d)=(\theta-d)^2$，求最优序贯 Bayes 估计。

若做 j 次试验，记 $T_j=X_1+\cdots+X_j$，若试验在第 j 次停止（亦只做到第 j 次），我们可求得 θ 的 Bayes 估计为$(T_j+1)/j+2$。事实上

$$\xi(\mathrm{d}\theta|T_j=m)=(j+1)c_j^m\theta^m(1-\theta)^{j-m}\mathrm{d}\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

在损失函数 $L(\theta,d)=(\theta-d)^2$，使得它最小的 Bayes 估计为 $E(\theta|T_j=x)=\frac{x+1}{j+2}$.

此时估计的风险为（因为 $T_j\sim B(j,\theta)$）

$$\int_0^1 E_\theta\left(\frac{T_j+1}{j+2}-\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(j+2)^2}[j\theta(1-\theta)+(2\theta-1)^2]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{6(j+2)}$$

由于判决不当带来的后验风险即为

$$y_j(x_1,\cdots,x_j)=r_j(T_j)$$

$$=\int_\theta\left(\theta-\frac{T_j+1}{j+2}\right)^2\xi(\mathrm{d}\theta|T_j)$$

$$=(T_j+1)(j-T_j+1)/[(j+2)^2(j+3)]$$
$$\leqslant\frac{(j+1)^2}{(j+2)^2(j+3)}$$

当 $j\to\infty$ 时，$r_j(T_j)\to 0$ 而 $C_j(x_1,\cdots,x_j)=cj$，由定理7.1可知序贯 Bayes 估计中最优规则 t 是一致有界的，此时存在 N，使 $t\leqslant N$，这种序贯估计称为是截断型的。

在上述例子中，若损失函数为

$$L(\theta,d)=(\theta-d)^2/[\theta(1-\theta)],\quad 0<\theta<1$$

即可证明后验风险为 $jc+\frac{1}{j}$，因此由定理7.1可知序贯 Bayes 判决是固定样本的。

§7.2 序贯假设检验

设母体 X 的样本空间为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$，分布族为 $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$。按照统计决策的观点，对于假设检验：$H_0:\theta\in\Theta_0$，$H_1:\theta=\Theta_1$，其中 $\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$，我们要寻找一个判决函数 δ，它取值于 $\mathscr{D}=\{d_o,d_1\}$，其中 d_o 表示接受原假设 H_o，d_1 表示拒绝原假设 H_1，这就相应于将样本空间 $\mathscr{X}$ 划分两个可测的不交的区域 W 与 W^c，其中 W 称为拒绝区域，令

$$\varphi(x)=I_W(x)$$

它与拒绝域 W 是一一对应的，我们称 $\varphi(x)$ 为一检验函数，简称检验。

设 φ 为某假设检验问题的一个检验，则称

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta(\varphi(X))$$

为 φ 的功效函数。当 $\varphi\in\Theta_0$ 时，$\beta_\varphi(\theta)$ 称为犯第一类错误的概率，当 $\theta\in\Theta$ 时，$1-\beta_\varphi(\theta)$ 称为犯第二类错误的概率。

设对某个 α，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$\varphi$ 的功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$ 满足：$\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta_\varphi(\theta)\leqslant\alpha$，

则称 α 为检验中的水平，而称 φ 为一个水平 α 的检验。

设 φ 为某一水平为 α 的检验，若对同一问题的任何水平 α 的检验 $\tilde{\varphi}$ 都有

$$\beta_{\varphi}(\theta) \geqslant \beta_{\tilde{\varphi}}(\theta), \quad \theta \in \Theta$$

则称 φ 为该问题的一个水平为 α 的一致最优检验，简称为 UMP 检验。

我们自然希望在 $\theta \in \Theta_0$ 时，$\beta_{\varphi}(\theta)$ 愈小愈好，而在 $\theta \in \Theta_1$ 时，$\beta_{\varphi}(\theta)$ 愈大愈好，但当样本固定时，二者是矛盾的。因此假设检验问题常常是要求在水平为 α 的范围内寻求 $\beta_{\varphi}(\theta)$ 在 $\theta \in \Theta_1$ 中尽可能地大，因此一致最优检验是我们寻求的理想检验法。但是，UMP 检验的存在是少有的例外，众所周知的 Neymann－pearson 引理证明了，当 Θ_0，Θ_1，都只包含一个元素时，存在着 U. M. P 检验，并且以概率比的形式给出了 $\varphi(x)$ 的具体形式，进一步的结果是对单调似然比分布族给出的。

设 X 的分布族为 $\{f(x,\theta)d\mu(x), \theta \in \Theta\}$，$\Theta$ 为 $R_1=(-\infty,\infty)$ 上的一个子集，如果存在统计量 $T(x)$，使对任何 $\theta_1 < \theta_2$ $(\theta_1, \theta_2 \in \Theta)$，$f(x,\theta_2)/f(x,\theta_1)$ 作为 x 的函数只依赖于 $T(x)$，且是 $T(x)$ 的非降函数，又不同的 $\theta \in \Theta$，对应 X 着的不同分布，则称 $\{f(x,\theta)d\mu(x)\}$ 为单调似然比分布族，简记为 MLR 族。

我们经常使用的许多分布都是 MLR 族

超几何概率分布族

$$P(x,m) = C_m^x C_{N-m}^{n-x} / C_N^n$$

其中 m 为仅取正整数的参数，则 $P(x,m)$ 是关于 $T(x)=x$ 的 MLR 族。

指数分布族：

$$f(x,\theta) = c(\theta)\exp(Q(\theta)T(x)), \quad \theta \in \Theta$$

其中 $Q(\theta)$ 严格单调，则它关于 $T(x)$ 或 $(-T(x))$ 是 MLR 族，正态分布，二项分布均属于此。

引理7.2 设$\{f(x,\theta)d\mu(x),\theta\in\Theta\}$为一个 MLR 族，且非空，则对假设检验问题

$$H_0:\theta\leqslant\theta_0,\quad H_1:\theta>\theta_0 \tag{7.9}$$

及任给的 α，$0<\alpha<1$

i）存在形如

$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & T(x)>c\\ r, & T(x)=c\\ 0, & T(x)<c\end{cases} \tag{7.10}$$

的检验（r，c 为常数，$0\leqslant r\leqslant 1$）满足条件

$$E_{\theta_0}\varphi(X)=\alpha \tag{7.11}$$

且是水平为 α 的 UMP 检验；

ii）φ 的功效函数 $\beta(\theta)$在 Θ 上非降，且在$\{\theta:\theta\in\Theta,0<\beta(\theta)<1\}$上严格上升；

iii）对任何 $\theta<\theta_0$，ii）中的 $\beta(\theta)$在一切满足（7.11）条件检验中达到最小值。

这个定理的证明可参考[63]的定理3.2.2。

前面只是对假设检验基本问题的叙述，现在正式考虑序贯检验问题。

设 $X_1,X_2,\cdots,X_t,\cdots$为样本序列，密度函数为 $f(x,\theta)d\mu(x)$，$\theta=0$或1，要求检验

$$H_0:\theta=0,\quad H_1:\theta=1$$

记 $f(x,0)=f_0(x)$，$f(x,1)=f_1(x)$，如果 H_1为真但接受 H_0的损失为 $a(a>0)$，而如果 H_0为真而拒绝 H_0所造成的损失为 $b(b>0)$，并设每次的观察费用是 c，序贯检验就是要找一个停止规则 t 及最终判决函数 δ. 记

$$\alpha=E_0(\varphi(x))$$

$$\beta=E_1(1-\varphi(x))$$

其中 $\varphi(x)$为检验函数，E_0，E_1分别表示对 f_0，f_1所取的期望，因此给

出一个序贯判决(δ,t)的损失是

$$\begin{cases} a\alpha+cE_0t, & H_0\text{为真} \\ b\beta+cE_1t, & H_1\text{为真} \end{cases}$$

若我们已知 H_0为真的先验概率为 π,则序贯 Bayes 判决的风险

$$r(\pi,\delta)=\pi(a\alpha+cE_0t)+(1-\pi)(b\beta+cE_1t) \tag{7.12}$$

当样本容量固定为 $t\geqslant 1$时,容易确定一个 δ 使 $\gamma(\pi,\delta)$达到最小,由(7.12)式,$\gamma(\pi,\delta)$依赖于 δ 的部分是

$$\begin{aligned}
&\pi a\alpha+(1-\pi)b\beta \\
&=\pi a\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\{x;t=n,\varphi(x)=0\}}f_0(x_1)\cdots f_0(x_n)\mathrm{d}\mu(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu(x_n) \\
&\quad+(1-\pi)b\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{x;t=n,\varphi(x)=1\}}f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)\mathrm{d}\mu(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu(x_n) \\
&\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[x;t=n]}\min(\pi af_{0n},(1-\pi)bf_{1n})\mathrm{d}\mu(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu(x_n) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[x;t=n]}\min(a\pi_n,b(1-\pi_n))(\pi f_{0n}+(1-\pi)f_{1n})\mathrm{d}\mu(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu(x_n)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

其中

$$f_{in}=f_i(x_1)f_i(x_2)\cdots f_i(x_n) \quad i=0,1 \tag{7.14}$$

$$\pi_n=\frac{\pi f_{0n}}{\pi f_{0n}+(1-\pi)f_{1n}} \tag{7.15}$$

于是,当样本容量固定时,令

$$\varphi_{\delta'}(x)=\begin{cases}1, & t=n\text{ 且 }\pi_n a\leqslant(1-\pi_n)b \\ 0, & t=n\text{ 且 }\pi_n a>(1-\pi_n)b\end{cases} \tag{7.16}$$

则由(7.13)可知

$$r(\pi,\delta)\geqslant r(\pi,\delta') \tag{7.17}$$

现在再来考虑停止规则 t 的选取,也就是要选择 t,使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[t=n]}\min(a\pi_n,b(1-\pi_n))(\pi f_{0n}+(1-\pi)f_{1n})\mathrm{d}\mu(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu(x_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} cn[\pi P_0(t=n)+(1-\pi)P_1(t=n)] \tag{7.18}$$

达到最小值。令

$$\left.\begin{aligned}
&f_n^* = \pi f_{0n} + (1-\pi) f_{1n} \\
&h(\lambda) = \min(a\lambda, b(1-\lambda)), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \\
&\pi_0 = \pi \\
&\pi_n = \pi f_{0n} / [\pi f_{0n} + (1-\pi) f_{1n}], \quad n=1,2 \\
&Y_n = -h(\pi_n) - nc, \quad n=0,1,2,\cdots \\
&\mathscr{F}_0 = (\Omega, \Phi) \\
&\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)
\end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

其中 f_n^* 看成是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布密度，而

$$EY_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{w:t=n\}} Y_n \mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[x,t=n]} (-h(\pi_n) - nc) \cdot f_n^*(x_1 \cdots x_n) \mathrm{d}\mu(x_1) \cdots \mathrm{d}\mu(x_n) \tag{7.20}$$

这样极小化(7.18)式，就是求停时 t，使 EY_t 最大，这化成了典型的最优停止问题。

若 $a \leqslant 1$ 或 $b \leqslant 1$，则 $h(x) < 1$。于是对一切 $n > 0$，$Y_0 = -h(\pi) > -1 > Y_n$，显然 $t=0$ 为最优停时，不失一般性，不妨设 $a > 1$ 且 $b > 1$。

从(7.19)式看出，Y_n 只是通过 π_n 而依赖于 $Y_1, \cdots, Y_n$. 容易证明$\{\pi_n\}$构成一个马尔可夫序列。事实上

$$\pi_n = \frac{\pi_{n-1} f_0(X_n)}{\pi_{n-1} f_0(X_n) + (1-\pi_{n-1}) f_1(X_n)}, \quad n=1,2,\cdots$$

$$E(\pi_n | X_1, \cdots, X_{n-1})$$

$$= E\left(\frac{\pi_{n-1} f_0(X_n)}{\pi_{n-1} f_0(X_n) + (1-\pi_{n-1}) f_1(X_n)} \middle| X_1, \cdots, X_{n-1}\right)$$

当 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$给定时，$\pi_{n-1}$就随之确定，而且 $f_0(X_n) f_1(X_n)$ 与 $\sigma(X_1, \cdots, X_{n-1})$相独立，所以$\{\pi_n\}$是一个马氏序列。而且，当 P

$(\pi_{n-1}=z)\neq 0$时，对任何数 c

$$
\begin{aligned}
&P(\pi_n<d\mid\pi_{n-1}=z)\\
&=P\left(\frac{zf_0(X_n)}{zf_0(X_n)+(1-z)f_1(X_n)}<d,\pi_{n-1}=z\right)/P(\pi_{n-1}=z)\\
&=P\left(f_0(X_n)/f_1(X_n)<\frac{d}{d-1}\cdot\frac{1-z}{z}\right)\\
&=P\left(f_0(X_1)/f_1(X_1)<\frac{d}{d-1}\cdot\frac{1-z}{z}\right)
\end{aligned}
$$

与 n 无关，所以$\{\pi_n\}$是齐次马氏链，而

$$Y_n=-h(\pi_n)-nc$$

由定理3.25或定理3.42，可见存在最优规则

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0;h(\pi_n)\leqslant\widetilde{V}(\pi_n)\} \tag{7.21}$$

其中 $\widetilde{V}(\pi)=\inf\limits_{\delta,t>0}\{\pi(a\alpha+cE_0t)+(1-\pi)(b\beta+cE_1t)\}$，$t$ 是取自一切使得 $E_it<\infty$的停时，δ 取自一切判决函数，记

$$V(\pi)=\inf_{\delta,t>0}\{\pi(a\alpha+cE_0t)+(1-\pi)(b\beta+cE_1t)\} \tag{7.22}$$

其中 inf 是对一切 δ 满足 $E_it<\infty$ 且 $t>0$的停时取。注意到$[t>0]\in\mathscr{F}_0=\{\Omega,\Phi\}$. 由(7.21)式

$$
\begin{aligned}
&\tau_0>0\Leftrightarrow h(\pi)>\widetilde{V}(\pi)\\
&\Leftrightarrow h(\pi)>V(\pi)\wedge\inf_{\delta}\{\pi a\alpha+(1-\pi)b\beta\}\\
&\Leftrightarrow h(\pi)>V(\pi)\wedge h(\pi)\Leftrightarrow h(\pi)>V(\pi)
\end{aligned}
$$

所以，当 $h(\pi)\leqslant V(\pi)$时，$\tau_0=0$

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0;h(\pi_n)\leqslant V(\pi_n)\} \tag{7.23}$$

容易看出 $V(\pi)$是凸函数，若记

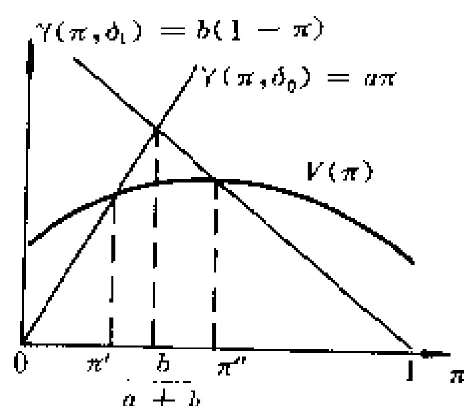
$$A=\{\pi;h(\pi)\leqslant V(\pi)\}$$

则

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0;\pi_n\in A\} \tag{7.24}$$

如图，δ_0表示不观察直接拒绝 H_0的决策，$\gamma(\pi,\delta_0)$表示它的风

险；δ_1表示不观察直接接受 H_0的决策，$\gamma(\pi,\delta_1)$表示相应的风险。(7.22)式中 $V(\pi)$表示至少做一次观察的风险。因此当 $V(\frac{b}{a+b})<\frac{ab}{a+b}$时存在 π',π'' 使得



$$A=\{\pi;\pi\leqslant\pi' \text{ 或 } \pi\geqslant\pi''\} \tag{7.25}$$

从而

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0: \pi_n\leqslant\pi' \text{ 或 } \pi_n\geqslant\pi''\} \tag{7.26}$$

下面的定理将指出最优的序贯 Bayes 检验就是 Wald 的序贯概率比检验。

定理7.3　设 π',π''满足

$$r(\pi',\delta_0)=V(\pi'),\quad r(\pi'',\delta_1)=V(\pi'') \tag{7.27}$$

如$0<\pi'<\pi''<1$，则对一切 $\pi'\leqslant\pi\leqslant\pi''$，使得

$$r(\pi,\delta)=\pi(\alpha a+cE_0t)+(1-\pi)(\beta b+cE_1t) \tag{7.28}$$

达到最小的序贯 Bayes 检验就是以边界分别为

$$A_0=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi'')}{\pi''},\quad A_1=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi')}{\pi'} \tag{7.29}$$

的序贯概率比检验。

证明　由最优停止的理论及(7.23)式，可见当 $\pi\leqslant\pi'$或者 $\pi\geqslant\pi''$时，应该不做试验，此时相应地取决策函数为 δ_0或者 δ_1是最优的；如果 $\pi'<\pi<\pi''$，则应观察一次，……如果已观察 n 次，得到 π_n.

注意到 $r(\pi_n,\delta_0)$是停止在 n 处，并拒绝 H_0的后验风险，$r(\pi_n,\delta_1)$是停止在 n 而接受 H_0的后验风险。由定理3.25的注12，$V(\pi_n)=r_n(\pi)$，它表示继续观察的后验风险。因此

当 $\pi_n\leqslant\pi'$时，采取决策 δ_0，即拒绝 H_0；

当 $\pi_n\geqslant\pi''$时，采取决策 δ_1，即拒绝 H_1；

当 $\pi'_n<\pi_n<\pi''$时，继续观察……

由于 τ_0是最优规则，所以试验总会在有限步截止，因为 $\pi_n=\dfrac{\pi P_{0n}}{\pi P_{0n}+(1-\pi)P_{1n}}$，所以

$$\pi'<\pi_n<\pi'' \Leftrightarrow A_0<\frac{P_{1n}}{P_{0n}}\triangleq\lambda_n<A_1$$

这就证明了最优的 Bayes 检验就是 Wald 的序贯概率比检验。证毕。

在定理7.3中，π'，π''由(7.27)式所确定，它是 a,b,c 的函数，下面的定理 A 中，π'_0，π''_0是任意两个介于0，1之间的正数，我们要证明对先验概率 π 满足 $\pi'_0<\pi<\pi''_0$的某个问题的 Bayes 解也是一个序贯概率比检验。

定理7.4　设给定$0<\pi'_0<\pi''_0<1$，则存在正数$0<w<1$及 $c>0$，使得取 $a=1-w,b=w$，费用单位为 c，H_0为真先验概率为 $\pi(\pi'_0<\pi<\pi''_0)$的序贯 Bayes 检验就是边界分别为

$$A_0=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi''_0)}{\pi''_0},\quad A_1=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi'_0)}{\pi'_0}$$

的序贯概率比检验。

证明　由定理7.3，π'，π''是 a,b,c 的函数，因而它们都是 w,c 的函数。我们只要找一个 w,c 使得：$\pi'(w,c)=\pi'_0$，$\pi''(w,c)=\pi''_0$。对固定的 w，记 $\pi'(c)=\pi'(w,c)$，$\pi''(c)=\pi''(w,c)$，$V(\pi)$也是 c 的函数，记为 $V(\pi,c)$。令

$$C_0=\inf\{c>0;\pi'(c)=\pi''(c)\}\tag{7.30}$$

所要找的 $\pi'(w,c)$，$\pi''(w,c)$应满足

$$(1-w)\pi'(c)=V(\pi',c)\tag{7.31}$$

$$(1-\pi''(c))w=V(\pi'',c)\tag{7.32}$$

$V(\pi',c)$，$V(\pi'',c)$作为 c 的函数是连续的，严格单调增的，且因为当样本容量充分大时，可使犯两类错误的概率充分地小，因此当 c 趋于0时，$V(\pi',c)$，$V(\pi'',c)$都趋于0，从而当 $c\to0$时，$\pi'(c)\to0$，$\pi''(c)$

$\to 1$. 由(7.31)(7.32)，$\pi'(c)$，$\pi''(c)$也是连续的，且$\pi'(c)$严格递增，$\pi''(c)$严格递降，$\pi'(c_0)=\pi''(c_0)$满足方程

$$(1-w)x=(1-x)w$$

令

$$\lambda(c)=\frac{\pi'(c)}{(1-\pi'(c))}\cdot\frac{(1-\pi''(c))}{\pi''(c)} \tag{7.33}$$

它是连续的，单调增加的函数，且

$$\lim_{c\to c_0}\lambda(c)=1$$

$$\lim_{c\to 0}\lambda(c)=0$$

这里 $\lambda(c)$其实是 $\lambda(w,c)$，再令

$$r(w,c)=\frac{\pi''(w,c)}{1-\pi''(w,c)} \tag{7.34}$$

它对固定的 w 关于 c 单调下降，要找 w,c，使得 $\pi'(w,c)=\pi'_0$，$\pi''(w,c)=\pi''_0$等价于找 w,c 使

$$\lambda(w,c)=\lambda_0\triangleq\frac{\pi'_0}{(1-\pi'_0)}\ \frac{(1-\pi''_0)}{\pi''_0}$$

$$r(w,c)=r_0\triangleq\frac{\pi''_0}{(1-\pi''_0)}$$

由 λ 的连续且单调增加性，对任意 w，存在 $c=c(w)$，使得

$$\lambda(w,c(w))=\lambda_0 \tag{7.35}$$

于是只要证明 $\gamma(w)\equiv\gamma(w,c(w))$是$(0,1)\to(0,\infty)$的一一映射，便可知存在唯一的 w，使

$$r(w,c(w))=\lambda_0 \tag{7.36}$$

定理便可告证。现在证明 $r(w)$是$(0,1)\to(0,\infty)$的一一映射：

固定 w，对 $\pi=\pi'(w,c(w))$，由定理7.3，存在 Bayes 决策 δ'，它就是边界为

$$A'_0=\frac{\pi'(w,c(w))}{(1-\pi'(w,c(w)))}\cdot\frac{(1-\pi''(w,c(w)))}{\pi''(w,c(w))}=\lambda(w,c(w))=\lambda_0$$

$$A'_1=1$$

的序贯概率比检验；当取 $\pi=\pi''(w,c(w))$时，存在 Bayes 决策 δ''，它

就是边界为

$$A''_0=1$$

$$A'_1=\frac{1}{\lambda_0}$$

的序贯概率比检验。记相应的犯两类错误概率以及平均观察次数为

$$\alpha',\beta',E'_0(t),E'_1(t)$$

$$\alpha'',\beta'',E''_0(t),E''_1(t)$$

它们只是通过 λ_0，而不是通过 r 而依赖于 w,c. 当 λ_0固定时，它们都是固定的数。对于 $\pi=\pi'(w,c(w))$ 以及 $\pi=\pi''(w,c(w))$的最小 Bayes 风险

$$V(\pi')=r(\pi',\delta')$$

$$V(\pi'')=r(\pi'',\delta'')$$

而 $V(\pi')=r(\pi',\delta_0)$, $V(\pi'')=r(\pi'',\delta_1)$. 因此

$$r(\pi',\delta_0)=r(\pi',\delta'),r(\pi'',\delta_1)=r(\pi'',\delta'')$$

从而

$$\pi'(1-w)=\pi'[\alpha'(1-w)+cE'_0(t)]+(1-\pi')[\beta'w+cE'_1(t)]$$

$$(1-\pi'')w=\pi''[\alpha''(1-w)+cE''_0(t)]+(1-\pi'')[\beta''w+cE''_1(t)]$$

用 $\lambda_0 r$ 代替 $\pi'/(1-\pi')$，r 代 $\pi''/(1-\pi'')$，在上两式中消去常数 c，得到

$$\begin{aligned}&\lambda_0 r(1-\alpha')-w[\lambda_0 r(1-\alpha')+\beta'][rE''_0(t)+E''_1(t)]\\&=-r\alpha''+w[(1-\beta'')+r\alpha''][\lambda_0 rE'_0(t)+E'_1(t)]\end{aligned}\tag{7.37}$$

由(7.37)，易知 $r>0$，则$0<w<1$；反之，(7.37)决定了 r 的二次式，容易看出 $w=0$,，则 $r=0$，且当 $w>0$，$r\neq0$时，二次式是开口向上的抛物线。所以 $r(w)=r(w,c(w))$是$(0,1)\to(0,\infty)$上的一一映射，定理获证。

下面的定理证明了序贯概率比检验的最优性。

定理7.5　关于简单假设检验 $H_0:\theta=\theta_0$，$H_1:\theta=\theta_1$问题，对所

有使得

$$P_{\theta_0}(\text{拒绝 } H_0)\leqslant\alpha$$
$$P_{\theta_1}(\text{接受 } H_1)\leqslant\beta$$
$$E_{\theta_i}t<\infty,\quad i=1,2$$

的检验法中(包括序贯和非序贯的),强度为(α,β)的序贯概率比检验使得$E_{\theta_0}(t)$,$E_{\theta_1}(t)$两者都达到最小。

这里序贯概率比检验的强度(α,β)就是指该检验犯第一类和第二类错误的概率。

证明 考虑以边界$A_0<1<A_1$的序贯概率比检验,设$0<\pi<1$,令

$$\pi'=\frac{\pi}{A_1(1-\pi)+\pi}$$
$$\pi''=\frac{\pi}{A_0(1-\pi)+\pi}$$

从而

$$A_0=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi'')}{\pi''}$$
$$A_1=\frac{\pi}{(1-\pi)}\cdot\frac{(1-\pi')}{\pi'},\quad 0<\pi'<\pi<\pi''<1$$

由定理7.4,存在$0<w<1$及常数$c>0$,使的得这个序贯概率比检验就是关于$a=1-w$,$b=w$,费用为c,H_0成立先验概率为π的Bayes检验,其对应的犯错误概率及样本平均为$\alpha,\beta,E_0(t),E_1(t)$,考虑另一个检验$\delta^*$,相对的犯错误概率及样本平均记为$\alpha^*,\beta^*$,$E_0^*(t)$,$E_1^*(t)$,因为$\delta$是极小化Bayes风险的,所以

$$\begin{aligned}&\pi[(1-w)\alpha+cE_0(t)]+(1-\pi)[\beta w+cE_1(t)]\\&\leqslant\pi[(1-w)\alpha^*+cE_0^*(t)]+(1-\pi)[\beta^* w+cE_1^*(t)]\end{aligned}$$

由于$\alpha^*\leqslant\alpha$,$\beta^*\leqslant\alpha$.故

$$\pi E_0(t)+(1-\pi)E_1(t)\leqslant\pi E_0^*(t)+(1-\pi)E_1^*(t)$$

它对一切$0<\pi<1$成立,从而

$$E_0(t)\leqslant E_0^*(t),\ E_1(t)\leqslant E_1^*(t)。$$

§7.3 Poisson 过程的最优派送问题

Poisson 过程的最优派送问题为 Ross[65]，何声武[66]所研究，它的模型如下：

设在时间区间$[0,T]$内乘客按 Poisson 过程来到某长途汽车站候车，亦即$[0,t]$内来到车站的乘客个数 X_t 是参数为 λ 的 poisson 过程。假定长途汽车共开两班，第一班车的开车时间记为 τ：$0<\tau<T$，第二班车开车时间为 T。在$[0,\tau)$内来到的乘客全部乘第一班车离去，而在$[\tau,T]$内来到的乘客则全部乘第二班车，要问如何选取第一班车的开车时间 τ，使得全部乘客的候车时间总和的平均值(记为 MGWT)达到最小。

如果限定 τ 为时间常数，因为在无穷小的时间间隔 ds 时间内来到一名乘客的概率近似等于 λds，他所等待的时间为 $\tau-s$(如果他在 τ 前到达)或 $T-s$(如果他在 τ 后到达)，因此

$$\begin{aligned}\text{MGWT} &= \int_0^\tau \lambda(\tau-s)ds+\int_\tau^T \lambda(T-s)ds \\ &= \frac{\lambda}{2}[\tau^2+(T-\tau)^2] \qquad (7.38)\end{aligned}$$

由此得最优解为 $\tau=\frac{T}{2}$.

但更为合理地，第一班车的开车时间 τ 应该是 poisson 过程 $\{X_t: 0\leqslant t\leqslant T\}$的停时，亦即假定$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t\triangleq\sigma(X_s,s\leqslant t)$. 设$\{T_n, n\geqslant 1\}$为乘客各自来到的时刻，即 poisson 过程 X_t 的跳点，于是

$$X_t=\sum_{n=1}^{\infty} I_{[T_n\leqslant t]},$$

$$\begin{aligned}\text{MGWT} &= E\Big(\sum_{T_n\leqslant\tau}(\tau-T_n)+\sum_{\tau<T_n\leqslant T}(T-T_n)\Big) \\ &= E\Big[\int_0^\tau(\tau-t)dX_t+\int_\tau^T(T-t)dX_t\Big]\end{aligned}$$

$$=E\left[\tau X_\tau+T(X_T-X_\tau)-\int_0^T t\mathrm{d}X_t\right] \quad (7.39)$$

引理7.6　poisson 过程$\{X_t: 0\leqslant t\leqslant T\}$的可料对偶接影为 λt，从而

$$E\int_0^T t\mathrm{d}X_t=\int_0^T \lambda t\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{2}T^2$$

证明　由[3]之6.34系，为证 λt 为 X_t 的可料对偶投影，只须证$\{X_t-\lambda t, \mathscr{F}_t: 0\leqslant t\leqslant T\}$为一致可积鞅，由 $E(X_t-X_s|\mathscr{F}_s)=E(X_t-X_s)=\lambda(t-s)$以及 $X_t-\lambda t=E(X_T-\lambda T|\mathscr{F}_t)$，这是明显的。再由[3]之定理6.29，$E\int_0^T t\mathrm{d}X_t=E\int_0^T t\mathrm{d}(\lambda t)=\frac{\lambda}{2}T^2$. 引理得证。

于是由(7.39)式

$$\mathrm{MGWT}=E(TX_T-\int_0^T t\mathrm{d}X_t)-E[(T-\tau)X_\tau]$$

$$=\frac{\lambda}{2}T^2-E[(T-\tau)X_\tau] \quad (7.40)$$

为使 MGWT 最小，即要求 τ 使 $E(T-\tau)X_\tau$ 达到最大。由分部积分公式

$$E((T-\tau)X_\tau)=E\{\int_0^\tau(T-t)\mathrm{d}X_t-\int_0^\tau X_t\mathrm{d}t\}$$

再一次应用引理7.6，则

$$E[(T-\tau)X_\tau]=E\int_0^\tau[\lambda(T-t)-X_t]\mathrm{d}t \quad (7.41)$$

因为 $f(t)\triangleq\lambda(T-t)-X_t$ 为 t 的单调下降函数，且 $f(0)=\lambda T>0$，$f(T)=-X_T<0$，因此由(7.41)，最优的派送时间即最优停时

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0: X_t\geqslant\lambda(T-t)\} \quad (7.42)$$

我们可以把上述结论推广到 X_t 是非时齐的 Poisson 过程，只要强度函数 $\lambda(t)\triangleq\frac{d}{dt}EX_t$ 是单调下降函数，此时将(7.41)式中 λ 用 $\lambda(t)$来代替，则得最优派车时间为

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0: X_t\geqslant\lambda(t)(T-t)\} \quad (7.43)$$

如果$\{X_t: 0\leqslant t\leqslant T\}$是广义的 Poisson 过程，即 X_t 是零初值，具平稳的独立增量过程，满足随机性的条件：$0<P(X_{t+s}-X_s=0)<$

$1, \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{t+h}-X_h=k)=1$,但不满足单跳性，而

$$\lim_{h\to 0} P(X_{t+h}=k)=P(X_t=k)$$

$$\lim_{h\to 0^+} P(X_{t+h}-X_t=k \mid X_{t+h}-X_t\geqslant 1)=p_k, \quad t\geqslant 0, k=1,2,\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k=1, \quad p_k\geqslant 0$$

则可证明[67]存在正数 λ,使 X_t 的矩母函数及特征函数分别为

$$\Psi_t(z)\triangleq Ez^{X_t}=e^{-\lambda t(\psi(z)-1)}, \quad |z|\leqslant 1$$

$$\varphi_{X_t}(u)\triangleq Ee^{iuX_t}=e^{\lambda t(\varphi(u)-1)}, \quad u\in(-\infty,\infty)$$

其中

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad |z|\leqslant 1$$

$$\varphi(u)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{iku}, \quad -\infty<u<\infty$$

于是可算得

$$EX_t=\lambda t\cdot\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$$

只要级数 $\sum_{k=1}^{\infty} kP_k$ 是收敛的，同样可证明 $\lambda t\sum_{k=1}^{\infty} kP_k$ 是广义 poisson 过程的可料对偶投影，于是得最优派送时间

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0; X_t\geqslant\lambda\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(T-t)\} \tag{7.44}$$

如果 X_t 是一个复合的poisson 过程，亦即假设乘客是成批地来到，此时 $X_t=\sum_{k=1}^{Y_t}\xi_k$，其中$(\xi_n)$是 iid 且与 Y_t 独立的随机变量列，Y_t 是参数为入的 poisson 过程。设 $E\xi_1<\infty$，则 $EX_t=\lambda t\cdot E\xi_1$，于是得最优派送时间为

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0; X_T\geqslant\lambda E\xi_1(T-t)\} \tag{7.45}$$

现在讨论上述问题的一种变化形式，假定第一班车实际发车

时间与决定发车的时间有一段时滞 l(l 为固定的常数)，即停时 τ 只是决定发车的时刻，而实际开车时间为 $\tau+l$. 此时

$$\begin{aligned}
&\text{MGWT}\\
&=E\left\{\int_0^{\tau+l}(\tau+l-t)\mathrm{d}X_t+\int_{\tau+l}^{T}(T-t)\mathrm{d}X_t\right\}\\
&=\frac{\lambda}{2}T^2-E[(T-\tau-l)X_{\tau+l}]\\
&=\frac{\lambda}{2}T^2-E[(T-\tau-l)(X_{\tau+l}-X_\tau)]-E[(T-\tau-l)X_\tau]
\end{aligned}$$

因为 $\{X_{\tau+t}-X_\tau,t\geqslant0\}$ 与 τ 独立，且与 $\{X_t,t\geqslant0\}$ 同分布，因此

$$\begin{aligned}
&E[(T-\tau-l)(X_{\tau+l}-X_\tau)]\\
&=E(T-\tau-l)\cdot E(X_{\tau+l}-X_\tau)\\
&=\lambda l(T-l)-\lambda lE\tau
\end{aligned}$$

从而

$$\text{MGWT}=\frac{\lambda}{2}[l^2+(T-l)^2]-E[(T-\tau-l)X_\tau-\lambda l\tau]$$

往求 τ，使 $E[(T-\tau-l)X_\tau-\lambda l\tau]$ 达到最大。由分部积分公式

$$\begin{aligned}
&E[(T-\tau-l)X_\tau-\lambda l\tau]\\
&=E\left\{\int_0^\tau(T-t-l)\mathrm{d}X_t-\int_0^\tau X_t\mathrm{d}t-\int_0^\tau\lambda l\mathrm{d}t\right\}\\
&=E\left\{\int_0^\tau[\lambda(T-t-2l)-X_t]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}$$

由此在 $T>2l$ 时，最优派送时间为

$$\tau=\inf\{t\geqslant0:X_t\geqslant\lambda(T-t-2l)\}\tag{7.46}$$

如果在 $[0,T]$ 内开出 n 班车 $(n>2)$，它们的开车时间分为 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n=T$，要求 τ_i 的最优解，使

$$\text{MGWT}=E\left\{\int_0^{\tau_1}(\tau_1-t)\mathrm{d}X_t+\cdots+\int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n}(\tau_n-t)\mathrm{d}X_t\right\}$$

达到最小，若 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 为常数时间，则与(7.38)式类似

$$\text{MGWT}=\frac{\lambda}{2}[\tau_1^2+(\tau_2-\tau_1)^2+\cdots+(\tau_n-\tau_{n-1})^2]$$

容易看出最优解：$\tau_k=\dfrac{k}{n}T,k=1,2,\cdots,n$；但如果允许 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$

为停时，我们亦有

$$\mathrm{MGWT}=\frac{\lambda}{2}T^2-\sum_{i=1}^{n}E[(T-\tau_i)(X_{\tau_i}-X_{\tau_{i-1}})]$$

往求 τ_i，使

$$\sum_{i=1}^{n}E[(T-\tau_i)(X_{\tau_i}-X_{\tau_{i-1}})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}[\lambda(T-t)-(X_t-X_{\tau_{i-1}})]\mathrm{d}t]$$

达到最大，似乎应取

$$\tau_i=\inf[t>\tau_{i-1}:X_t-X_{\tau_{i-1}}\geqslant\lambda(T-t)],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7.47}$$

但在 $n>2$，并不能证明(7.39)为最优解。

从经济的观点来看，似乎只是考虑使得平均等待时间为最小是不合适的，而且乘客到来应该是一个生灭过程。所以重新定义一个报酬函数，再考虑到乘客有等待一段时间而离开的可能性，结合考虑应该派几班车，何时派车等才是更符合实际的模型，读者可以作进一步的研究。

§7.4 股票市场、投资与两次停时

股票的价格随着市场经济及人们的投机心理而变化，因此可以看成是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量。每个投机者可以观测到某股票的价格 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m,\cdots$，如果他在 m 时刻买进，则需花费 Y_m. 随后，该项股票的价格依次为 $Y_{m,m+1},Y_{m,m+2},\cdots$ 如果他在 n 时刻卖出股票，则得到 $Y_{m,n}$，于是投机者所得的报酬为

$$Z_{mn}=Y_{m,n}-Y_m$$

对于投机者来说，感兴趣的是选择两次停时 s 与 t，使 $EZ_{s,t}$达

到最大。

下面设

$$Z_{m,n}=f_{m,n}(Y^{(m,n)})$$

其中 $Y^{(m,n)}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m,Y_{m,m+1},\cdots,Y_{m,n})$，$f_{m,n}$为一个已知的实值函数，且 $Z_{m,n}$是可积的适应于 $\mathscr{F}_{m,n}$的序列，这里 $\mathscr{F}_{m,n}=\sigma(Y^{(m,n)})$.

另设 $\mathscr{F}_m=\sigma(Y^{(m)})$，$Y^{(m)}\triangleq(Y_1,\cdots,Y_m)$. 对随机变量 X，我们用 $E_{mn}X$，E_mX 表示 X 对 $\mathscr{F}_{m,n}$，$\mathscr{F}_m$ 的条件期望。

定义7.4　(s,t)是定义在 Ω 且在 $\overline{\mathscr{N}}\times\overline{\mathscr{N}}$ 取值的随机变量对，如果

i) $s<t<\infty$, a. s.；

ii) $\forall\ m\geqslant1$，$\{s=m\}\in\mathscr{F}_m$；

iii) $\forall\ n>m\geqslant1$，$\{s=m,t=n\}\in\mathscr{F}_{m,n}$.

则称(s,t)为复合停止规则。

我们用 $\mathscr{T}_F$ 表示这种复合停止规则全体，对任何$(s,t)\in\mathscr{T}_F$，令

$$Z_{s,t}(\omega)=\begin{cases}Z_{m,n}(\omega), & s=m\text{ 且 }t=n\quad(n>m)\\ -\infty, & s>t\text{ 或 }t=+\infty\end{cases}$$

于是 $P(Z_{st}(\omega)=-\infty)=0$.

称$(Z_{m,n})$满足条件 A^{++}是指

$$E(\sup_m E(\sup_n Z^+_{m,n})<\infty \tag{7.48}$$

记

$$\mathscr{T}_m=\{(s,t)\in\mathscr{T}_F:s\geqslant m\},\quad m=1,2,\cdots$$

$$\mathscr{T}_{m,n}=\{(s,t)\in\mathscr{T}_F:s=m,t\geqslant n\},\quad m=1,2,\cdots;n>m$$

$$V_m=\sup_{(s,t)\in\mathscr{T}_m}EZ_{s,t}$$

$$V_{m,n}=\sup_{(s,t)\in\mathscr{T}_{m,n}}EZ_{s,t}$$

定义7.5　一个复合停止规则(δ,τ)称为是 $\mathscr{T}_m$(或 $\mathscr{T}_{m,n}$)中的最优复合停止规则，是指

i) $(\delta,\tau)\in\mathscr{T}_m$(或 $\mathscr{T}_{m,n}$);

ii) $EZ_{\delta,\tau}=V_m$(或 $EZ_{\delta,\tau}=V_{m,n}$).

特别$(\delta,\tau)\in\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_F$,如 $EZ_{\delta,\tau}=V_1$,则称(δ,τ)为最优的复合停止规则。

引入

$$\gamma_{m,n}=\operatorname*{esssup}_{(s,t)\in\mathscr{T}_{m,n}} E_{m,n}Z_{s,t} \tag{7.49}$$

$$\tilde{\gamma}_m=E_m\gamma_{m,m+1} \tag{7.50}$$

及

$$C_F=\{(s,t)\in T:EZ^-(s,t)<\infty\}$$

显然,我们只须使在 $C_m^F=C_F\cap\mathscr{T}_m$,$C_{mn}^F=C_F\cap\mathscr{T}_{m,n}$中讨论最优停止问题。

定义7.6 称$(s,t)\geqslant(s_1,t_1)$是指 $s\geqslant s_1$且 $t\geqslant t_1$且当且仅当 $s=s_1$,$t=t_1$时$(s,t)=(s_1,t_1)$。

定义7.7 设$(s,t)\in C_{mn}^F$,称(s,t)为(m,n)可取的,若 $E(Z_{s,t}|\mathscr{F}_{mj})>Z_{s,j}$,在 $t>j\geqslant n$ 上成立。

引理7.7 对于任意的 $n=m+1,m+2,\cdots$,及$(s,t)\in C_{m,n}^F$,令

$$(s',t')=(m,t')=\inf\{(m,k)\geqslant(m,n):E(Z_{s,t}|\mathscr{F}_{mk})\leqslant Z_{m,k}\}$$

则

a) $(s',t')\leqslant(s,t)$,$(s',t')\in C_{mn}^F$;

b) $E(Z_{s',t'}|\mathscr{F}_{m,n})\geqslant E(Z_{s,t}|\mathscr{F}_{m,n})$;

c) (s',t')为(m,n)可取的。

参见引理2.1及注1。

引理7.8 设对某一固定的 m 及 $n>m$,$(s,t_i)\in C_{mn}^F$是两个(m,n)可取的复合停止规则,令 $\tau=t_1\vee t_2$,则

a) $(s,\tau)\in C_{mn}^F$,且是(m,n)可取的;

b) $E(Z_{s,\tau}|\mathscr{F}_{m,n})\geqslant\max\{E(Z_{s,t_1}|\mathscr{F}_{m,n}),E(Z_{s,t_2}|\mathscr{F}_{m,n})\}$。

引理7.9 对每个 $m\geqslant1$及 $n=m+1,m+2,\cdots$,存在$C_{m,n}^F$中的一

列停时$\{(m,t_k)\}_{k=1}^{\infty}$，使得

a) $(m,t_k)\leqslant(m,t_{k+1})$，　$k=1,2,\cdots$；

b) $E(Z_{m,t_k}|\mathscr{F}_{m,n})\uparrow\gamma_{m,n}(k\to\infty)$.

引理7.10　若$(m,t)\in C_F$，则对每一个m及$n>m+1$，在$(m,t)\geqslant(m,n)$上$E(X_{s,t}|\mathscr{F}_{m,n})\leqslant\gamma_{m,n}$，且在$(s=m)$上$E(X_{s,t}|\mathscr{F}_{mn})\geqslant\gamma_{m,n}^{-}$.

参见引理2.16～2.19，于是由定理2.20，2.21及注7可知下面的定理成立。

定理7.11　对每一固定的m及$\forall\ n>m+1$，有

a) $\gamma_{m,n}=Z_{m,n}\vee E_{m,n}\gamma_{m,n+1}$；

b) $V_{m,n}=E\gamma_{m,n}$；

c) 令$\tau_{m,n}=\inf\{k\geqslant n;Z_{m,k}=\gamma_{m,k}\}(\inf\ \varphi=+\infty)$，若$(m,\tau_{m,n})$是$(m,n)$可取的，则$(m,\tau_{m,n})$是$C_{m,n}^{F}$中的最优复合停止规则，且

$$E_{m,n}Z(m,\tau_{m,n})=\gamma_{m,n} \tag{7.51}$$

d) 设$E(\sup_k Z_{m,n}^{+}<\infty)=1$，若$P(\tau_{m,n}<\infty)=1$，则$(m,\tau_{m,n})$是$C_{m,n}$中最优的复合停止变量；且当$\lim_{n\to\infty}Z_{m,n}=-\infty$时，$P(\tau_{m,n}<\infty)=1$。

容易证明：当条件A^{++}满足时

$$\sup_m E(\sup_n Z_{m,n}^{+})<\infty \tag{7.52}$$

$$E(\sup_m\tilde{\gamma}_m^{+})<\infty \tag{7.53}$$

为解$(\tilde{\gamma}_m,\mathscr{F}_m)_{m=1}^{\infty}$的最优停止问题，令$\tilde{\mathscr{F}}$为$(\mathscr{F}_m)$停止规则全体，$\tilde{C}_m=\{S\in\mathscr{F};S\geqslant m$，且$E\tilde{\gamma}_S^{-}<\infty\}$记

$$\gamma_m=\operatorname*{esssup}_{s\in\tilde{C}_m}E(\tilde{\gamma}_s|\mathscr{F}_m) \tag{7.54}$$

则由定理2.20，2.21有

$$\gamma_m=\tilde{\gamma}_m\vee E_m\gamma_{m+1} \tag{7.55}$$

$$E\gamma_m=\sup_{S\in\tilde{C}_m}E\tilde{\gamma}_S \tag{7.56}$$

令$\sigma_m=\inf\{k\geqslant m:\tilde{\gamma}_k\geqslant\gamma_k\}(\inf\ \Phi=+\infty)$，则当条件$A^{++}$满足，

因而(7.53)成立，如 $\sigma_m \in \widetilde{\mathscr{F}}$，则 σ_m 是 $(\tilde{\gamma}_m, \mathscr{F}_m)_{m=1}^{\infty}$ 的最优规则，且

$$\gamma_m = E_m \tilde{\gamma}(\sigma_m) \tag{7.57}$$

记 $v_m = E\gamma_m$，它是 $(\tilde{\gamma}_n)_{n \geq m}$ 上最优值。

引理7.12 若条件 A^{++} 成立，$\forall\ \varepsilon > 0$，令

$$\sigma_m(\varepsilon) = \inf\{n \geq m: \tilde{\gamma}_n \geq \gamma_n - \varepsilon\} \quad (\inf \Phi = +\infty)$$

则 $\sigma_m(\varepsilon)$ 是 $\widetilde{C}_m$ 中的 ε 最优规则，亦即

$$E\tilde{\gamma}_{\sigma_m(\varepsilon)} \geq v_m - \varepsilon \tag{7.58}$$

证明 首先由定理2.42，可知，由(7.54)所定义的 $(\gamma_n)_{n=m}^{\infty}$ 是 $\widetilde{C}_m$ 正则的上鞅：容易看出 $E\tilde{\gamma}_{\sigma_m(\varepsilon)}^{-} < \infty$，往证 $P(\sigma_m(\varepsilon) < \infty) = 1$。用反证法，若 $P(\sigma_m(\varepsilon) = \infty) > 0$，记 $B = \{\omega$；对一切 $n > m, \tilde{\gamma}_n < \gamma_n - \varepsilon\}$，对任何 $t \in \widetilde{C}_m$

$$\int_B \tilde{\gamma}_t < \int_B \gamma_t - \varepsilon P(B)$$

另一方面，$\int_{B^c} \tilde{\gamma}_t \leq \int_{B^c} \gamma_t$，于是

$$\begin{aligned} E\tilde{\gamma}_t &< E\gamma_t - \varepsilon P(B) \\ &\leq E\gamma_m - \varepsilon p(B) \\ &= v_m - \varepsilon P(B) \end{aligned}$$

与 v_m 的定义矛盾。

在 A^{++} 条件下，$(\tilde{\gamma}_n)_{n=m}^{\infty}$ 序列存在最优停时

$$\sigma_m = \inf\{n \geq m: \tilde{\gamma}_n \geq \gamma_n\}$$

显然 $\sigma_m(\varepsilon) \leq \sigma_m \quad a.s.$，于是

$$\begin{aligned} & V_m - E\tilde{\gamma}_{\sigma_m(\varepsilon)} \\ \leq\ & E\gamma_m - E\tilde{\gamma}_{\sigma_m} \\ \leq\ & E\gamma_m - E\gamma_{\sigma_m} + \varepsilon \\ \leq\ & \varepsilon \end{aligned}$$

引理得证。

下面的几个结论是本节的主要内容。

定理7.13 设 $\sigma = \inf\{m \geq 1: \tilde{\gamma}_m = \gamma_m\}$ $(\inf \Phi = \infty)$，在 $(\sigma = m)$ 上

$$\tau=\inf\{n>m; Z_{m,n}=\gamma_{m,n}\}(\inf\Phi=\infty), \quad m=1,2,\cdots$$

且在$[\sigma=\infty]$上定义 $\tau=\infty$,那么在 A^{++}条件下,若(σ,τ)是几乎处处有限的,即$(\sigma,\tau)\in\mathscr{T}_F$,则

a) (σ,τ)是$\{Z_{m,n},\mathscr{F}_{m,n}\}$的最优复合规则,即

$$EZ_{\sigma,\tau}=V_1 \tag{7.59}$$

b) $\gamma_1=E_1Z_{\sigma,\tau}$ (7.60)

证明 由条件 A^{++}知,$E(\sup\tilde{\gamma}_n^+)<\infty$,由(7.53)及(7.55)式

$$\gamma_1=E_1\tilde{\gamma}_\sigma \quad a.s.$$

往证$\forall\ (s,t)\in C_F$,$\gamma_1\geqslant E_1Z_{s,t}$,且当$(s,t)=(\sigma,\tau)$时等号成立。

$\forall\ (s,t)\in C_F$,作停时列$(t_m)_{m=1}^{\infty}$如下

$$t_m=tI_{(s=m)}+(m+1)I_{(s\neq m)}$$

则$(m,t_m)\in\mathscr{T}_{m,m+1}$,由(7.49)～(7.51)式,得

$$I_{(s=m)}\tilde{\gamma}_m\geqslant I_{(s=m)}E_mZ_{m,t_m} \quad a.s. \tag{7.61}$$

且当$(s,t)=(\sigma,\tau)$时等号成立。

记 $U=\sup\limits_n Z_{m,n}^+$,$U_m=E_mU$,由于 $\mathscr{F}_m\subseteq\mathscr{F}_{m,n}$,可见 $\tilde{\gamma}_m\leqslant U_m \quad a.s.$,且对任何$(\mathscr{F}_m)_{m=1}^{\infty}$停止规则 S

$$E_1U_S=E_1(U|\mathscr{F}_S)=E_1U$$

因此

$$\begin{aligned}
E_1\tilde{\gamma}_S &=E_1U_S-E_1(U_S-\tilde{\gamma}_S) \qquad (\text{由}(7.61))\\
&\geqslant E_1U_S-E_1\sum_{m=1}^{\infty}I_{(s=m)}(E_mU-E_m(Z_{m,t_m}))\\
&=E_1U-E_1\sum_{m=1}^{\infty}E_m[I_{(s=m)}(U-Z_{m,t_m})]\\
&=E_1\sum_{m=1}^{\infty}I_{(s=m)}Z_{m,t_m}\\
&=E_1Z_{s,t}
\end{aligned}$$

且当且仅当$(s,t)=(\sigma,\tau)$时等号成立。

于是 $\gamma_1\geqslant E_1\tilde{\gamma}_s\geqslant E_1Z_{s,t}$,且当且仅当$(s,t)=(\sigma,\tau)$,$\gamma_1=E_1Z_{\sigma,\tau}$.

(7.60)式获证。

另一方面

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \sup_{(s,t)\in C_F} EZ_{s,t} \\
&= \sup_{(s,t)\in F} E(E_1 Z_{s,t}) \\
&\leqslant E\gamma_1 = v_1 = EZ_{\sigma,\tau} \\
&\leqslant V_1
\end{aligned}
$$

最后一个不等式是由于$(\sigma,\tau)\in\mathscr{T}_F$,定理得证。

定理7.14 对任给 $\varepsilon>0$,令

$$
S=\inf\{m\geqslant 1:\tilde{\gamma}_m\geqslant\gamma_m-\frac{\varepsilon}{2}\}
$$

且在$(s=m)$上定义:$t=\inf\{n>m:Z_{m,n}\geqslant\gamma_{m,n}-\frac{\varepsilon}{2}\}$,上述定义中约定$\inf\Phi=+\infty$,且在$(S=\infty)$上,$t=\infty$,那么在条件 A^{++}下

a) $(s,t)\in\mathscr{T}_F$;

b) $E_1Z_{s,t}\geqslant\gamma_1-\varepsilon$, a. s;

c) $EZ_{s,t}\geqslant E\gamma_1-\varepsilon$.

证明 a) 由定义知 $S<t$ a. s,由条件 A^{++},$V_1=v_1<\infty$,由引理7.12

$$
P(S<\infty)=1
$$

$$
E\tilde{\gamma}_S\geqslant V_1-\frac{\varepsilon}{2}
$$

同理

$$
P(t<\infty)=1
$$

故

$$
(s,t)\in\mathscr{T}_F
$$

b) 令 $\tau_m=\inf\{n>m:Z_{m,n}\geqslant\gamma_{m,n}-\frac{\varepsilon}{2}\}$,则对每一个固定的 m,τ_m是$(\mathscr{F}_{m,n})_{n>m}$的停止规则,由 $E\sup\limits_{m}Z_{mn}^{+}<\infty$及引理7.12

$$
E_{m+1}Z_{m,\tau_m}\geqslant\gamma_{m,m+1}-\frac{\varepsilon}{2}
$$

从而

$$E_m Z_{m,\tau_m} \geqslant \tilde{\gamma}_m - \frac{\varepsilon}{2}$$

令

$$t_m = I_{(s=m)} t + (m+1) I_{(s\neq m)}$$

则在$(S=m)$上，$t_m=\tau_m$，从而

$$\begin{aligned} E_1 Z_{s,t} &= E_1 \sum_{m=1}^{\infty} I_{(s=m)} Z_{m,t_m} \\ &\geqslant E_1 \sum_{m=1}^{\infty} I_{(s=m)} (\tilde{\gamma}_m - \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= E_1 \tilde{\gamma}_S - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

于是

$$EZ_{s,t} \geqslant V_1 - \varepsilon$$

定理7.15 如 γ_m 由(7.54)式所定义，条件 A^{++}满足，则

a) $\gamma_m = \operatorname*{esssup}_{(s,t)\in C_m^F} E_m Z_{s,t}$；

b) $E\gamma_m = V_m$；

c) 若(σ,τ)在 C_m^F 中最优，则

$$\gamma_m = E_m Z_{\sigma,\tau} \quad a.s.$$

证明 a) 由定理7.13的证明，$\forall\ (s,t)\in\mathscr{T}_F$

$$\gamma_1 \geqslant E_1 Z_{s,t}$$

再由定理7.14之 b)，存在如定理7.14所定义的$(S_0,t_0)\in\mathscr{T}_F$，使

$$E_1 Z_{S_0,t_0} \geqslant \gamma_1 - \varepsilon \quad a.s.$$

因此

$$\gamma_1 = \operatorname*{esssup}_{(s,t)\in\mathscr{T}_F} E_1 Z_{s,t}$$

同理可证：$\gamma_m = \operatorname*{esssup}_{(s,t)\in C_m^F} E_m Z_{s,t}$

b) 由$\forall\ \varepsilon>0$，存在$(S_0,t_0)\in C_m^F$，使

$$E_m Z_{t_0,t_0} \geqslant \gamma_m - \varepsilon$$

以及$\forall\ (s,t) \in C_m^F, EZ_{s,t} \leqslant V_m = E\gamma_m$，可知 b)成立。

c) 类似于通常的情形。

注1 设条件 A^{++}满足，则当$\forall\ m, \lim\limits_n Z_{m,n} = -\infty$，且$\lim\limits_m \sup\limits_n Z_{mn} = -\infty$时，定理7.13中$(\sigma,\tau)$是 $\mathscr{T}_r$ 中的最优规则。

在实际应用时，假定总观察次数 $N<\infty$是很合理的。对于有限情形可以用后退归纳法确定 γ_{mn}及 γ_n，从而求出最优规则。回到一开头提出的股票问题，设

$$Z_{m,n} = Y_n - Y_m$$

每一日股票价格的升降是独立的随机变量，因为我们很少有先验的知识。因此只能假定它服从$[a_n, b_n]$上的均匀分布，a_n, b_n 的数值可用已往的统计数据来估算。下面假定 a_n, b_n 是已知的常数，对于固定的 m

$$\gamma_{m,N} = Y_N - Y_m$$

$$\gamma_{m,N-1} = Y_{N-1} - Y_m \vee E(Y_N - Y_m)$$

$$= Y_{N-1} \vee \alpha_{N-1} - Y_m$$

其中

$$\alpha_{N-1} = E(Y_N \vee \alpha_N), \alpha_N = 0 \tag{7.62}$$

归纳地假定

$$\gamma_{m,n} = Y_n \vee \alpha_n - Y_m$$

其中

$$\alpha_n = E(Y_{n+1} \vee \alpha_{n+1}) = \frac{1}{2}[(b_{n+1}^2 - (a_{n+1} \vee \alpha_{n-1})^2]$$

则容易证明

$$\gamma_{m,n-1} = Y_{n-1} \vee \alpha_{n-1} - Y_m$$

$$\alpha_{n-1} = E(Y_n \vee \alpha_n) = \frac{1}{2}[(b_{n+1}^2 - (a_n \vee \alpha_n)^2] \tag{7.63}$$

类似地，令

$$\gamma_{N-1} = \tilde{\gamma}_{N-1}$$

$$=E_{N-1}\gamma_{N-1,N}$$
$$=E(Y_N-Y_{N-1}|\mathscr{F}_{N-1,N-1})$$
$$=\alpha_{N-1}-Y_{N-1}\vee\beta_{N-1}$$

其中

$$\beta_{N-1}=0. \tag{7.64}$$

归纳地假定

$$\gamma_m=\alpha_m-Y_m\vee\beta_m=\tilde{\gamma}_m\vee\beta_m$$

其中

$$\beta_m=E\{(\alpha_{m+1}-Y_{m+1}\vee\beta_{m+1}\}$$
$$=\beta_{m+1}\{b_{m+1}-(a_{m+1}-\beta_{m+1})\vee a_{m+1}\}$$
$$+a_{m+1}[(a_{m+1}-\beta_{m+1})\wedge b_{m+1}]$$
$$+\frac{1}{2}[(a_{m+1}-\beta_{m+1})\wedge b_{m+1}]^2-\frac{1}{2}a_{m+1}^2$$

则容易证明

$$\gamma_{m-1}=\alpha_{m-1}-Y_{m-1}\vee\beta_{m-1}=\tilde{\gamma}_{m-1}\vee\beta_{m-1}$$

其中

$$\beta_{m-1}=E[(\alpha_m-Y_m)\vee\beta_m]$$
$$=\beta_m[b_m-(a_m-\beta_m)\vee a_m]$$
$$+a_m[(a_m-\beta_m)\vee b_m]$$
$$+\frac{1}{2}[(\alpha_m-\beta_m)\wedge b_m)^2-\frac{1}{2}a_m^2] \tag{7.65}$$

于是可求得复合最优规则

$$\sigma=\inf\{m\geqslant 1;\tilde{\gamma}_m\geqslant\gamma_m\}$$
$$=\inf\{m\geqslant 1;Y_m\leqslant\alpha_m-\beta_m\} \tag{7.66}$$

在$[\sigma=m]$上

$$\tau=\inf\{n>m;Z_{m,n}=\gamma_{m,n}\}$$
$$=\inf\{n>m;Y_n\vee\alpha_n-Y_m=Y_n-Y_m\}$$
$$=\inf\{n>m;Y_n\geqslant\alpha_n\} \tag{7.67}$$

这里的 α_n,β_n 都可由(7.62)～(7.65)式来确定，在取得 α_n,β_n

之后，由(7.66)式可确定买进该种股票的时间，而由(7.67)式确定卖出股票的时间。

当股票市场比较正常的时候，我们可以进一步积累资料，获得Y_n分布的更多知识，从而修正Y_n的分布，根据所得到的有关Y_n的分布，再来求得最优停止问题。

现在来研究所谓投资问题，假设一个投资者可以在城市1，2，…或对项目1，2，…进行投资，在投资前，他必要进行一翻调查，如果他估算在这些城市或项目投资成功所能得到的期望收入为θ_1，$\theta_2,\cdots,\theta_m,\theta_{m+1},\cdots$他一旦选定在城市$m$或项目$m$上投资，于是可以进行一次又一次的投资，于是得到的收益为$Y_{m1},Y_{m2},\cdots$我们假定他每次投资成功的概率为q，如果进行$n-m$次成功的投资，则得到的报酬为$\sum_{i=1}^{n-m}Y_{mi}$，如果一旦失败，则将亏损其所有所得，用

$$Z_{mn}=\prod_{i=1}^{n-m}\delta_i\sum_{i=1}^{n-m}Y_{mi}-cm$$

表示他的报酬函数，其中

$$\delta_i=\begin{cases}1, & Y_{mj}\neq 0\\ 0, & Y_{mj}=0\end{cases}$$

c为投资调查或资产转移的费用，对固定的$m,Y_{m1},Y_{m2},\cdots$是相互独立的随机变量，它关于θ_m的条件分布为$PI+qH(\theta_m)$其中I表示0处的单点分布，$H(\theta_m)$表示期望值为θ_m的指数分布，从而可见δ_1，$\delta_2,\cdots,\delta_n$相互独立，且$P(\delta_i=0)=p$，记

$$\mathscr{F}_m=\sigma(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$

$$\mathscr{F}_{m,n}=\sigma(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n,Y_{m1},\cdots,Y_{m,n-m})$$

$$y_i'=\frac{Y_{mi}}{\theta_m},\quad i=1,2,\cdots,n-m$$

则$Y_1',Y_2',\cdots$是独立同分布的，其分布函数为$PI+qH(1)$，且与θ_m相互独立，令

$$N=\inf\{n\geq 1;y_n'=0\}$$

$$S_n = y_1' + \cdots + y_n'$$

则

$$Z_{m,n} \leqslant \theta_m S_n - cm,$$

因此

$$U \triangleq \sup_m Z_{m,n}^+ \leqslant Q \triangleq \sup_m (\theta_m S_N - cm)^+$$

引理7.16 设 $F(u)$是分布函数，令 $G(u)=\prod_{n=1}^{\infty}F(u+n)$，则 $G(u)$为分布函数，当且仅当

$$\int_0^{\infty} u dF(u) < \infty$$

且对每个整数 $b \geqslant 1$

$$\int_0^{\infty} u^b dG(u) < \infty \Leftrightarrow \int^{\infty} u^{b+1} dF(u) < \infty$$

证明留给读者。

引理7.17 设 $Y_n = m_n - cn$，$0<c<\infty$，b 是正整数，则

$$E(\sup_n Y_n^+)^b < \infty \Leftrightarrow E(X^+)^{b+1} < \infty$$

这里 $m_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是独立同分布的。

证明 不妨设 $c=1$，定义

$$G(u) = P(\sup_{n\geqslant 1} Y_n^+ \leqslant u)$$

则对 $u \geqslant 0$

$$G(u) = P(X_1 \leqslant u+1, X_2 \leqslant u+2, \cdots, X_n \leqslant u+n) = \prod_{n=1}^{\infty} F(u+n)$$

由引理7.16

$$E(\sup_{n\geqslant 1} Y_n^+)^b = \int_0^{\infty} u^b \mathrm{d}G(u) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} u^{b+1} \mathrm{d}F(u) = E(X^+)^{b+1} < \infty$$ 证毕

现在假定 $\theta_1, \theta_2, \cdots$是独立的正值随机变量且具有相同的分布，并 $E\theta_i^2 < \infty$，$i=1,2,\cdots$，容易算得 $ES_N^2 = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p[(n-1)2q+$

$((n-1)^2-(n-1))q^2]\}<\infty$，而 θ_i 与 Y_j' 相互独立($j=1,2,\cdots$)，从而

$$E\theta_i^2 S_N^2 = E\theta_i^2 \cdot ES_N^2 < \infty$$

于是由引理7.17知

$$EQ<\infty$$

而

$$U_m \triangleq E_m U = \sup_{i\leqslant m}(\theta_i S_N - C_i)^+ - E\sup_{i>m}(\theta_i S_N - C_i)^+ \leqslant Q + EQ$$

所以 $E\sup_m U_m \leqslant 2EQ<\infty$，即 A^{++} 条件满足。

注意到对每个固定的 m，$\{Z_{m,n},\mathscr{F}_{m,n}, n>m\}$ 属于单调情形，事实上，若令

$$B_n=\{E(Z_{m,n+1}|\mathscr{F}_{m,n})\leqslant Z_{m,n}\}$$

由于

$$
\begin{aligned}
&E(Z_{m,n+1}|\mathscr{F}_{m,n})\\
&=\delta_1\cdots\delta_{n-m}\{(E(\delta_{n-m+1}Y_{m1}|\mathscr{F}_{m,n})+E(\delta_{n-m+1}Y_{m,n-m+1}|\mathscr{F}_{m,n})\}-cm\\
&=\delta_1\cdots\delta_{n-m}\{q(Y_{m1}+\cdots Y_{m,n-m})+qE(Y_{m,n-m+1}|\mathscr{F}_m\}-cm\\
&=\delta_1\cdots\delta_{n-m}\{q(Y_{m1}+\cdots Y_{m,n-m})+q\mu_m]-cm
\end{aligned}
$$

其中

$$\mu_m=E(Y_{m,n-m+1}|\mathscr{F}_m)=E(Y_{m1}|\theta_m)=q\theta_m$$

因此 $\omega\in B_i \Leftrightarrow$ 或者存在 $m<l<m+1$ 使 $\delta_l=0$ 或者

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n-m}\delta_i[(y_{m1}+\cdots+y_{m,n-m})q+q\mu_m]-cm\\
&\leqslant\prod_{i=1}^{n-m}\delta_i(y_{m1}+\cdots+y_{m,n-m})-cm
\end{aligned}
$$

因此

$$B_n=\{Z_{m,n}=-cm \text{ 或 } Z_{m,n}\geqslant b_m-cm\}$$

其中

$$b_m=E_m Y_{m1}/p=q\theta_m/p$$

所以

$$B_{m+1}\subseteq B_{m+2}\subseteq\cdots$$

令

$$\tau_{m,m+1}=\inf\{n\geqslant m+1;\omega\in B_n\}$$

$$=\inf\{n\geqslant m+1;Y_{m,n-m}=0\text{或}\sum_{i=1}^{n-m}Y_{mi}\geqslant b_m\}\qquad(7.68)$$

则

$$P(\tau_{m,m+1}>n))\leqslant P(\delta_k=1,k=1,2,\cdots,n)=q^n\to 0(n\to\infty)$$

由此可见 $\tau_{m,m+1}<\infty$ a.s.，且序列$\{Z_{m,n},\mathscr{F}_{m,n},n>m\}$属于单调情形，由于 A^{++}条件成立，因此

$$\underline{lim}_{n\to\infty}\int_{[\tau_{m,m+1}>n]}Z_{m,n}^{-}=0$$

而 $Z_{mn}^{-}\leqslant cm$，故对任何 $t\in C$

$$\underline{lim}_{n\to\infty}\int_{(t>n)}Z_{mn}^{-}=0$$

由定理2.8，可知 $\tau_{m,m+1}$是$\{Z_{m,n},\mathscr{F}_{m,n}\}_{n>m}$的最优规则，亦即 $\tilde{\gamma}_m=E_mZ_{m,\tau_{m,m+1}}$. 现在来求$\{\tilde{\gamma}_m,\mathscr{F}_m,m\geqslant i\}$的最优规则，为此先计算 $\tilde{\gamma}_m$.

考虑下面的随机游动问题，设 $Y_1,Y_2,\cdots$是独立同分布随机变量序列，分布函数为 $PI+qH(\theta)$，令

$$N=\inf\{k\geqslant 1;Y_k=0\text{或}u+\sum_{i=1}^{k}Y_i\geqslant b\},\quad b>0,u<b$$

$$S(u)=I_{(Y_N>0)}(u+\sum_{i=1}^{N}Y_i)$$

记 $f(u)=ES(u)$，则可证明

$$f(u)=q[\int_0^{b-u}f(u+y)h_\theta(y)\mathrm{d}y+\int_{b-u}^{\infty}(u+y)h_\theta(y)\mathrm{d}y]$$

$$(7.69)$$

其中 $h_\theta(y)=\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}$. 在右边作替换 $y'=y+u$，然后两边对 u 求微分，则可得 $f'(u)=pf(u)/\theta$，所以 $f(u)=Ce^{pu/\theta}$，因为 $f(b-)=q(b+\theta)$(由(7.69)式)，于是 $f(u)=q(b+\theta)e^{p(u-b)/\theta}$，如令 $b=q\theta/p$，则 $f(0)$

$=q\theta/(pe^q)$。

应用上述结果，则可得

$$\tilde{\gamma}_m=E_m Z_{m,m+1}=r\theta_m-cm,$$

其中 $r=q/qe^q$，$\{r\theta_m,m\geqslant1\}$是相互独立且同分布，记其分布函数为 G，令

$$X_m'=M_m-cm,M_m=max(r\theta_1,\cdots,r\theta_m),m\geqslant1$$

则由第二章§2.4之例1，可知$\{X_m',\mathscr{F}_m,m\geqslant1\}$属于单调情形，且

$$\sigma=\inf\{m\geqslant1:M_m\geqslant\alpha\} \tag{7.70}$$

为最优规则，式中 α 为 $\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha)^+\mathrm{d}G(t)=c$ 的解。同时我们可知 $EX_\sigma'=\alpha$.

下面的定理表明上述 σ 也是$\{\tilde{\gamma}_m,\mathscr{F}_m,m\geqslant1\}$的最优规则，从而$(\sigma,\tau)$，其中在 $\sigma=m$ 上，$\tau=\tau_{m,m+1}$是最优的复合停止规则，这就完全解决了投资问题。

定理7.18　上述(7.70)所定义的 σ 是$\{\tilde{\gamma}_m,\mathscr{F}_m,m\geqslant1\}$的最优规则，且 $E\tilde{\gamma}_\sigma=\alpha$.

证明　因为　$\sigma=\inf\{m\geqslant1:max(r\theta_1,\cdots,r\theta_m)\geqslant\alpha\}$

$=\inf\{m\geqslant1:r\theta_m\geqslant\alpha\}$

于是　$X_\sigma'=r\theta_\sigma-c\sigma=\tilde{\gamma}_\sigma$，而对任意的停止规则 τ，$\tilde{\gamma}_\tau\leqslant X_\tau'$，从而

$$E\tilde{\gamma}_\tau\leqslant EX_\tau'\leqslant EX_\sigma'=E\tilde{\gamma}_\sigma=\alpha$$

§7.5　战争中的最优停止问题

1972年 Norman star 在[73]中研究了如何赢得战争的问题，假设有两个武装集团发生了战争，一场战争总有许多有间歇的战斗所构成，假设战斗次数 N 是一个固定的常数，每次战争中双方胜负的概率是确定的，比如设甲胜的概率为 P，并设每次战争的费用

为常数 C，经过若干次互有胜负的战斗之后，双方都得考虑战争是否要继续打下去的问题。

现在用 r_i 表示从 n 次战斗倒过去计算的甲方连续胜利的次数，比如九次战斗中甲方的胜负状态是：W,F,W,W,F,W,W,W,W，这里 W 表示甲胜，F 表示甲败，按 r_n 的定义，可知 $r_1=1,r_2=0,r_3=1,r_4=2,r_5=0,r_6=1,r_7=2,r_8=3,r_9=4$交战的双方都想己方在停战时有较多的连续胜利，以求得谈判桌上争得更多的利益，但是在取得几次胜利之后是停下来谈判还是继续打下去企求更多的连贯胜利呢？

现在来建立合适的数学模型。

令 $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)$：其中 $\omega_i=0$或$1\}$，$\omega_i=0$表示甲在第 i 次战争中失败，$\omega_i=1$表示甲在第 i 战争中获胜。

$$P(\omega_i=1)=p>0,P(\omega_i=0)=q=1-p$$

$\mathscr{F}=\Omega$ 的一切子集

$$r_n(\omega)=\begin{cases}r, & \text{如果 } \omega_{n-r+1}=\cdots=\omega_{n=1}\\ 0, & \text{如果 } \omega_{n=0}\end{cases}$$

$$r_0\equiv 0$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(r_1(\omega),\cdots\cdots r_n(\omega))$$

[73]中引入报函数

$$X_n(\omega)=r_n(\omega)-cn \tag{7.71}$$

容易证明：$r_1,r_2,\cdots,r_N$ 是一个齐次马氏链，且$\forall\ r\leqslant n$

$$P(r_{n+1}=r+1|r_n=r)=p$$

$$P(r_{n+1}=0|r_n=r)=q$$

由于马氏链具强马氏性，因此 Snell 包

$$\gamma_n^N=\underset{\tau\in c_n^N}{\text{esssup}}E(X_t|r_n)$$

是 $\sigma(r_n)$可测的，我们记 $r_n^N(r)$为 r_n^N 在$[r_n=r]$上的值

$$E(\gamma_{n+1}^N|\gamma_n=\gamma)$$

$$=\frac{1}{P(\gamma_n=r)}\int_{[r_n=r,r_{n+1}=r+1]}\gamma_{n+1}^N+\int_{[r_n=r,r_{n+1}=0]}\gamma_{n+1}^N$$
$$=p\gamma_{n+1}^N(r+1)+q\gamma_{n+1}^N(0) \tag{7.72}$$

我们有

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_n^N=X_N=r_N-cN\\&\gamma_n^N(r)=r-cn\vee p\gamma_{n+1}^N(r+1)+q\gamma_{n+1}^N(0)\end{aligned}\right\} \tag{7.73}$$

最优停时

$$\tau_N=\inf\{0\leqslant n\leqslant N;\gamma_n^N(r_n)=r_n-cn\} \tag{7.74}$$

为了求得更好的表达式，首先证明

引理7.19 $\forall\ 0\leqslant r\leqslant n\leqslant N$

i) $\gamma_n^N(0)=V_0^{N-n}-cn$ (7.75)

ii) $\gamma_n^N(r)\leqslant\gamma_n^{N+1}(r)$ (7.76)

iii) $\gamma_n^N(0)\geqslant\gamma_{n+1}^N(0)$ (7.77)

其中 $V_0^{N-n}=\sup\limits_{\tau\in C_0^{N-n}}E(r_t-ct)$。

证明 由于 $r_1,r_2,\cdots,r_N$ 是马氏链

$$\begin{aligned}\gamma_n^N(0)&=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n^N}E(X_t|r_n=0)\\&=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n^N}E(r_t-C(t-n)|r_n=0)-cn\\&=\operatorname*{esssup}_{t\in C_0^{N-n}}E(\gamma_t-ct|r_0=0)-cn\\&=V_0^{N-n}-cn\end{aligned}$$

(7.75)得证，(7.76)是显然的，由(7.75)便得(7.77)。

在模型(7.71)中，需要将不同量纲的数 r_n 与 C 统一在一个式子中，这不是容易做到的，我们提出另一种模型

$$X_n=f(r_n)-cn$$

其中 $f(r)$是 r 的单调不减的整变量函数。为了处理方便，将它扩张成阶梯函数，即设

$$f(x)=f(r),\quad r\leqslant x<r+1,\quad r=0,1,2,\cdots$$

并假定：

1) $f(0)=0$且 $f(r)$是上凸函数，于是$\forall\ 0<p<1$

$$
\begin{aligned}
& f(r)+pf(r+2) \\
\leqslant & (p+1)f\left(\frac{r}{p+1}+\frac{p(r+2)}{p+1}\right) \\
< & (p+1)f(r+1)
\end{aligned}
\tag{7.78}
$$

2) $(P+1)f(r+1)-f(r)-pf(r+2)\geqslant cq \qquad (7.79)$

定理7.20 在上述假设(7.78)、(7.79)式下

$$\gamma_n^N(r)=f(r)-cn \tag{7.80}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(r)\geqslant q(cn+\gamma_{n+1}^N(0))-pc \tag{7.81}$$

其中 $\varphi(r)=f(r)-pf(r+1)$。

证明 必要性。设(7.80)成立，由(7.73)式

$$f(r)-cn\geqslant p(f(r+1)-c(n+1)+q\gamma_{n+1}^N(0) \tag{7.82}$$

它的变形即(7.81)式，必要性得证。

充分性。由后退归纳法，当 $n=N-1$时，(7.80)是成立的，如果充分性对 $N-1,N-2,\cdots,n$ 已证得，往证 $n-1$的情形，由(7.82)式，此时

$$f(r)-c(n-1)\geqslant p(f(r+1)-cn)+q\gamma_n^N(0) \tag{7.83}$$

于是

$$f(r+1)-cn\geqslant pf(r+1)-cn+f(r+1)-f(r)-c+q\gamma_{n+1}^N(0)$$

再由(7.79)式，则

$$f(r+1)-cn\geqslant p(f(r+2)-c(n+1))+q\gamma_{n+1}^N(0)$$

由归纳假设 n 之情形，这表明

$$\gamma_n^N(r+1)=f(r+1)-cn$$

将此式代回(7.83)式，可见

$$f(r)-c(n-1)\geqslant p\gamma_n^N(r+1)+q\gamma_n^N(0)$$

因此

$$\gamma_{n-1}^N(r)=f(r)-c(n-1)$$

证毕

注2 取 $f(r)=r$，则回到[73]的结果。

现在来求模型的最优停止规则。

定理7.21　设 $c\geqslant pf(1)$，则最优规则 $\tau_N\equiv0$；设 $c<f(1)$，则

$$\tau_N=\inf\{0\leqslant n\leqslant N:\varphi(r_n)\geqslant q(cn+\gamma_{n+1}^N(0))-pc\} \quad (7.84)$$

证明　只要证明当 $c\geqslant pf(1)$时，对一切$0\leqslant r\leqslant n\leqslant N$

$$\gamma_n^N(r)=f(r)-cn \quad (7.85)$$

当 $n=N$ 时，(7.85)是成立的。如果对 $n=N,N-1,\cdots,k+1$ (7.85)成立，则当 $n=k$ 时

$$\gamma_k^N(r)=f(r)-ck\vee p(f(r+1)-c(k+1)-qc(k+1))$$

由此可见，$\gamma_k^N(r)=f(r)-ck$ 等价于 $\varphi(r)\geqslant-c$，由(7.78)式，$\varphi(r)$是增函数，所以

$$\varphi(r)\geqslant\varphi(0)=-pf(1)\geqslant-c$$

(7.85)成立。

由这个定理可见，当一次作战的费用 c 大于等于一次胜利之平均所得时，以不开仗为最优；在 $c<f(1)$时，由后退归纳法可求得一列 $\gamma_{n+1}^N(0)$，当胜利次数的连贯 γ_n，满足 $\varphi(r_n)\geqslant q(cn+\gamma_{n+1}^N(0))+pc$ 时，就应该停止。

推论7.22　$\forall\ 0\leqslant r\leqslant n\leqslant N$，如 $\gamma_n^N(r)=f(r)-cn$，则

$$\gamma_{n+1}^N(r+1)=f(r+1)-c(n+1)$$

证明　由于 $\gamma_n^N(r)=f(r)-cn\Leftrightarrow\varphi(r)\geqslant q(cn+\gamma_{n+1}^N(0))-pc$，而由(7.79)式

$$\begin{aligned}\varphi(r+1)&\geqslant q(cn+\gamma_{n+1}^N(0))-pc+\varphi(r+1))-\varphi(r)\\&\geqslant q(c(n+1)+\gamma_{n+2}^N(0)-pc\end{aligned}$$

因此

$$\gamma_{n+1}^N(r+1)=f(r+1)-c(n+1)$$

这个推论表明：如果在第 n 步停下来为最优，但再打一仗又取得了胜利，此时也应该停止战争，方为最优的策略，企求常胜是没有根据的。

推论7.23　设 $pf(1)\leqslant c\Leftrightarrow\tau_N=0$，如 $pf(1)>c$ 且对某 $n<N$，r_n

$=0$，则 $\tau_N > n$.

证明 定理7.21已证明 $c \geqslant pf(1) \Rightarrow \tau_N = 0$，在 $pf(1) > c$ 的条件下，当 $r_n = 0$时

$$\varphi(r_n) = -pf(1) < -c < -cp < -cp + q(cn + \gamma_{n-1}^N(0))$$

由(7.84)可见 $\tau_N > n$，由于 $\varphi(r_0) = \varphi(0) = -pf(1)$，可见在 $pf(1) > c$ 的条件下，$\tau_N > 0$，因此 $\tau_N = 0$意味着 $pf(1) \leqslant c$ 证毕。

这个推论的直观意义是：如果 $pf(1) > c$，而当前的战斗失败了($r_n = 0$)，则应该继续打下去，换言之，在 $pf(1) > c$ 的条件下，失败时更不能停止战争。

参考文献

[1] (美)Chow yuan shih, Robbins H, Siegmund D. 最优停止理论. 上海科技出版社,1983. 何声武,汪振鹏译

[2] shiryayev A N. Optimal stopping rules, 1976. Translated by Aries A B. Springer-Verlag,1978

[3] 严加安. 鞅与随机积分. 上海科技出版社,1981

[4] 严加安. 测度与积分. 陕西师大出版社,1988

[5] Michael, klass J. Properties of optimal extended valued stopping rules for sn/n. The Annals of proba,1973. 719—757

[6] Chow Y S, Robbins M. On optimal stopping rules for sn/n. illinois J Math,1965(9):444—454

[7] Chow y s, Moriguti S, Robbins H, Samuels S M. *Optimal selection* based on relative rank. Israel J. Math,1964(2):81—90

[8] Smith M H. A secretary problem with uncertain employment. J. Appl Prob,1975(12):620—624

[9] 金治明. 允许拒绝的秘书问题. 国防科技大学学报,1986(2)

[10] 金治明. 可拒绝的秘书问题. 应用概率与统计,1986(4)

[11] 周健伟,周晓文. 一般报酬下的可拒绝秘书问题. 应用概率与统计,1990(3):284—289

[12] Loeve. Probability Theory. third edition. D. Uan Nostrand Company INC,564

[13] Rasmussen W T. A generaliged choice problem . J. optimization theory and application,1975(3)

[14] Beniamin, Goldys. The Secretary proboem——The case with

memory for one step. Demonstrato Mathematics. Vol XI, 1973(3)

[15] Rubin H, Samuels S M. The finite memery secretary problem. Ann proba, 1977(5): 625—635

[16] Mark, Yang C K. Recogniging the maximum of a sequence based on relative rand with backward solicitation. J. Appl. proba, 1974(11): 504—512

[17] Joseph D petrugccell. Best choice problem in volving uncertaining of selection and recall of observations. J. Appl. proba, 1981(18): 415—425

[18] Choe K L, Bal D S. A secretary problem with backward solicitation and uncertain employment. J. Appl. proba, 1983 (20): 891—896

[19] 金治明,李晓杰. 可招回秘书问题. 国防科技大学学报, 1992(1)

[20] Thomas J lorenzen. optimal stopping with sampling cost: The secretary problem. Ann of Proba, 1981(1): 167—172

[21] Kopp P E. Martingales and stochastic integrals. Cambridge university press, 1984

[22] 金治明. 最小、最大广义最优停止规则的特征. 国防科技大学学报, 1990(3)

[23] 薛行鸿. 最优序贯决策的唯一性. 中国科学, 1985(A7): 585—595

[24] Irle A, Bayreuth. On the best choice problem with Random size. Z. O. R. 1980(24): 177—190

[25] Rasche M. Allgemeine stopprobleme. unpublished technical report. Institut fur Mathematische statistik. Universitist. Munster, 1993

[26] Howard R A. Dynamic Programming and Markov Processes Wiley, 1960

[27] David C Nachman. Optimal stopping with a horizon constraint. Mathematics of operations Research, 1980(1)

[28] Kennedy D P. A contrained optimal stopping problem J. Appl. proba, 1982(19): 631—641

[29] 徐可岱. 带约束条件的最优问题. 国防科技大学学报, 1985(2)

[30] 金治明. 多目标最优停止与约束最优停止. 数学研究与评论, 1988(1)

[31] Bockafellar R T. Convex analysis. Princeton university press, 1970

[32] А Г факсев. Об оптимальной остановке случайных процессов с непрерывным временем. теория вероятности иеё примен, 1970. XV(2): 326—334

[33] Mertens J F. Sur la theorie des processus stochastigues. C. r. Acad, Sci. Paris ser A, 1969(268): 495—496

[34] *Mertens J F. Theorie des processus stochastigues generaux applications.* Z. W. G. 1972(22): 45—68

[35] Thompson M E. Contimuous parameter optimal stopping problems. Z. W. G. 1971(10): 302—318

[36] М А Шашиашвили. Об *оптимальной остановке случайных* процессов с непрерывным временем и о стохастических дифференциальных представлениях для цен. УДК, 519. 21

[37] 薛行鸿. 连续参数的最优停止问题. 数学研究与评论, 1986(10)

[38] 金治明. The optimal stopping problem of a continuous paramater process. Applied Mathematics—A Journal of chinese u-

niversities, vol 7. 1992(1)

[39] Albrecht Irle. Monotone stopping problems and continuous time processes Z. W. G 48. 1979. 49—56

[40] Dwass M. Estremal stochastic processes. Ann. Math. statist. 35. 1964. 1718—1725

[41] Lamperti J. On extreme order statistics. Ann. Math. statist 35. 1964. 1726—1737

[42] Chow Y S, Robbins S. Amartingale system theorem and applications. Proba, Univer calif, 1961. 93—104

[43] Dykin E B. Markov processes. Springer-Verlag, 1965

[44] 那汤松. 实变函数论(下册). 人民教育出版社, 1958

[45] Grigelionis B, Shirayayev A N. On the stifan problem and optimal stopping rules for Markov processes. Teovia Verojale i primemen 11(4). 1966. 612—631

[46] Dykin E E. 马尔科夫过程论基础. 1959. 王梓坤译

[47] Baxter J R, Chacon R V. Compactness of stopping times. Z. G. 40. 1977. 161—181

[48] Edgar G A, Millet A, Sucheston L. On Compactness and optimality of stopping times . Martingale theory in Harmonic and banach spaces Cleveland, 1981. Springers LNM 939

[49] Annie Millet. On randomized tactics and optimal stopping in the plane. The Ann. of proba. Vol 13. No 3. 1985. 946—964

[50] Jacod J, Memin J. On tightness and stopping times. Stochastic processes and their application, 1983(14): 109—146

[51] 夏道行等. 第二泛函数程. 第一版. 高等教育出版社, 1987

[52] Haggstrom G W. Optimal stopping and experimental design. Ann. math. stati. 1966(37): 7—20

[53] Cairoli R, Gabriei J P. Arret optimal de certaines suites de variables aleatoires indepéndantes. Lecture Notes in Math 721, 174—198 Spring-Verlag

[54] Krengel U, sucheston L. Stopping rules and tactics for processes indexed by a directed set. J. Multivariate Anal. 11, 1981. 199—229

[55] Walsh J B. Optimal increasing paths. collogue E. N. S. T. —C. N. E. T 1980. Lecture Notes in Math 863, 172 — 201 springer-Verlag

[56] Mandelbaum A, Vanderbei R J. Optimal stopping and supermartingales over partially ordered sets. Z. W.. 1981(57): 252—264

[57] Dalang R C. On infinite perfest graphs and randomzed stopping points on the plane. Probab theory and Related fields. 1988(78): 357—378

[58] Mazziotto G, Szpirgisa J. Arret optimal sur le plan Z. W. G. 1983(62): 215—233

[59] Mazziotto G. Two parameter optimal stopping and bi-Markov processes Z. W., 69. 1985: 99—135

[60] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论. 华东师大出版社, 1986

[61] Wald A. Sequential Analysis. John Wiley & Sons inc, 1947

[62] Wald A, Waldfowitz J. Optimal character of the sequential probability ratio test. Ann. Math. Statist, 19, 1948: 326—329

[63] Arrow K J, Blackwell D, Girxhick M A. Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. Econometrica, 1949 (17): 213—244

[64] 陈希孺. 数理统计引论. 科学出版社, 1981

[65] Ross s. Optimal dispatching of poisson process J. Appl proba, 1969(6):692—699

[66] Sheng-wu HE, Jia-gang Wang. on the optimal parking problem. Chin Ann of Math, 1990, 11(B1):45—50

[67] 胡迪鹤. 应用随机过程引论. 哈尔滨工业大学出版社, 1984

[68] Masamikurano, Masami Yasuda, Junichi Nakagami. Multi-Variate stopping problem with a majority rule. J. of the operations Research. Society of Japan No 133, 1980(3)

[69] Prosman E L, Sonin I M. Equilibrium points in a game related to the best choice problem. Theory of proba and its appli. Vol 20, 1975(4):770—781

[70] Sakaguchi M. Optimal stopping in sampling from a bivariate distribution. J. of operations Research Socity of Japan Vol (16). 1973(3):186—200

[71] Modelbaum A. Discreate multi—armed bandits and multi—parmeter processes. Z. W. G71. 1986. 129—147

[72] 金治明.(内部资料)多指标鞅论初步, 1987

[73] Normann starr. How to win a war if you must. Optimal stopping based on success runs. The Ann. of Math. statis. Vol 143, 1972(6):1884—1893

[74] 金治明. 战争中的最优停止问题. 军事运筹, 1989(2)

[75] Gus W. Haggstrom Optimal sequential procedures when more than one step is required. Ann. Math Statist. 1967(38):1618—1625

[76] 罗建书. 两指标随机过程最优停止的构造. 应用概率与统计, 1993(2)

[77] 易东云. Rasche 方法在偏序集上最优停止问题中的应用.

数学研究与评论,1993(4):619—622
[78] 易东云.离散偏序集上的最优停点和最优策略.应用概率与统计,1994(1):10—14

附　录

这里扼要叙述本书中用到的测度论、鞅论的某些主要结果，以方便读者。

1. 概率空间

设 Ω 为基本事件的集合，$\mathscr{F}$ 为 Ω 子集所构成的 σ 代数，P 为定义在 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，则称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间。称它为完备的，如果 $\mathscr{F}$ 包含一切零测集的子集。只要将 $\mathscr{F}$ 适当地扩大，总可以使$(\Omega,\mathscr{F},P)$为完备的概率空间。今后我们都默认$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的概率空间。

在讨论随机变量序列时，我们需要考虑 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数列 $\mathscr{F}_n$，$n=1,2,\cdots$，它满足单调性，即 $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2\subseteq\cdots$，另外假设 $\mathscr{F}_0$包含了 $\mathscr{F}$ 中一切零测集的子集。记 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n=\sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$，一般地取 $\mathscr{F}_0$为由 Ω,ϕ 及一切零测集子集所生成的 σ 代数，称族$(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$为随机基或 σ 代数流。

在讨论随机过程$\{X_t(\omega),t\in R_+\}$时，我们需要考虑 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数族$\{\mathscr{F}_t,t\in R_+\}$，它满足所谓的通常条件是指

i) $\forall\ t<s,\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}_s$；

ii) $\mathscr{F}_0$包含了 $\mathscr{F}$ 上一切零测集的子集；

iii) $\forall\ t>s,\mathscr{F}_s=\bigcap\limits_{t>s}\mathscr{F}_t$.

也称族$(\mathscr{F}_t)_{t\in R_+}$为随机基或 σ 代数流。

2. 关于数学期望的几个极限定理

定理 $A.1$　Levi 单调收敛定理：若随机变量列 $X_n\uparrow X$，且 $EX_1^-<\infty$，则 $EX_n\uparrow EX$；类似地，若 $X_n\downarrow X$，$EX_1^+<\infty$，则 $EX_n\downarrow EX$.

证明　令 $f_n=X_n-X_1$，则 $f_n\uparrow f=X-X_1\geqslant 0$，且每个 $f_n\geqslant 0$，对

每个 f_i 存在非负的简单函数列 $f_{im}\uparrow f_i(m\to\infty)$，令 $g_m=\bigvee_{i=1}^{m}f_{im}$，则 g_m 仍是非负简单函数，且 $g_m\uparrow f$，$g_m\leqslant f_m$，故由积分的定义

$$Ef=\lim_{m\to\infty}Eg_m\leqslant\lim_{m\to\infty}Ef_m\leqslant Ef$$

从而

$$\lim_{m\to\infty}EX_m-EX_1=EX-EX_1$$

由于 $EX_1^-<\infty$，在上述等式两边加上 $EX_1>-\infty$，则得到所需的结果，定理的后半部分是类似的。

上述定理中 $X_n\uparrow X$ 可改为 $X_n\uparrow X\quad a.s.$，今后如果不加特别的说明，在概率空间上实值随机变量的收敛总是理解为在几乎处处意义下的，类似地"$x\leqslant y$"也理解为 $P(x\leqslant y)=1$。

定义 $A.1$ 一个实值随机变量序列(X_n)称为是一致可积的，如果有

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n\int_{[|X_n|>c]}|X_n|=0 \qquad (A.1)$$

众知它等价于

$$\sup_n E|X_n|<\infty\text{且}\lim_{P(A)\to 0}\sup_n\int_A|X_n|=0 \qquad (A.2)$$

定理 $A.2$（Fatou 引理） 若(X_n^+)是一致可积的，且 $E(\limsup_n X_n)$存在，则

$$E(\limsup_n X_n)\geqslant\limsup_n EX_n$$

类似地，若(X_n^-)一致可积，且 $E(\liminf_n X_n)$存在，则 $E(\liminf_n X_n)\leqslant\liminf_n EX_n$。

证明 只证第一部分。先设对一切 n，$X_n\leqslant a<\infty$，由于$\sup_{k\geqslant n}X_k\downarrow\limsup_n X_n(n\to\infty)$，且

$$E(\sup_{k\geqslant n}X_k)\leqslant a<\infty$$

由 Levi 定理

$$E(\sup_{k\geqslant n}X_k)\downarrow E(\limsup_n X_n)$$

又

$$E(\sup_{k\geq n} X_k)\geq EX_n$$

从而

$$\limsup_n EX_n\leq E(\limsup_n X_n)$$

在一般情形，$\forall\ \varepsilon>0$，取 a 充分大，可使

$$E(X_n\wedge a)\geq EX_n-\varepsilon,\quad n\geq 1$$

其中$\wedge$及$\vee$为格运算符号，分别表示取小或取大的运算。于是

$$E(\limsup_n X_n)\geq E(\limsup_n(X_n\wedge a))\geq\limsup_n EX_n-\varepsilon$$

由 ε 的任意性，最后证得本定理。

今后称(X_n^+)一致可积为上一致可积，(X_n^-)一致可积为下一致可积。

定理 $A.3$　设$0\leq X_n\to X$ 且 $EX_n<\infty(n\geq 1)$，则 $EX_n\to EX<\infty$，当且仅当(X_n)一致可积。

证明　充分性。对$(X_n)(-X_n)$应用 Faton 引理可得

$$EX\leq\liminf_n EX_n\leq\limsup_n EX_n\leq EX$$

由(X_n)的一致可积性及上式可知 $EX<\infty$.

必要性。首先可以看到集合

$$B=\{b:P(X=b)>0\}$$

是可列的（事实上，对每个 $m=1,2,\cdots$，$\{b:P(X=b)\geq\frac{1}{m}\}$是有限的），对任何 $a\in B$，有

$$X_nI_{(X_n<a)}\to XI_{(X<a)}$$

显然$\{X_nI_{(X_n<a)}\}$仍是一致可积的，从而由上述充分性的证明

$$\int_{(X_n<a)}X_n\to\int_{(X<a)}X.$$

于是对每一个 $a\in B$，有

$$\int_{(X_n\geq a)}X_n\to\int_{(X\geq a)}X$$

$\forall\ \varepsilon>0$，选 $a_0\in B$ 充分大，使得

$$\int_{(X\geqslant a_0)} X<\frac{\varepsilon}{2}$$

再令 N_0 充分大，使对所有的 $n\geqslant N_0$，有

$$\int_{(X_n\geqslant a_0)} X_n\leqslant \int_{(X\geqslant a_0)} X+\frac{\varepsilon}{2}$$

最后取充分大的 $a_1\geqslant a_0$，使对一切 $n=1,2,\cdots,N_0$，有

$$\int_{(X_n\geqslant a_1)} X_n<\varepsilon$$

于是对一切 $a\geqslant a_1$，有

$$\int_{(X_n>a_1)} X_n<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots$$

这就证明了(X_n)是一致可积的。

推论 $A.4$　若 $X_n\to X$ 且(X_n)一致可积，则

$$E|X_n-X|\to 0$$

证明　由 Fatou 引理和$(A.2)$式

$$E|X|\leqslant\liminf_n E|X_n|<\infty$$

不难看出$(|X_n-X|)$是一致可积的，于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}E|X_n-X|=0$$

定理 $A.5$　**Lebesgue 控制收敛定理**　若 $X_n\to X$ 且存在一个可积的随机变量 y，使得

$$|X_n|\leqslant y,\quad n\geqslant 1$$

则

$$E|X_n-X|\to 0,\quad n\to\infty$$

下面的引理在涉及条件期望的论证中经常会用到。

引理 $A.6$　若 EX_1 和 EX_2 存在，且 $\forall A\in\mathscr{F}$，$\int_A X_1\leqslant(=)\int_A X_2$，则

$$X_1\leqslant(=)X_2$$

证明　对每个 $m>0$，有

$$\int_{A\cap\{|X_1|\leqslant m\}}(X_1-X_2)\leqslant 0$$

令 $A=\{X_1-X_2\geqslant\varepsilon\}$ 可得

$$P\{|X_1|\leqslant m, X_1-X_2>\varepsilon\}=0$$

令 $\varepsilon\to 0, m\to\infty$，就有

$$P(|X_1|<\infty, X_1>X_2)=0$$

类似地可证

$$P(|X_2|<\infty, X_1>X_2)=0$$

由 $EX_1\leqslant EX_2$ 可知 $P(X_1=+\infty, X_2=-\infty)=0$，从而 $P(X_1\leqslant X_2)=1$。

3. 条件期望

给定 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 代数 $\mathscr{G}$ 和一个非负的随机变量 X，则 X 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望 $E(X|\mathscr{G})$ 是一个 $\mathscr{G}$ 可测的随机变量，它满足 $\forall A\in\mathscr{G}$

$$\int_A X=\int_A E(X_1|\mathscr{G})$$

只要 EX 存在，可定义

$$E(X|\mathscr{G})=E(X^+|\mathscr{G})-E(X^-|\mathscr{G})$$

我们有

i) 若 $X_0\geqslant 0$，则

$$E(X_0|\mathscr{G})\geqslant 0$$

ii) $E(1|\mathscr{G})=1$

iii) 若 EX_0+EX_1 不是 $+\infty, -\infty$ 的形式，则

$$E(X_0+X_1|\mathscr{G})=E(X_0|\mathscr{G})+E(X_1|\mathscr{G})$$

iv) 若 X_0 是 $\mathscr{G}$ 可测，且 EX_0X 存在，则

$$E(X_0X|\mathscr{G})=X_0E(X|\mathscr{G})$$

v) 若 X_0 与 $\mathscr{F}$ 独立，则

$$E(X_0|\mathscr{G})=EX_0$$

vi) 若 $\mathscr{G}^*\subseteq\mathscr{G}$，则

$$E(X_0|\mathscr{G}^*)=E[E(X_0|\mathscr{G})|\mathscr{G}^*]$$

定理 $A.7$ 条件期望的单调收敛定理 若 $X_n\uparrow X$ 且 EX 存在，则在 $\{E(X_0|\mathscr{G})>-\infty\}$ 上

$$E(X|\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})\quad a.s.$$

证明 对任何 $m=1,2,\cdots$，令 $B_m=\{E(X_0|\mathscr{G})>-m\}$

$$B=\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m=\{E(X_0|\mathscr{G})>-\infty\}$$

则 $E(X_n|\mathscr{G})\uparrow$，令 $y=\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})$，因为

$$\int_{B_m}X_0=\int_{B_m}E(X_0|\mathscr{G})>-m>-\infty$$

对每个 $A\in\mathscr{G}$，$m=1,2,\cdots$，由定理 $A.1$

$$\int_{AB_m}y=\lim_{n\to\infty}\int_{AB_m}E(X_n|\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}\int_{AB_m}X_n=\int_{AB_m}X=\int_{AB_m}E(X|\mathscr{G})$$

从而由 $A.6$，在 B_m 上

$$y=E(X|\mathscr{G})\quad a.s.$$

所以在 B 上

$$y=E(X|\mathscr{G})\quad a.s.$$

定理 $A.8$（**条件期望的 Fatou 引理**） 若 $X_n\leqslant X_0$，且 $E(\limsup X_n)$ 存在，则在 $\{E(X_0|\mathscr{G})<\infty\}$ 上

$$E(\limsup X_n|\mathscr{G})\geqslant\limsup E(X_n|\mathscr{G})$$

类似地，若 $X_n\geqslant X_0$，且 $E(\liminf X_n)$ 存在，则在 $\{E(X_0|\mathscr{G})>-\infty\}$ 上

$$E(\liminf X_n|\mathscr{G})\leqslant\liminf E(X_n|\mathscr{G})$$

证明类似于定理 $A.2$的作用，但要注意由 (X_n^+) 一致可积及 $E(\limsup X_n)$ 存在推不出 Fatou 引理，可见 Zheng Wei-an 所构造的反例。(ZwG. 53卷第3期1980年，P291—292)，并且在条件期望情形也没有相应于 $A.3$的定理。

定理 $A.9$**(条件期望的控制收敛定理)** 若$|X_n|\leqslant X_0, X_n\to X$，且 EX 存在，则在$\{E(X_0|\mathscr{G})<\infty\}$上

$$E(|X_n-X|\mathscr{G})\to 0,\quad n\to\infty$$

证明类似于 $A.5$。

定理 $A.10$**(Jesen 不等式)** 设 g 为 R 上连续的下凸函数，且 $Eg(X)$有限，$E(X|\mathscr{G})$有限，则

$$g(E(X|\mathscr{G}))\leqslant E(g(X)|\mathscr{G})\quad a.s.$$

证明 令 g' 为 g 的右导数，则对任意的实数 x,y，有

$$g'(x)(y-x)\leqslant g(y)-g(x)$$

以 $E(X|\mathscr{G})$及 X 代替上式中的 x 及 y，得

$$g'(E(X|\mathscr{G}))(X-E(X|\mathscr{G}))+g(E(X|\mathscr{G}))\leqslant g(X)$$

记上式左边的随机变量为 Y，则 Y 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在，且 $E(Y|\mathscr{G})=g(E(X|\mathscr{G}))$，由 $Y^-\geqslant g(X)^-$，可见 $E(g(X)^-|\mathscr{G})\leqslant E(Y^-|\mathscr{G})<\infty$，因此 $g(X)$关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在，定理得证。

4. 本质上确界

定义 $A.2$ 设 $\mathscr{H}$ 为随机变量的非空族，称随机变量 η 为 $\mathscr{H}$ 的本性上确界，如果 η 满足

i) 对一切 $\xi\in\mathscr{H}$，$\xi\leqslant\eta\quad a.s.$；

ii) 设 η' 为一个随机变量，使得对一切 $\xi\in\mathscr{H}$，有 $\xi\leqslant\eta'\quad a.s.$，则有 $\eta\leqslant\eta'\quad a.s.$

由此可见，如果本质上确界存在，则不计 $a.s$ 相等的两个随机变量的差别，它必唯一，记它为$\operatorname{esssup}_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$ 或 $\operatorname{esssup}\mathscr{H}$.

定理 $A.11$ 令 $\mathscr{H}$ 为随机变量的非空族，则 $\mathscr{H}$ 的本质上确界必存在，且有 $\mathscr{H}$ 中至多可列个元(ξ_n)，使得

$$\operatorname{esssup}\mathscr{H}=\bigvee_n\xi_n$$

若 $\mathscr{H}$ 还对取有限上端的运算封闭，则(ξ_n)可取为一单调增序列。

证明 不妨设 $\mathscr{H}$ 中的元一致有界，否则可考虑族 $\widetilde{\mathscr{H}}=\{\operatorname{arctg}\xi;\xi\in\mathscr{H}\}$，此外显然可进一步假定 $\mathscr{H}$ 对有限上端的运算封闭，令 $(\xi_n)\subset\mathscr{H}$ 为一单调增序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}E\xi_n=\sup_{\xi\in\mathscr{H}}E\xi$$

令 $\eta=\bigvee_n\xi_n$，η 满足定义 $A.2$的条件 ii)，往证条件 i)。

任取 $\xi\in\mathscr{H}$，令 $\xi_n'=\xi_n\vee\xi$，则 $(\xi_n')\subset\mathscr{H}$，$(\xi_n')$ 单调增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n'=\eta\vee\xi$，我们有

$$E(\eta\vee\xi)=\lim_{n\to\infty}E\xi_n'\leqslant\sup_{\xi\in\mathscr{H}}E\xi=E\eta$$

由 $\eta\vee\xi\geqslant\eta$，故从上式知 $\eta\vee\xi=\eta$ $a.s.$，也即 $\eta\geqslant\xi$ $a.s.$ 所以 η 为 $\mathscr{H}$ 的本质上确界。

5. 离散时间鞅

定义 $A.3$ 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，I 是有序集$\{-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,+\infty\}$的任一形为$(a,b)$，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$的区间，下鞅是指一族$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in I\}$，它满足

i) 对一切 $m\leqslant n$，$\mathscr{F}_m\subseteq\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}$；

ii) $\forall\ n$，X_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测（称为 $\mathscr{F}$ 适应）的实值随机变量且 $EX_n^+<\infty$；

iii) $\forall\ m<n$，$X_m\leqslant E(X_n|\mathscr{F}_m)$。

如果 I 既不包含$+\infty$也不包含$-\infty$，则 iii)可代之以

对一切 $n,n+1\in I$，$X_n\leqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$

若$\{-X_n,\mathscr{F}_n,n\in I\}$为下鞅，则称$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in I\}$为上鞅；若 $E|X_n|<\infty$，$n\in I$，且在 iii) 中成立等号，则称它为鞅。

设$(\mathscr{F}_n)$是 $\mathscr{F}$ 的一列上升子 σ 代数族，对 $\mathscr{F}_\infty\triangleq\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)$上的任一概率测度 Q，以 Q_n 记 Q 在 $\mathscr{F}_n$ 上的限制，并设每个 Q_n 对 P 在 $\mathscr{F}_n$ 的限制 P_n 绝对连续。记 $X_n=\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}P_n}$为 Radon-Nikodym 导数，则 $\forall\ A\in\mathscr{F}_n$，$m>n$

$$\int_A X_n = Q_n(A) = Q_m(A) = \int_A X_m$$

因此$\{\frac{dQ_n}{dP_n}, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是鞅，特别，若 $y_1, y_2, \cdots iid$（独立同分布），密度函数为 f，它是对 R_1上 *Borel* 集上的某个 σ 有限测度 μ 而取的，而 g 是另一个关于 μ 的概率密度，如$\forall A\in\mathscr{B}_1$，$\int_A fd\mu=0$可推出 $\int_A gd\mu=0$，那么取 $\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,\cdots,y_n)$

$$\{\frac{g(y_1)g(y_2)\cdots g(y_n)}{f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)}, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$$

是鞅。

若对某个非零实数 λ，$\varphi(\lambda)\equiv Ee^{\lambda y_1}<\infty$，我们可取 $\mu(\cdot)=P\{y_1\in(\cdot)\}$（因此 $f\equiv1$），$g(y)=e^{\lambda y}/\varphi(\lambda)$则$\{e^{\lambda(y_1+\cdots y_n)}/\varphi(\lambda)^n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是鞅。

定理 A. 12　设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$是下鞅，则对任意 $\lambda>0$

$$\lambda P(\max_{n\leqslant N} X_n\geqslant\lambda)\leqslant \int_{[\max\limits_{n\leqslant N} X_n\geqslant\lambda]} X_N\leqslant EX_N^+ \qquad (A. 2)$$

$$\lambda P(\max_{n\leqslant N}|X_n|\geqslant\lambda)\leqslant -EX_1+2EX_N^+ \qquad (A. 4)$$

定理 A. 13（Kolmogorov **不等式**）　设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$是一个平方可积鞅，即$\forall n\leqslant N$，$EX_n^2<\infty$，则

$$P(\max_{1\leqslant n\leqslant N}|X_n|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}EX_N^2 \qquad (A. 5)$$

由于$\{X_n^2, \mathscr{F}n, 1\leqslant n\leqslant N\}$是可积的鞅，由 A. 12之第一式，直接可得出 Kolmogorov 不等式。

如果$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是鞅，且$\sup\limits_n EX_n^2<\infty$，则 Kolmogorov 不等式容易推广为

$$P(\sup_n|X_n|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\sup_n EX_n^2$$

定理 A. 14　Doob 不等式设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是非负下鞅，$p>1$，$\sup\limits_k E|X_n|^p<\infty$，则有

$$(E(\sup_n X_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant q \sup_n (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \tag{A. 6}$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明 任取自然数 N,令

$$F(\lambda)=P(X_N^* \geqslant \lambda)$$

其中 $X_N^* \triangleq \sup_{n \leqslant N} X_n$,则由定理 $A.12$

$$\lambda F(\lambda) \leqslant \int_{(X_N^* \geqslant \lambda)} X^N \mathrm{d}P$$

于是

$$\begin{aligned}
E(X_N^*)^p &= -\int \lambda^p \mathrm{d}F(\lambda) \leqslant \int_0^\infty pF(\lambda)\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant \int_\Omega X_N \left(\int_0^\infty I_{[X_N^* \geqslant \lambda]} p\lambda^{p-2} d\lambda\right)\mathrm{d}P \\
&= \frac{p}{p-1} EX_N (X_N^*)^{p-1} \quad \text{（由 Holdor 不等式）} \\
&\leqslant q(EX_N^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E(X_N^*)^p)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

从而$(E(X_N^*)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant q(EX_N^p)^{\frac{1}{p}}$,再由 Fatou 引理得

$$E(\sup_n X_n^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant q \sup_n (EX_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

定理 $A.15$(**上穿不等式**) 设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1 \leqslant n \leqslant N\}$是下鞅,$(a,b)$是一个实数区间,$\beta_N(a,b)$表示序列 $X_1, X_2, \cdots, X_N$,从$\leqslant a$ 到$\geqslant b$的次数,则

$$E\beta_N(a,b) \leqslant E(X_N-a)^+/(b-a) \tag{A. 7}$$

定理 $A.16$(**鞅收敛定理**) 设$\{X_n, \mathscr{F}_n, -\infty < n < \infty\}$是下鞅,$\mathscr{F}_{-\infty}=\bigcap_{n=-\infty}^{0} \mathscr{F}_n$,$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n)$,则

a) 存在 $X_{-\infty}=\lim_{n \to \infty} X_n \quad a.s.$;

b) $EX_{-\infty}^{+} < \infty$;

c) $\{X_n, \mathscr{F}_n, -\infty \leqslant n < +\infty\}$是下鞅;

若$\sup_n EX_n^+ < \infty$,则

$d)$ 存在 $X_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}X_n \quad a.s.$；

$e)$ EX_∞^+，若对某个 $n\geqslant-\infty,EX_n>-\infty$，则 $E|X_\infty|<\infty$；

$f)$ $\{X_n,\mathscr{F}_n,-\infty\leqslant n\leqslant\infty\}$是下鞅，当且仅当$(X_n^+)$一致可积。

证明 $a)$ 记 $X^*=\limsup\limits_{n\to-\infty}X_n,X_*=\liminf\limits_{n\to-\infty}X_n$，并设 $P(X^*>X_*)>0$，因为

$$\{X^*>X_*\}=\bigcup_{\substack{s<r,r,s\\ \text{为有理数}}}B(r,s)$$

其中 $B(r,s)=\{X^*>r>s>X_*\}$，于是存在有理数 $r,s,r>s$，使 $P(B(r,s))>0$，在集合 $B(r,s)$上，$X_n,\cdots,X_0$，关于区间(r,s)的上穿次数 $\beta_n(r,s)\to+\infty$，因此

$$\lim_{n\to-\infty}E\beta_n=+\infty$$

但由 $A.15$

$$E\beta_n\leqslant(r-s)^{-1}E(X_0-r)^+<\infty$$

矛盾；

$b)$ 由 Jesen 不等式，$\{X_n^+,\mathscr{F}_n,-\infty<n<\infty\}$是下鞅，$EX_n^+$ 随 n 而单调增，所以由 $a)$及 Fatou 引理

$$EX_{-\infty}^+\leqslant\lim_{n\to-\infty}EX_n^+\leqslant EX_0^+<\infty$$

$c)$ 任取实数 a，由 Jesen 不等式，$\{X_n\vee a,\mathscr{F}_n,-\infty<n\leqslant0\}$是下鞅，且一致可积。事实上，$\forall\ c>0$

$$cP(X_n\vee a>c)\leqslant\int_{X_n\vee a>c}X_n\vee a\leqslant\int_{X_n\vee a>c}X_0\vee a\leqslant E(X_0\vee a)^+$$

从而$\sup\limits_n P(X_n\vee a>c)\to0(c\to\infty)$，再由上式中间的不等式可知$\{X_n\vee a,\mathscr{F}_n,-\infty<n\leqslant0\}$是一致可积的下鞅，设$-\infty<m<n<\infty$，则 $\forall\ A\in\mathscr{F}_{-\infty}\subseteq\mathscr{F}_m$

$$\int_A X_m\vee a\leqslant\int_A X_n\vee a$$

令 $m\to-\infty$，由一致可积性及 $a)$，有

$$\int_A X_{-\infty}\vee a\leqslant\int_A X_n\vee a$$

再令 $a \to -\infty$，由 Levi 单调收敛定理可得

$$\int_A X_{-\infty} \leqslant \int_A X_n$$

d) 类似于 a)的证法；

e) 由 Fatou 引理，$EX_{\infty}^{+} \leqslant \sup_n EX_n^{+} < \infty$，设有 $EX_{n_0} > -\infty$，由于 $E|X_n|$递增，由 Fatou 引理

$$E|X_{\infty}| \leqslant \sup_{n \geqslant n_0} E|X_n| \leqslant 2\sup_{n \geqslant n_0} EX_n^{+} - EX_{n_0} < \infty$$

f) 充分性的证明与 c)类似，设$\{X_n, \mathscr{F}_n, -\infty \leqslant n \leqslant \infty\}$是下鞅，则由 Jensen 不等式，$\{X_n^{+}, \mathscr{F}_n, -\infty \leqslant n \leqslant \infty\}$也是下鞅，在 c)的证明中取 $a=0$，则知(X_n^{-})是一致可积的。

定义 $A.4$　在定义 $A.3$中，若 I 包含其上确界，则称鞅(或下、上鞅)是右闭的。

如果存在一个可积的随机变量 η，$X_n = E(\eta|\mathscr{F}_n)$，$n \in I$，则称$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in I\}$为正则鞅(或 Doob 鞅)。

如果$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in I\}$是下鞅(或上鞅)，而且存在一个可积的随机变量 η，使得

$$X_n \leqslant (\text{或相应地} \geqslant) E(\eta|\mathscr{F}_n)$$

则称$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in I\}$是囿于(或相应地强于)正则鞅的下鞅(相应地，上鞅)。

定理 $A.16$**(正则鞅定理)**　设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1 \leqslant n < \infty\}$是鞅，则下述命题等价

i) (X_n)是正则鞅；

ii) (X_n)是一致可积的鞅；

iii) (X_n)是 L_1收敛的鞅，即存在可积的随机变量 Y，使得 $E|X_n - Y| \to 0$；

iv) (X_n)是右闭的鞅。

证明　i)⇒ii)。首先$\sup_n E|X_n| \leqslant E\eta < \infty$；其次$\forall\ c>0, b>0$

$$\sup_n \int_{|X_n|>c} |X_n| \leqslant \sup_n \int_{|X_n|>c} |\eta| \leqslant \int_{|\eta|>b} |\eta| + \frac{b}{c}\sup_n E|X_n|$$

先令 $c\to\infty$，再令 $b\to\infty$，再

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n \int_{|X_n|>c} |X_n| = 0$$

ii)⇒iii)。由 (X_n) 一致可积，$\sup_n E|X_n|<\infty$，因此存在 $X_\infty = \lim_n X_n$，再由 $A.4$，$E|X_n - X_\infty|\to 0$。

iii)⇒iv)。由 (X_n) 是 L_1 收敛的，可见 $\sup_n E|X_n|<\infty$，且 $E|X_n - X_\infty|\to 0$. $\forall\ A\in\mathscr{F}_m$，由于 $(I_A X_n)$ 也是一致可积的

$$\int_A X_m = \lim_{n\to\infty}\int_A E(X_n|\mathscr{F}_m) = \lim_{n\to\infty}\int_A X_n = \int_A X_\infty = \int_A E(X_\infty|\mathscr{F}_m)$$

从而 $X_m = E(X_\infty|\mathscr{F}_m)$ 是右闭。

iv)⇒i)。令 $\eta = X_\infty$.

定理 $A.18$(Levy **定理**) 设 η 是可积的随机变量，则 $\lim_{n\to\infty} E(\eta|\mathscr{F}_n) = E(\eta|\mathscr{F}_\infty)$。

证明 记 $X_n = E(\eta|\mathscr{F}_n)$，则 (X_n) 是正则鞅，它有极限 X_∞，只要证

$$\forall\ A\in\mathscr{F}_\infty,\quad \int_A X_\infty = \int_A \eta \tag{A.8}$$

由于等式两边都定义了 $\mathscr{F}_\infty$ 上的测度，由测度扩张的唯一性，只要证明 $\forall\ A\in\mathscr{F}_n$，$(A.8)$ 式成立。

$\forall\ m\geqslant n$，有

$$\int_A X_m = \int_A X_n = \int_A \eta$$

由 (X_n) 的一致可积性，得

$$\int_A X_\infty = \int_A \eta$$

类似于定理 $A.17$，有

定理 $A.19$ 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$ 是下鞅，则下列事实等价

i) (X_n) 是囿于某一正则鞅的下鞅；

ii) (X_n^+)一致可积；

iii) $\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是右闭下鞅。

6. 停时与 Doob 停止定理

定义 $A.5$ 称取正整值(包括$+\infty$)的随机变量 t 为 $\mathscr{F}_n$ 停时，如果$\forall\ n\in\mathscr{N}$(正整数集，$\{t=n\}\in\mathscr{F}_n$，当 $P(t<\infty)=1$时，称 t 为停止规则。

设 t,σ 都是$(\mathscr{F}_n)$停时，则 $t\wedge\sigma$；$t\vee\sigma$ 都是$(\mathscr{F}_n)$停时，令 τ 为停时，记

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}_\infty ; A\cap(\tau=n)\in\mathscr{F}_n\}$$

则 $\mathscr{F}_\tau$ 也是一个 σ 代数，称为 τ 前 σ 代数。

引理 $A.20$ 设 η 是随机变量，$E\eta$ 存在，则对任何$(\mathscr{F}_n)$停时 τ，

$$E(\eta|\mathscr{F}_\tau)=E(\eta|\mathscr{F}_n),\quad [\tau=n]\text{上 } a.s. \qquad (A.9)$$

证明 记 $I=I_{[\tau=n]}(\omega)$，它是 $\mathscr{F}_n$ 可测的随机变量，首先 $E(I\eta|\mathscr{F}_\tau)$是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，容易看出 $E(I\eta|\mathscr{F}_n)=E(\eta|\mathscr{F}_n)I_{(\tau=n)}$是 $\mathscr{F}_n$ 是可测的，对任何$\forall\ A\in\mathscr{F}_\tau$

$$\begin{aligned}&\int_A E(I\eta|\mathscr{F}_\tau)\\ =&\int_A I\eta=\int_{A\cap(\tau=n)}\eta\\ =&\int_{A\cap(\tau=n)}E(\eta|\mathscr{F}_n)\\ =&\int_A E(I\eta|\mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

由引理 $A.6$，可见 $E(\eta|\mathscr{F}_\tau)=E(\eta|\mathscr{F}_n)$，$(\tau=n)$上 $a.s.$

定理 $A.21$ 设 $\mathscr{F}_0$包含一切零概集$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n\leqslant\infty\}$是右闭鞅(下鞅)，$\tau$ 与 σ 为两个$(\mathscr{F}_n)$停时，$\sigma\leqslant\tau\quad a.s.$，则 $X_\sigma=(\leqslant)E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)a.s.$

证明 由于 $A.17$和 $A.20$，在$[\tau<\infty]$上

$$X_\tau=E(X_\infty|\mathscr{F}_\tau)\quad a.s.$$

且在$[\tau=\infty]$上，上式仍然成立，因此

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=E[E(X_\infty|\mathscr{F}_\tau)\mathscr{F}_\sigma]=E(X_\infty|\mathscr{F}_\sigma)=X_\sigma \quad a.s.$$

对于下鞅的 Doob 停止定理的证明稍微复杂一些，可参考[3]。

正文中常常要用到下述定理。

定理 $A.22$ 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n<\infty\}$是上鞅，则对任何$(\mathscr{F}_n)$停时 t

i) $\{X_{t\wedge n},\mathscr{F}_n,1\leqslant n<\infty\}$仍是上鞅；

ii) 若 $t<\infty \quad a.s.$，EX_t 存在且

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}X_n^-=0 \tag{A.10}$$

则

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n,\quad (t>n)\text{上 } a.s.$$

证明 i) $\forall A\in\mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned}\int_A X_{t\wedge n}&=\int_{A\cap(t\leqslant n)}X_t+\int_{A\cap(t>n)}X_n\\ &\geqslant\int_{A\cap(t\leqslant n)}X_t+\int_{A\cap(t>n)}X_{n+1}\\ &=\int_A X_{t\wedge(n+1)}\end{aligned}$$

ii) $\forall A\in\mathscr{F}_n,m>n$

$$\begin{aligned}\int_{A\cap(t\geqslant n)}X_n&\geqslant\int_{A\cap(t\geqslant n)}X_{t\wedge m}\\ &=\int_{A\cap(n\leqslant t\leqslant m)}X_t+\int_{A\cap(t>n)}X_m\\ &\geqslant\int_{A\cap(n\leqslant t\leqslant m)}X_t-\int_{A\cap(t>m)}X_m^-\end{aligned}$$

令 m 沿子列 $m'\to\infty$，则

$$\int_{A\cap(t\geqslant n)}X_n\geqslant\int_{A\cap(t\geqslant n)}X_t$$

所以

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\quad(t\geqslant n)\text{上 } a.s.$$

对下鞅有类似的定理，此时代替$(A.10)$式，需要

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)} X_n^- = 0$$

此时若 EX_t 存在，$t<\infty$ $a.s.$，则

$$E(X_t|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n \quad (t\geqslant n)a.s.$$

下面的引理 $A.24$在证明上式时是有用的。

设$\{X_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n<\infty\}$是下鞅，$EX_1\geqslant 0$，$\mathscr{F}_0=\{\Phi,\Omega\}$，$X_0=0$，$y_n=X_n-X_{n-1}$，$a_n=E(|y_n||\mathscr{F}_{n-1})$，$b_n=E(y_n^+|\mathscr{F}_{n+1})$，$\sigma_n^2=E(y_n^2|\mathscr{F}_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$

引理 $A.23$ 设 $y_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，则对一切停时 t

$$E(\sum_{k=1}^{t} y_k)=E(\sum_{1}^{t} E[y_k|\mathscr{F}_{k-1}])$$

证明 $E(\sum_{k=1}^{t} y_k)$

$$=E(\sum_{k=1}^{\infty} I_{(t\geqslant k)}y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(t\geqslant k)} y_k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(t\geqslant k)} E(y_k|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$=E[\sum_{k=1}^{t} E(y_k|\mathscr{F}_{k-1})]$$

引理 $A.24$ 若停时 $t<\infty$ $a.s.$，满足

$$E(\sum_{k=1}^{t} b_i)<\infty$$

则 $\forall$ $n=1$，$E(X_t|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n$，$(t\geqslant n)$上 $a.s.$

证明 由定理 $A.22$，只须证 EX_t 存在，且

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)} X_n^+ = 0$$

由引理 $A.23$

$$E(\sum^{\infty} y_k^+)=E(\sum_{1}^{t} b_i)<\infty$$

因此

$$EX_t^+ \leqslant E(\sum_1^t y_k^+) < \infty$$

且

$$\int_{(t>n)} X_n^+ \leqslant \int_{(t>n)} (\sum_1^n y_k^+) \leqslant \int_{(t>n)} (\sum_{k=1}^t y_k^+) \to 0, \quad n\to\infty$$

定理 $A.25$　设$\{X_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是鞅，$t$是任意停止规则

i) 若 EX_t 存在且$\liminf\limits_{n\to\infty} \int_{(t>n)} |X_n| = 0$，则

$$E(X_t|\mathscr{F}_n) = X_n \quad (t\geqslant n)\text{上 } a.s. \quad n=1,2,\cdots$$

ii) 若 $Ey_n^2<\infty, n=1,2,\cdots$，且$\liminf\limits_{n\to\infty} \int_{(t>n)} |X_n| = 0$，$EX_t^2 = E(\sum_1^t \sigma_k^2)$

iii) $E(\sum_1^t a_n)<\infty$或 $E(\sum_1^t \sigma_k^2)<\infty$时

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{(t>n)} |X_n| = 0$$

证明　i)及 iii)的第一部分，由定理 $A.21$、引理 $A.23$的证明可得。

ii) 令 $Z_n = X_n^2 - \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$，易证$\{Z_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是鞅，由于$EZ_{t\wedge n}$存在，且当 m 充分大时，$[t\wedge n>m]=\Phi$，由 i)可知

$$EZ_{t\wedge n} = EZ_1 = 0$$

从而 $EX_{t\wedge n}^2 = E(\sum_{k=1}^{t\wedge n} \sigma_k^2)$，令 $n\to\infty$，由 Fatou 引理

$$EX_t^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} EX_{t\wedge n}^2 = E(\sum_1^t \sigma_k^2)$$

往证相反的不等式，只要假定 $EX_t^2<\infty$，由于$\{|X_n|, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n<\infty\}$是下鞅，由 $A.21$中关于下鞅的部分

$$E(X_t|\mathscr{F}_n) \geqslant X_n \quad (t\geqslant n)\text{上 } a.s.$$

由 schwarz 不等式

$$E(X_t^2|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n^2,(t\geqslant n)a.s.$$

从而 $EX_t^2\geqslant\int_{t>n}X_t^2+\int_{t\leqslant n}X_n^2=EX_{t\wedge n}^2=E(\sum_1^{t\wedge n}\sigma_k^2)$，令 $n\to\infty$，$EX_t^2\geqslant E(\sum_1^t\sigma_k^2)$。

iii)之第二部分。设 $E(\sum_1^t\sigma_k^2)<\infty$，先假定 $Ey_n^2<\infty,n\geqslant1$，由 Schwarz 不等式及 ii)中所证

$$E|X_t|\leqslant(EX_t^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant[E(\sum_1^t\sigma_k^2)]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

且

$$B\triangleq\liminf_{n\to\infty}\int_{t>n}X_n^2=\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}X_{t\wedge n}^2\leqslant E(\sum_1^t\sigma_k^2)<\infty$$

于是

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n)}|X_n|\\&=\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n,|X_n|>a)}|X_n|\\&\leqslant\frac{1}{a}\liminf_{n\to\infty}\int_{(t>n,|X_n|>a)}X_n^2\\&\leqslant Ba^{-1}\to0\quad(a\to\infty)\end{aligned}$$

令 $y_n'=y_nI(t>n)$，则

$$Ey_n'^2=Ey_n^2I(t>n)=\int_{t>n}\sigma_n^2\leqslant\int\sum_1^t\sigma_k^2<\infty$$

而在$(t>n)$上，$y_n'=y_n$，因此附加假设 $Ey_n^2<\infty$是可以去掉的。

7. Wald 引理与 Chung—Fuchs 定理

定理 A. 26(Wald)　设$\{X_n,1\leqslant n<\infty\}$是独立同分布的随机变量序列，部分和 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，T 是 $\mathscr{F}_n$ 停时，$ET<\infty$，如果 EX_1存在，则

$$ES_T = EX_1 \cdot ET$$

其中 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$。

证明 $S_T = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_{(T \geqslant n)}$ 分两种情形证明：

i) $E|X_1| < \infty$，因为 $Y_m = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_{(T \geqslant n)} \uparrow S_T$，由单调收敛定理

$$\begin{aligned} & E\left(\sum_1^{\infty} |X_n| I_{(T \geqslant n)}\right) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} E|X_n| I_{(T \geqslant n)} \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} E|X_n| P(T \geqslant n) \\ = & ET \cdot E|X_1| < \infty \end{aligned}$$

于是由控制收敛定理

$$\begin{aligned} ES_T &= \sum_{n=1}^{\infty} EX_n I_{(T \geqslant n)} = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n P(T \geqslant n) \\ &= EX_1 \cdot ET \end{aligned}$$

ii) $EX_1^- < \infty, EX_1^+ = +\infty$，于是如 i) 所证

$$ES_T^- \leqslant E \sum_{n=1}^{\infty} X_n^- 1_{(T \geqslant n)} = ET \cdot EX_1^- < \infty$$

于是 ES_T 存在，并且

$$\begin{aligned} ES_T &= E \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^+ - X_n^-) I_{(T \geqslant n)} \\ &= E \sum_{n=1}^{\infty} X_n^+ I_{(T \geqslant n)}) - E \sum_{n=1}^{\infty} X_n^- I_{(T \geqslant n)} \\ &= ET \cdot EX_1{}^+ - ET \cdot EX^- = ET \cdot EX_1 \end{aligned}$$

iii) $EX_1{}^- = +\infty, EX_1{}^+ < \infty$，同样可证。

下面是关于二阶矩的 Wald 定理。

定理 4.26 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ iid，$EX_1 = 0$. $EX_1^2 = \sigma^2 < \infty$，$ET < \infty$，则

$$ES_T^2 = \sigma^2 \cdot ET$$

证明 设 $T(n)=T\wedge n$，它是有界停时，且

$$ES_{T(n)}^2=E(\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j}+X_nI_{T\geq n})^2$$

$$=E(\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j})^2+2EX_n\cdot I_{(T\geq n)}\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j}+EX_n^2I_{T\geq n}$$

注意到 $I_{T\geq n}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j}$ 是 $\sigma(X_1,\cdots X_{n-1})$ 可测的，它与 X_n 独立，所以

$$EX_nI_{(T\geq n)}\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j}=EX_n.\ EI_{(T\geq n)}\sum_{j=1}^{n-1}X_jI_{T\geq j}=0$$

于是

$$ES_{T(n)}^2-ES_{T(n-1)}^2=EX_n^2I_{(T\geq n)}=\sigma^2P(T\geq n)$$

$$ES_{T(n)}^2=\sigma^2\sum_{j=1}^{n}P(T\geq j)=\sigma^2ET(n)$$

因为 $T(n)\uparrow T$

$$\lim_{n\to\infty}ES_{T(n)}^2=\sigma^2ET<\infty$$

类似地可证 $\lim\limits_{n\to\infty}E(S_{T(n)}-S_{T(m)})^2=0$，于是存在 $S\in L_2$(即 $ES^2<\infty$)，使 $E(S_{T(n)}-S)^2\to 0(n\to\infty)$。

最后来证明 $S_T\equiv S$. 事实上，由均方收敛性意味着依概率的收敛性，从而存在子列 $T(n_k)$，使 $S_{T(n_k)}\to S_T$，a. s 而当 k 充分大时，$T(n_k)\equiv T$. 因此 $S_T\equiv S$，所以

$$ES_T^2=ET\cdot\sigma^2$$

定理 A. 28(Chung—Fuchs **定理**) 设 $\{X_n,n\geq 1\}$，iid，$E|X_1|>0$，$EX_1=0$，则

$$P(\limsup s_n=+\infty,\liminf s_n=-\infty)=1$$

索　　引